ევროპული ტიპის ოფციონის არათვითფინანსებადი მინიმალური სრატეგიების კომპიუტერული გამოთვლა

ლია ყიფიანი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ევროპული ტიპის ოფციონის ფასწარმოქმნის ამოცანა გამოკვლეულია ფინანსური (B,S) ბაზრის თვალსაზრისით ცნობილი კოქსი-როსსი-რუბინშტეინის მოდელის მიხედვით. განხილულია ზოგადი გადახდის ფუნქცია, გამომდინარე მთელი რეალიზაციის აქციების კურსის მიხედვით. ოფციონის სამართლიანი ფასის ფორმა მოძებნილია არათვითფინანსებადი სტრატეგიები ერთი კლასისათვის; აგებულია მინიმალური ჰეჯი და ინვესტორის კაპიტალდაბანდების პროცესი. მიღებული შედეგები იძლევა საშუალებას ავაგოთ კომპლექსური პროგრამები რიცხვითი მაგალითებისათვის.

საკვანძო სიტყვები: ოფციონი. ფინანსური ბაზარი. ჰეჯი. სტრატეგია. პროგრამა.

1. შესავალი

თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში ცენტრალური ადგილი ფულად-საკრედიტო პოლიტიკას უკავია. ამ პოლიტიკის მართვისა და კონტროლის ძირითადი ინსტრუმენტები ფინანსურ ბაზრებზე ფასიანი ქაღალდებით ოპერაციებია [1,2]. ეს ოპერაციები შეიცავს გარკვეულ რისკებს და საჭიროა ამ რისკების შესწავლა და ანალიზი. ეს საკითხები მიეკუთვნება ფინანსების თეორიას, რომლის მათემატიკურ პრობლემატიკას იკვლევს ბოლო ათწლეულებში ინტენსიურად განვითარებადი სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა.

ნაშრომში შესწავლილია დეტერმინისტული და სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის ზოგიერთი ამოცანა. კერძოდ ფინანსური ხდომილობებისა და ნაკადების დროში ყოფაქცევა და დისკრეტულ ბინომურ ბაზარზე პოპულარული ფასიანი ქაღალდის – ევროპული ტიპის ოფციონის არათვითფინანსებადი მინიმალური სრატეგიების კომპიუტერული გამოთვლა.

2. ძირითადი ნაწილი

1. ჩვენ განვიხილავთ ფინანსური $(B,\ S)$ ბაზრის ცნობილი კოქსი-როსსი-რუბინშტეინის დისკრეტული მოდელს

$$B_n = (1+r)B_{n-1}, \quad B_0 > 0\,, \tag{1}$$

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}, \quad S_0 > 0\,. \tag{2}$$

დავუშვათ, რომ ალბათობის ოჯახის $\{\mathbf{P}\}$ ზომა განისაზღვრება გასაზომ სივრცეში $(\Omega, \mathsf{F}, \mathsf{F}_n)$, $n = 0,1,\ldots,N$ ფილტრაციის მეშვეობით [3].

განტოლებებში (1), (2), $r>0$ წარმოადგენს საპროცენტო ფსონს და ρ_n ნებისმიერი ალბათობისათვის ზომა ∈პ წარმოადგენს დამოუკიდებელი, თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი ცვლადების თანმიმდევრობას მხოლოდ ორი ა და ბ მნიშვნელობებით; აგრეთვე

$$P(\rho_n - b) = p\ ,\ \ P(\rho_n - a) = 1 - p \quad \text{და} \ \ -1 < a < r < b\,.$$

ადვილად შესაძლებელია დავრწმუნდეთ, რომ თუ r აღემატება b-ს, მაშინ შესაძლებელია ურჩიოთ თანხის დაბანდება საბანკო ანგარიშზე (ფულის ინვესტირება m ობლიგაციებში), მაგრამ თუ r ნაკლებია ვიდრე a, მაშინ უმჯობესია ერთი აქციებიდ შეძენა

მოდელებში (1), (2) დაშვებულია, რომ B_n წარმოადგენს გადასახადებიდან თავისუფალ აქტივებს (საპროცენტო ფსონი r მუდმივია) და S_n წარმოადგენს სარისკო აქტივებს რადგან საფონდო ფასი შემთხვევითი ცვლადია [4].

ახლა დავუშვათ, რომ არსებობს რამდენიმე ინვესტორი, რომლებსაც აქვთ საწყისი კაპიტალი $X_0 = x > 0$ და სურთ მომავალში გაზარდონ კაპიტალი (B, S) ბაზრის შესაძლებლობის გამოყენებით. ამ შემთხვევაში გვაქვს საქმე ე.წ. ინვესტიციების ამოცანასთან.

დავუშვათ, რომ ერთი ობლიგაციის ფასი არის B_0 და ფასის ერთი აქციის ფასი არის S_0 საწყის მომენტში. დავუშვათ, რომ ამ დროის ამ მომენტში $n=0$ ინვესტორმა შეიძინა β_0 რაოდენობის ობლიგაციები და γ_0 რაოდენობის აქციები. გავითვალისწოთ, რომ β_0 და γ_0 შეიძლება იყოს წილადი და უარყოფითი სიდიდე. მაგალითად, $\beta_0 = -0{,}2$ ნიშნავს სესხის აღებას $0.2B_0$ ოდენობით, ხოლო γ_0=0.5 ნიშნავს აქციების ნახევარის შეძენას. ამგვარად ინვესტორის საწყისი კაპიტალის შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ფორმით

$$X_0 = X_0^{\pi} = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$$

სადაც $\pi = \pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ ნათქვამია ინვესტორის პორტფელის ან სტრატეგიის ფორმირებისათვის დროის მომენტში $n=0$.

ახლა დავუშვათ, რომ არსებობს გასაზომი ფუნქციების $g=(g_n)$ $n=0,1,\ldots,N$, $g_0=0$ თანმიმდევრობა F_{n-1} დავუშვათ, რომ დროის მომენტამდე $n=1$, ინვესტორმა გადააქცია მისი პორტფელის $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ ახალ პორტფელად პორტფოლიო $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$ იმის გათვალისწინებით, რომ ტოლობა

$$X_0^{\pi} = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0 + g_1\,,$$

დაკმაყოფილებულია. ამგვარად, თუ $g_1 \ge 0$, მაშინ საწყისი კაპიტალის მცირდება სიდიდით g_1, თუ $g_1 \le 0$, მაშინ X_0^{π} იზრდება სიდიდით g_1.

დროის მომენტის $n=1$ დადგომის შემდეგ, ინვესტორს ექნება კაპიტალი

$$X_0^{\pi} = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1 \quad ,$$

სადაც B_1 და S_1 წარმოადგენენ შესაბამისად ერთი ობლიგაციისა და ერთი აქციის ახალი ფასებს დროის მომენტში დრო $n=1$. ჩვენ გვექნება

$$X_0^{\pi} = \beta_1 \Delta B_1 + \gamma_1 \Delta S_1 - g_1 ,$$

სადაც $\Delta X_1^{\pi} = X_0^{\pi} - X_0^{\pi}$, $\Delta B_1 = B_1 - B_0$, $\Delta S_1 = S_1 - S_0$.

ანალოგიურად, დროის მომენტებში ნებისმიერი $n-1$ და $б$ ჩვენ გვექნება

$$X_{n-1}^{\pi} = \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-0} ;$$

$$X_{n-1}^{\pi} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} + g_n ;$$

$$X_n^{\pi} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n ,$$

$$X_n^{\pi} = \beta_n B_n + \gamma_n \Delta S_n - g_n ,$$

სადაც

$$\Delta X_n^{\pi} = X_n^{\pi} - X_{n-1}^{\pi} , \;\; \Delta B_n = B_n - B_{n-1} , \Delta S_n = S_n - \sin \gamma_{-1} .$$

თუ სტრატეგია π აგებულია g_n მნიშვნელობის მხედველობაში მიღებით, მაშინ მას ეწოდება არათვიდაფინანსებადი. როდესაც $g_n \equiv 0$, სტრატეგიას π ეწოდება თვითდაფინანსებადი. ჩვენ გვაქვს

$$\Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} + g_n = 0 \tag{3}$$

როდესაც $g_n \equiv 0$, (3) განტოლებიდან ჩვენ გვაქვს თვითდაფინანსებადი სტრატეგიის პირობა:

$$\Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} = 0 .$$

2. სტრატეგიას $\pi = (\pi_n) = (\beta_n, \gamma_n)$ ეწოდება $(x, f, N) -$ ჰეჯი, თუ

$$X_0^{\pi} = X_0 = x ,$$

$$X_N^{\pi} \ge f_N ,$$

სადაც $f = f_N$ წარმოადგენს გარკვეულ გადახდის ფუნქციას.

თუ ჩვენ გვაქვს ტოლობა $X_N^{\pi} \ge f_N$, მაშინ π-ს ეწოდება მინიმალური ჰეჯი.

$X_0 = x > 0$ და $f = f_N$ -სათვის ალვნიშნოთ $\Pi(x, f, N)$ ყველა $(x, f, N) -$ ჰეჯის ნაკრები.

ახლა მოდით განვსაზღვროთ სტანდარტული ევროპული ოფციონი. იგი წარმოადგენს გადახდის ფუნქციის წარმოებულ (მეორე რიგის) უსაფრთხოებას

$$f = f_N = (N_N - K)^+ = \max(S_N - K, 0) .$$

ამ ოფციონის მფლობელს აქვს უფლება შეიძინოს აქციები k ფასში დროის გარკვეულ მომენტში N. თუ $S_N > k$, მაშინ ოფციონის მფლობელი შეიძენს აქციებს k ფასში, გაყიდის მათ ერთჯერადად S_N ფასში და მიიღებს მოგებას

$$f_N = S_N - k .$$

მისი მოგება უდრის

$$f_N = S_N - k - C_N$$

სადაც C_N წარმოადგენს სტანდარტული ევროპული ოფციონის ე.წ. სამართლიანი (რაციონალური) ფასს. თუ $S_N > K$, მაშინ ოფციონი მფლობელი არ განახორციელებს ოპერაციას თავის ოფციონით და მისი დაკარგი ტოლი იქნება C_N.

ინვესტორის ამოცანა (ოფციონის გამყიდველი) მდგომარეობს შემდეგში: გამოიყენოს ოფციონის სამართლიანი ფასი

$$C_N = \inf\{x > 0 : \Pi(x, f, N) \neq \varnothing\}.$$

რაც მოეთხოვება მინიმალური ჰეჯის $\pi_0^* = (\beta_0^*, \gamma_0^*)$ აგებისათვის.

3. განვიხილოთ ფინანსური (B, S)-ბაზარი (1), (2) და არათვით-დაფინანსებადი სტრატეგიები π_n. დავუშვათ რომ $f = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ თანმიმდევრობა F_{n-1}-გასაზომი ფუნქციების $g = (g_n)$ განსაზღვრულია ტოლობით

$$g_n = c\gamma_n S_{n-1}, \quad 0 < x < 1 . \tag{4}$$

ლემა 1. დავუშვათ, რომ (B, S) ბაზარზე (1), (2) სტრატეგია π წარმოადგენს $(x, f, N)-$ჰეჯს. მაშინ

$$x \geq E^*\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^N \cdot f_N\right].$$

თუ (x, f, N)-ჰეჯის დანამატი π მინიმალურია, მაშინ

$$x = E^*\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^N \cdot f_N\right] .$$

დამტკიცება. (4) ტოლობის გათვალისწინებით ჩვენ გვექნება

$$X_{n-1}^{\pi} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} + c\gamma_n S_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}(1+c),$$

$$X_n^{\pi} = rX_n^{\pi} + \gamma_n S_{n-1} + (\rho - r^*), \tag{5}$$

სადაც

$$r^* = r + c(1+r) .$$

(5) ტოლობიდან

$$X_n^{\pi} - X_{n-1}^{\pi}(1+r) = \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - r^*) . \qquad (6)$$

მოცემულია

$$M_n^* = \frac{X_n^{\pi}}{B_n} ,$$

და (6) განტოლების გათვალისწინებით ჩვენ მივიღებთ

$$\Delta M_n^* = \frac{1}{B_n}\gamma_n S_{n-1}(\rho_n - r^*) .$$

მოცემული

$$m_n = \sum_{k-1}^{n}\left(\rho_k - r^*\right), \qquad \Delta m_n = \rho_k - r^* .$$

ჩვენ გვაქვს

$$M_n^{\pi} = M_0^{\pi} + \sum_{k-1}^{n}\Delta M_k^{\pi} = M_0^{\pi} + \sum_{k-1}^{n}\frac{1}{B_k}\,\gamma_k S_{k-1}\Delta m_k . \qquad (7)$$

გარდა ამისა ჩვენ გვაქვს

$$E(\rho_n - r^*) = np + a(1-p) - r^* ,$$

სადაც E აღნიშნავს საშუალო $\mathrm{P}\in\mathbf{P}$ ღონისძიების მიმართებაში.

ახლა განვსაზღვროთ p* ტოლობის მეშვეობით

$$p^* = \frac{r^* - a}{b-a} = \frac{r + c(1+r) - a}{(b-a)} ,\ 0 < p^* < 1 . \qquad (8)$$

დავუშვათ რომ $\mathrm{P}^*\in\mathbf{P}$ წარმოადგენს ღონისძიების ალბათობას რას შეესაბამება მის სიდიდეს p^* და გამოისახება როგორც

$$P^*(\rho_n = b) = p^* ,\ \ P^*(\rho_n - a) = 1 - p^* .$$

ადვილია ვაჩვენოთ, რომ თანმიმდევრობა $(m_n, \mathsf{F}_n \cdot \mathrm{P}^*)$ აყალიბებს მარტინგალს

$$E^*\left(m_n / \mathsf{F}_{n-1}\right) = m_{n-1} \quad ,$$

სადაც E^* წარმოადგენს ღონისძიების P^* საშუალოს.

ფარდობის (7) გამოყენებით, გამომდინარე რომ F_{n-1} ღონისძიების დადგენა $\gamma_k S_{k-1}/B_k$ სიდიდით, ადვილად ჩანს რომ $(M_n, \mathsf{F}_n, \mathrm{P}^*)$ თანმიმდევრობა აგრეთვე წარმოადგენს მარტინგალს და ამრიგად ყოველი სტრატეგიისათვის π ჩვენ გვექნება $E^* M_N^{\pi} = M_0^{\pi}$. მაშინ

$$E^* M_N^* = E^*\left(\frac{X_N^{\pi}}{B_N}\right) = M_0^{\pi} = \frac{x}{B_0} .$$

მაშასადამე თუ სტრატეგია არის $\pi \in \Pi(x, f, N)$, მაშინ ჩვენ მივიღებთ

$$x \ge E^*\left[(1+r)^{-N} \cdot X_N^{\pi}\right] ,$$

თუმცა, გარდა ამისა, თუ ჰეჯი მინიმალურია, მაშინ ჩვენ გვექნება

$$x = E^* \left[(1+r)^{-N} \cdot X_N^{\pi} \right]$$

ლემა 1 დამტკიცებულია.

დასკვნა 1. მინიმალური სტრატეგიის კაპიტალი განისაზღვრება ტოლობით

$$X_n^{\pi^*} = \frac{1}{1+r}\left[p^* f((1+b)S_n) + (1-p^* f((1+a)S_n) \right]$$

სადაც p^* განისაზღვრება ტოლობით (8).

დასკვნა 2. სამართლიანია შემდეგი განმეორადი ტოლობები [5]:

$$X_n^{\pi^*} = \frac{1}{1+r}\left[p^* C_{N-k+1,\, j+1} + (1-p^*) C_{N-k+1,\, j} \right],$$

სადაც $k = 1,\ldots,N$, $j = 0,1,\ldots,N-k$, p^* განისაზღვრება ტოლობით (8).

მინიმალური სტრატეგიების კომპიუტერული გამოთვლა [6]

- საწყისი პარამეტრების განსაზღვრა:

In[16] := a=1/5	*Out[16] =1/5*
b=4/5	*Out[17] =4/5*
r=0.2	*Out[18] =0.2*
S_0=10	*Out[19] =10*
K=5	*Out[20] =5*
k=8	*Out[21] =8*
c=4	*Out[22] =4*
n=20	*Out[23] =20*
Null	

- დამხმარე პარამეტრების განსაზღვრა:

In[25]: = $p^* = \dfrac{r + c(1+r) - a}{(b-a)}$	*Out[25]* = -4. 8

- ძირითადი ფუნქციების განსაზღვრა:

In[26] : = S[n_, j_] : = $(1 - a)^{n} (1 - b)^{n-j}$
f [x_] : Max [x – K, 0]
Null

- მინიმალური სტრატეგიის კაპიტალის განსაზღვრა:

In[29]: = $X^{\pi^*} = \dfrac{1}{(1+r)}\left(p^* * f[(1+b)*S[n,j]]\right) + \left(1 - p^* * f[(1+b)*S[n,j]]\right)$

Null
Out[29] = 43.134

3. დასკვნა

შესწავლილია ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების პრობლემატიკა არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისთვის ორაქტივიანი ფინანსური ბაზრის კოქსის, როსის და რუბენშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელის შემთხვევაში. აქციის ფასის ბოლო მომენტში მნიშვნელობაზე დამოკიდებული გადახდის ფუნქციისათვის მიღებულია ოფციონის სამართლიანი ფასისა და მინიმალური ჰეჯის ცხადი გამოსახულებები. გადმოცემულია არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების აგების პროგრამა.

ლიტერატურა:

1. ორჯონიკიძე ნ., ყიფიანი ლ., ბაგდასარიანი ვ. ბიზნესის საფუძვლები. სტუ, თბ.,2007
2. ორჯონიკიძე ნ., ყიფიანი ლ., ბაგდასარიანი ვ. მცირე ბიზნესი. სტუ, თბ., 2007
3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. т.1. Факты, модели. т.2. «Фазис». Москва, 1998
4. დოჭვირი ბ. ევროპული ტიპის სტანდარტული ოფციონი. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა. თბილისი. 2005
5. Babilua P., Kipiani L. On one problem of furopean option pricing. Georgian International journal of science and Technology. Tom 3. N 2 New York. 2011. pp. 237-248.
6. კაიშაური თ., ყიფიანი ლ., ხართიშვილი ი. კონუსური გარსის ფიზიკურად არაწრფივი სასაზღვრო ამოცანის გადაწყვეტის ალგორითმი. საერთაშორ. სამეც.ტექნ. კონფ. შრ.კრ. „სამშენებლო მექანიკის პრობლემები" (სტუ-ს სამშენებლო მექანიკისა და სეისმომედეგობის კათედრის 50 წლის იუბილე). სტუ. თბ., 2010. გვ. 259-253.

COMPUTATION OF EUROPEAN OPTION NONSELF-FINANSING MINIMAL STRATEGIES

Kipiani Lia
Georgian Technical University

Summary

The pricing task of European option is investigated in terms of financial (B,S) market by known Cox-Rossi-Rubinstein model. The general payment function proceeding from all realization due share prices is considered. The form of fair price is finding for one class of nonself-financing strategies; are constructed minimal hedge and capital process of investment. The obtained results gives the possibility to construct complex programs for numerical examples.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ РАСЧЁТ НЕСАМОФИНАНСИРУЕМЫХ МИНИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ ОПЦИОННА ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА

Кипиани Лия
Грузинский Технический Университет

Резюме

Задача ценообразования опциона европейского типа исследована с точки зрения финансового (B,S) рынка согласно известной модели Кокса-Росси-Рубинштейна. Рассмотренна общая платёжная функция, исходя из курса акций всей реализации. Форма справедливой цены опциона найдена для одного класса несамофинансируемых стратегий; построены минимальный хедж и процесс капиталовложения инвестора. Полученные результаты предоставляют возможность построить комплексные программы для численных примеров.