ექსპონენტური და გეომეტრიული განაწილებები ოპერაციათა გამოკვლევებში

რევაზ კაკუბავა, გიორგი მაკასარაშვილი, ლუიზა სიხარულიძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია ხდომილებათა უმარტივეს ნაკადსა და ექსპონენტური (ასევე გეომეტრიული) განაწილების ურთიერთკავშირის და ურთიერთგანპირობების ასპექტები. აღწერილია ამ კანონებით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების წარმოშობის მექანიზმი. ჩატარებულია ამ განაწილებათა პრაქტიკული გამოყენების შესაძლებლობათა ანალიზი ოპერაციათა გამოკვლევის ამოცანებში.

საკვანძო სიტყვები: მარკოვის პროცესი. უმარტივესი ნაკადი. გეომეტრიული განაწილება. ექსპონენტური განაწილება.

1. შესავალი

საყოველთაოდ აღიარებული შეხედულების მიხედვით რთული სისტემების მათემატიკური აღწერის ძირითადი აპარატიია მარკოვის პროცესთა თეორია [1-3]. ამასთან, მარკოვის პროცესების მრავალფეროვანი სიმრავლიდან გამოყოფენ პროცესებს მდგომარეობათა სასრული ან თვლადი სიმრავლით.

ასეთი პროცესების გამოყენება ემყარება იმ ვარაუდს, რომ განსახილველი ობიექტების საწყისი ალბათურ-დროითი მახასიათებლები განაწილებულია გეომეტრიული ან ექსპონენტური კანონით. ეს ფაქტორი გადამწყვეტია შემთხვევით პროცესთა თეორიის საინჟინრო გამოყენების თვალსაზრისით. სწორედ შემთხვევით პროცესთა ცალკეულ მდგომარეობაში ყოფნის ხანგრძლივობის განაწილება გეომეტრიული ან ექსპონენტური კანონით განაპირობებს მის „ბუნებრივ" მარკოვულობას (მარკოვის პროცესები მდგომარეობათა დისკრეტული სიმრავლით, რაც ანალიზური მოდელირების გადამწყვეტი ფაქტორია.

ცნობილია აგრეთვე, რომ რთული სისტემის მდგომარეობის შეცვლა, როგორც წესი, ხდება ერთი ან რამდენიმე „მიზეზობრივი იმპულსის" ზემოქმედების შედეგად[2,3]. სხვანაირად ეს ნიშნავს იმას რომ სისტემაში შემოდის ასეთი იმპულსების შემთხვევითი ნაკადები, ან რიგების თეორიის ტერმინებში -- შემთხვევით ხდომილებათა ნაკადები. მარკოვულ სისტემებში ესენი პუასონის ნაკადებია. მეორეს მხრივ, პუასონის ნაკადებს შორის ყველაზე მეტად გავრცელებულია ხდომილობათა უმარტივესი ნაკადები. სწორედ მათზე ჩვენ უფრო დაწვრილებით შევჩერდებით.

1. ძირითადი ნაწილი

გავიხსენოთ, რომ დამტკიცებულია ასეთი თეორემა: უმარტივესი ნაკადის ხდომილებათა მომენტებს შორის დროის ინტერვალები განაწილებულია ექსპონენტური კანონით და პირიქით; ექსპონენტურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების ჯამების მიმდევრობა ქმნის უმარტივეს ნაკადს [1-3]. ანალოგიური დებულება სამართლიანია გეომეტრიული განაწილებისა და გარკვეული ტიპის ნაკადის მიმართ, როცა განიხილება მარკოვის პროცესი დისკრეტული დროით. აღნიშნული დებულების სრულყოფილად გაცნობიერების მიზნით აღვწეროთ უფრო დეტალურად გეომეტრიული ან ექსპონენტური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის „დაბადების" მექანიზმი. ამ მექანიზმის გააზრება გვაძლევს საშუალებას ავხსნათ ინტუიტიურად, თუ რამდენად მისაღებია ვარაუდი ამა თუ იმ შემთხვევითი სიდიდის გეომეტრიული ან ექსპონენტური განაწილების თაობაზე რეალური ობიექტების მათემატიკური მოდელის სინთეზის დროს.

შემთხვევითი ხდომილების ლოდინის დრო. განვიხილოთ მონეტის აგდების ექსპერიმენტი გერბის პირველ მოსვლამდე. ჩავთვალოთ, რომ აგდება ხდება ერთხელ დროის ერთეულში.

ნათელია, რომ ცდის ხანგრძლივობა (გერბის მოსვლამდე ლოდინის დრო) შემთხვევითი სიდიდეა. ამასთან ცალკეულ აგდებათა დამოუკიდებლობის გამო, დროის ნებისმიერ $t>0$ ($t=1,2,...$) მომენტში დამკვიდრებლის მდგომარეობა არაფრითაა უკეთესი (გერბის ლოდინის აზრით), ვიდრე დროის $t=0$ მომენტში: ალბათობა იმისა, რომ t დროის შემდეგ მოუწევს კიდევ s დრო ისეთივეა, როგორც იგივე ლოდინისა $t=0$ მომენტიდან დაწყებული; უფრო ზუსტად, თუ ξ არის ლოდინის შემთხვევითი დრო, მაშინ იმ პირობით, რომ $\xi>t$ შესრულდება

$$P\{\xi>t+s/\xi>t\}=P\{\xi>s\} \tag{1}$$

მართლაც, ნებისმიერი $t=0,1,...,$ ხდომილება $\{\xi>t\}$ ნიშნავს, რომ t რაოდენობის დამოუკიდებელი ცდის დროს არც ერთხელ არ მოვა გერბი, და

$$P\{\xi>t\}=(1-p)^t,\ t=0,1,..., \tag{2}$$

სადაც $p=1/2$ არის გერბის მოსვლის ალბათობა ერთ ცდაში, $1-p$ კი – გერბის არმოსვლისა. ამიტომ პირობითი ალბათობის ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ

$$P\{\xi>t+s/\xi>t\}=\frac{P\{(\xi>t+s)\bigcap(\xi>t)\}}{P\{\xi>t\}}=$$

$$=\frac{P\{\xi>t+s\}}{P\{\xi>t\}}=\frac{(1-p)^{t+s}}{(1-p)^t}=(1-p)^s=P\{\xi>s\}.$$

ტოლობა (1) დამახასიათებელია ისეთი A ხდომილების ლოდინის დროისათვის, როცა უკვე გავლილი ლოდინი t დროის განმავლობაში, არაფრით არ აახლოვებს მის დადგომას (განხორციელებას). ასეთ სიტუაციაში, რომლის უმარტივესი მაგალითი ზემოთ არის მოყვანილი, შემთხვევითი სიდიდის განაწილება ისეთია, რომ

$$P\{\xi>t\}=e^{-\lambda t}, \tag{3}$$

სადაც λ რაღაც არაუარყოფითი პარამეტრია. დისკრეტული $t=0,1,...,$ შემთხვევისათვის (3) შეიძლება დაიწეროს (2) სახით, თუ ჩავსვამთ $p=1\text{-}e\text{-}\lambda$.

დისკრეტული t-ს შემთხვევაში ასეთ განაწილებას უწოდებენ გეომეტრიულს. ამ შემთხვევაში

$$p_\xi(k)=P\{\xi=k\}=e^{-\lambda(k-1)}-e^{-\lambda k}=e^{-\lambda(k-1)}(1-e^{-\lambda})=p(1-p)^{k-1}$$

$$k=0,1,2,...,$$

უწყვეტი t შემთხვევაში $0\le t<\infty$, (3) განაწილებას აქვს განაწილების სიმკვრივე

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, t\ge 0\\ 0, \quad t<0\end{cases}$$

სწორედ ეს არის ექსპონენტური (მაჩვენებლიანი) განაწილება. Λ პარამეტრს აქვს მარტივი ალბათური აზრი, სახელდობრ $\frac{1}{\lambda}$ არის ლოდინის საშუალო დრო

$$\frac{1}{\lambda}=E\xi=\int_0^\infty tf(t)dt.$$

გამოვიყვანოთ ფორმულა (3) უშუალოდ (1) ტოლობიდან იმ ვარაუდით, რომ $\xi=0$ მხოლოდ ნულის ტოლი ალბათობით, და ξ-ს აქვს უწყვეტი განაწილება. განვსაზღვროთ ფუნქცია $p(t)$ ტოლობით

$$p(t)=P\{\xi>t\}.$$

დამოუკიდებელი ხდომილებათა ნამრავლის ალბათობის ფორმულის გამოყენებით

$$P\{\xi>t+s\}=P\{\xi>t\}\cdot P\{\xi>s\}$$

და შესაბამისად $p(t+s)=p(t)\cdot p(s)$,

ანუ $$l\mathrm{n}P(t+s)=l\mathrm{n}P(t)+l\mathrm{n}P(s)$$

ამასთან

$$p(0)=p\{\xi>0\}=1$$

დისკრეტული t-სათვის $t=0,1,2,\ldots$, აქედან ვღებულობთ, რომ $l\mathrm{n}P(t)$ ($l\mathrm{n}P(0)=0$) არის წრფივი ფუნქცია $l\mathrm{n}P(t)=t\cdot l\mathrm{n}P(1)$.

აქედან კი

$$p(t)=(1-p)^t=e^{-\lambda t} \text{ სადაც } p=1-p(1)=P\{\xi>1\}$$

უწყვეტი t-ს შემთხვევაში, თუ ვივარაუდებთ, რომ არსებობს სიმკვრივე $p'(t)$, s-ის მიმართ დიფერენცირება გვაძლევს

$$\frac{\mathbf{p'(t+s)}}{\mathbf{p(t+s)}}=\frac{\mathbf{p'(s)}}{\mathbf{p(s)}}$$

აქედან, $s=0$ შემთხვევაში

$$\frac{\mathbf{p'(t)}}{\mathbf{p(t)}}=-\lambda\ ,$$

სადაც $\lambda=p'(0)>0$, რამდენადაც $p(0)=1$ არის $p(t)=P\{\xi>t\}$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა.

მაშასადამე

$$p(t)=e^{-\lambda t}$$

ვარაუდი იმის თაობაზე, რომ დროის ინტერვალები სისტემაში იმპულსების შემოსვლის მომენტებს შორის განაწილებულია გეომეტრიულად ან ექსპონენტურად, ტოლფასია მტკიცებისა, რომ მათი შემოსვლა ხდება ისე, რომ იმპულსების არცერთ ინიციატორს სრულიად არ აღელვებს სხვა, მისი მსგავსი ინიციატორების არსებობა, მათ არ აინტერესებთ ერთმანეთის არსებობა, არც მათი იმპულსების შემოსვლის ისტორია. სხვანაირად, თუ იმპულსების შემოსვლის მომდევრობას განვიხილავთ როგორც პროცესს, მაშინ ეს არის პროცესი „მახსოვრობის გარეშე“ – ის არ იმახსოვრებს თავის წარსულს, „ცხოვრობს“ მხოლოდ აწმყოთი და მითივე განსაზღვრავს თავის მომავალს.

მეორეს მხრივ, ასეთი სამწუხარო პათოლოგია, როგორიცაა მახსოვრობის უქონლობა, ამ სიტყვის ლექსიკური მნიშვნელობის მიხედვით, აღმოჩნდა ფრიად სასარგებლო მოვლენა „მახსოვრობის უქონელი“ პროცესების გამოყენების დროს რეალური სტოქასტური სისტემების ანალიზის საჭიროებისათვის [4-6]. შეიძლება ითქვას რომ რიგების თეორიისა და საიმედოობის თეორიის მეტ-ნაკლებად გამოყენებითი შედეგები სწორედ ასეთ პირობებშია მიღებული.

1. დასკვნა

ნაშრომის საფუძველზე შესაძლებელია გამოითქვას და შემდეგ დასაბუთდეს დამაჯერებელი ევრისტიკული ვარაუდები რეალური სისტემების აღწერის თაობაზე მარკოვის პროცესებით (მარკოვის პროცესები მდგომარეობათა დისკრეტული სიმრავლით და დისკრეტული ან უწყვეტი დროით). ასეთი მიდგომა არსებითად ამცირებს სათანადო ექსპერიმენტების ჩატარების საჭიროებას, რაც თავის მხრივ განაპირობებს სხვადასხვა რესურსების (მატერიალური, დროითი და სხვ.)

მნიშვნელოვან ეკონომიას. ეს გარემოება კი გადამწყვეტი მნიშვნელობის ფაქტორია ნებისმიერი სისტემის სასიცოცხლო ციკლის ყველა ეტაპზე მმართველ გადაწყვეტილებათა მისაღებად.

ლიტერატურა:

1. Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания. М.: Высшая Школа, 1982
2. Kleinrock L. Queuing Systems: Volume 1 – Theory. Wiley Interscience, New York, 1975
3. Beichelt F., Franken P. Zuverlässigkeit und Instandhaltung. Mathematische Methoden. VEB Verlag Technik, Berlin, 1983
4. Ushakov I.A.; Harrison R.A.: Handbook of Reliability Engineering, J. Wiley & sons, New York, 1994
5. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. World Scientific, Imperial Coledge Press, 2005
6. Kakubava R. Multi-line Markov closed queuing system for two maintenance operations. Electronic Journal. Reliability & Risk Analysis: Theory & Applications. Vol.1 No. 1, issue of March, 2010.

EXPONENTIAL AND GEOMETRICAL DISTRIBUTIONS IN OPERATIONS RESEARCH

Kakubava Revaz, Makasarashvili Giorgi Sikharulidze Luiza
Georgian Technical University

Summary

In the article two wide spread mathematical schemes – the simplest flow of homogenous events (Poisson flow) on one hand, and geometrical and exponential distribution functions for random variables on the other – are considered. Some aspects of interconnection and mutual stipulation of these schemes are discussed. The mechanics of birth for variables of such type is described. Also the analysis of possibilities for application of these distributions for operations research problems is held.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ОПЕРАЦИЙ

Какубава Р., Макасарашвили Г., Сихарулидзе Л.
Грузинский технический университет

Резюме

Рассмотрены аспекты взаимосвязи и взаимоопределенности простеишего потока однородных событий (пуасоновского) с одной стороны, и геометрического и экспоненциального распределений случайных величин с другой. Описывается механизм („рождения“) возникновения случайных величин такого типа. Проводится анализ возможностей использования этих распределений в задачах исследования операций.