

ვალიდა სესაძე , გელა ჭიკაძე

## მართვის ინჟინერიის საფუძვლები



“სტუ-ს IT კონსალტინგის ცენტრი”

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი  
გელაჭიკაძე, ვალიდა სესაძე

მართვის ინჟინერიის  
საფუძვლები



დამტკიცებულია:

სტუ-ს „კონსალტინგის სამეცნიერო  
ცენტრის“ სარედაქციო კოლეგიის  
მიერ

თბილისი

2021 წელი

მიძღვნა

სახელმძღვანელო ეძღვნება საქართველოს ტექნიკური  
უნივერსიტეტის პროფესორების :

# ალმასხან გუგუშვილისა და ალექსანდრე ედიბერიძის ნათელ ხსოვნას

ქვემდებარე სახელმძღვანელო მიძღვნილია მართვის ინჟინერიის საფუძვლების პროგრამულ საგანს. იგი შემუშავებულია ამ საგნის სილაბუსის მიხედვით. წიგნში გარდა მართვის ინჟინერიის საგნის თეორიული მასალისა უხვად არის მოყვანილი მაგალითები. სახელმძღვანელოში კომპიუტერული მოდელირების ინსტრუმენტებად გამოყენებულია გამოთვლითი მათემატიკის პროგრამა Matlab (Simulink) ასევე სიმბოლური მათემატიკის ენა Maple რომელსაც გააჩნია ძალიან მოხერხებული ინტერფეისი და გამოთვლებს ასრულებს სიმბოლური მათემატიკის სივრცეში. ეს სახელმძღვანელო განკუთვნილია ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სტუდენტების, მაგისტრების და დოქტორანტებისათვის, აგრეთვე ყველა იმ დაინტერესებული პირისთვის რომლებიც აპირებენ მართვის ინჟინერიის საკითხების შესწავლას. გარდა ამისა ავტორები გეგმავენ ან მიმართულებით სხვა სახელმძღვანელოების შემუშავებას.

**რეცენზენტები:** პროფ. ქ.კოტრიკაძე

პროფ. გ. სურგულაძე

**რედკოლეგია:**

ა.ფრანგიშვილი (თავმჯდომარე), მ.ახობაძე, გ.გოგიჩაიშვილი, ზ.ბოსიკაშვილი, ე.თურქია, რ.კაკუბავა, თ.ლომინაძე, ნ.ლომინაძე, ვ.კვარაცხელია, ჰ.მელაძე, თ.ობაძე, გ.სურგულაძე(რედაქტორი), გ.ჩაჩანიძე, ა.ცინცაძე, ზ.წვერაიძე, ო.შონია

სტუ-ის „IT -კონსალტინგის სამეცნიერო ცენტრი“, 2021

**ISBN 978-9941-8-3534-6**

Georgian Technical University

Valida Sesadze, Gela Chikadze

**Fundamentals of Management Engineering**



**“IT-Consulting scientific center” of GTU, 2021**

**ISBN 978-9941-8-3534-6**

The following guide is devoted to the programming subject of Fundamentals of Management Engineering. It is designed according to the syllabus of this subject. The book is rich in examples in addition to the theoretical material of the subject of management engineering. The textbook uses Matlab (Simulink), a computational mathematics program, as well as the symbolic mathematical language Maple, which has a very user-friendly interface and performs calculations in the symbolic mathematics space. This guide is intended for students, masters and doctoral students of the Faculty of Informatics and Management Systems, as well as for all those interested in studying management engineering issues. In addition, the authors plan to develop or guide other textbooks.

# სარჩევი

1. თავი 1. მართვის ძირითადი ცნებები და პრინციპები.....	12
1.1. მართვის ინჟინერიის შექმნის ისტორია.....	12
1.2. მართვის ძირითადი ცნებები და პრინციპები.....	14
1.3. ფუნქციური სქემები .....	15
1.4. ტიპური ფუნქციონალური სქემები.....	16
1.4.1. მართვის სისტემის ტიპური სქემა.....	16
1.4.2. მართვის სისტემაში (მს) მართული .....	
ცვლადის პრინციპი.....	16
1.4.3. მართვის სისტემის კომბინირებული.....	
რეგულირების პრინციპი.....	17
2. თავი 2. მართვის სისტემების კლასიფიკაცია.....	17
2.1. მართვის პრინციპები მართვის სისტემებში (მს).....	17
2.2. მართვის სისტემების კლასიფიკაცია.....	18
2.3. ინტელექტუალური მართვის სისტემები .....	19
2.4. ავტომატური მართვის სისტემების ბლოკსქემა. ფუნქციონა.....	
ლური ბლოკები. ძირითადი სტრუქტურული სქემა. მართ.....	
ვის ინფორმაციული ასპექტები.....	21
3. თავი 3. მართვის ტექნიკური სისტემების მაგალითები.....	23
3.1. მართვის ტექნიკური სისტემები.....	23
3.1.1. საფრენი აპარატების მართვის სისტემები.....	23
3.1.2. საფრენი აპარატების მართვის ავტომატიზებული სისტემა.....	23
3.1.3. საავტომობილო მოძრაობის მართვის სისტემები.....	30
3.1.4. მართვის სისტემები მეტალურგიულ,ქიმიურ და სხვა.....	
ტექნიკურ საწარმოებში .....	34
4. თავი 4. ბიოლოგიური მართვის სისტემების.....	
მაგალითები.....	37
4.1. მართვა ბიოლოგიურ სისტემებში.....	37
4.2. ბიოტექნიკური სისტემები,როგორც კვლევის ობიექტები.....	
ძირითადი განმარტებები .....	38
4.3. მართვა ეკონომიკურ სისტემებში.....	47
5. თავი 5. დინამიკური სისტემების მათემატიკური მოდელები.....	53
5.1. დინამიკური სისტემების მათემატიკური აღწერა დი-.....	
ფერენციალური განტოლებებით.....	53
5.2. თავმოყრილ-პარამეტრიანი დინამიკური სისტემები.....	54
5.3. დინამიკური მოდელების კლასიფიკაცია.....	56
5.4. მათემატიკური მოდელების სახეები.....	60
5.4.1. უინერციო მოდელები .....	60

5.4.2.	ინერციული მოდელები.....	61
5.4.3.	ვოლტერას ფუნქციონალური მწკრივები.....	62
5.4.4.	დინამიკური სისტემის აღწერა მდგომარეობის..... სივრცის მეთოდით.....	63
5.5.	გადაცემის ფუნქციები.....	63
<b>6.</b>	<b>თავი 6. მართვის სისტემების გრაფიკული წარმოდგენა.....</b>	<b>67</b>
6.1.	მართვის სისტემების მოდელები სტრუქტურული სქემის..... სახით.....	67
6.2.	სტრუქტურული სქემის გარდაქმნა (გამარტივება).....	71
6.3.	ზედღების (სუპერპოზიციის) პრინციპი.....	74
<b>7.</b>	<b>თავი 7. მართვის სისტემების მათემატიკური აღწერის.....</b>	<b>77</b>
	თანამედროვე ფორმა.....	77
7.1.	მართვის სისტემების მათემატიკური აღწერა მდგომარეობის..... სივრცის მეთოდით.....	77
7.2.	მდგომარეობის ცვლადები და სივრცე.....	80
7.3.	მდგომარეობის განტოლებები.....	89
7.3.1.	ნორმალური ერთგვაროვანი დიფერენციალური ..... განტოლებათა სისტემის ამოხსნა.....	89
7.3.2.	ფუნდამენტალური მატრიცის განსაზღვრა.....	90
7.3.3.	განტოლებათა სისტემის მიყვანა ნორმალურ სახემდე.....	95
<b>8.</b>	<b>თავი 8. მათემატიკური მოდელები.....</b>	<b>97</b>
8.1.	დინამიკური სისტემების მათემატიკური მოდელები.....	97
8.2.	დინამიკური სისტემების წრფივი და არაწრფივი მოდელები.....	99
8.3.	კოშის ამოცანა და პერიოდული ამოხსნები.....	103
8.4.	ციკლური პროცესები.....	105
8.5.	ელექტრული სისტემები.....	110
8.6.	რობოტი-მანიპულატორები.....	111
8.7.	ენერგეტიკული სისტემები.....	114
<b>9.</b>	<b>თავი 9. მართვის სისტემების მდგრადობა.....</b>	<b>115</b>
9.1	მართვის სისტემების მდგრადობის ცნება..... მდგრადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები.....	115
<b>10.</b>	<b>თავი 10. მართვის სისტემების მდგრადობა.....</b>	<b>120</b>
10.1.	მდგრადობის გურვიცის კრიტერიუმი.....	120
10.2.	მდგრადობის რაუსის კრიტერიუმი.....	124
<b>11.</b>	<b>თავი 11. არაწრფივი სისტემების კვლევის მეთოდები. ფაზური....</b>	<b>127</b>
	სივრცის მეთოდი.....	127
11.1.	არგუმენტების პრინციპი მდგრადობის მიხაილოვის..... კრიტერიუმი.....	127
11.2.	ნაიკვისტის მდგრადობის კრიტერიუმი.....	135
11.2.1.	ნაიკვისტის მდგრადობის კრიტერიუმი ღია მდგრადი.....	

სისტემის შემთხვევაში.....	137
11.2.2. ნაიკვისტის მდგრადობის კრიტერიუმი ღია.....	
არამდგრადი სისტემის შემთხვევაში.....	138
11.2.3. ნაიკვისტის მდგრადობის კრიტერიუმი ღია.....	
ასტატიკური სისტემის შემთხვევაში.....	139
11.2.4. ავტომატური მართვის ერთკონტურიანი სისტემის.....	
მდგრადობის ანალიზი მათი სიხშირული მახასია-.....	
თებლების მიხედვით.....	140
<b>12. თავი 12. წრფივი სტაციონარული სისტემის კვლევა MATLAB</b>	
გარემოში.....	148
12.1. ერთგანზომილებიანი წრფივი უწყვეტი სისტემის ანალიზი.....	
MATLAB გარემოში.....	148
12.2. წრფივი სისტემის მოდელები.....	148
12.3. წრფივი სტაციონარული სისტემის გადაცემის ფუნქცია.....	149
12.4. წრფივი სისტემის დინამიური მახასიათებლები.....	150
12.5. გარდამავალი მახასიათებლები (გარდამავალი ფუნქცია).....	150
12.6. სიხშირული მახასიათებლები.....	151
12.7. საკონტროლო კითხვები.....	157
<b>13. თავი 13. მართვის სისტემის მოდელირება SIMULINK-ში.....</b>	<b>158</b>
13.1. წრფივი სისტემები SIMULINK-ში.....	158
13.2. მოდელირების სისტემის აღწერა.....	159
13.3. SIMULINK-ზე სამუშაოს შესრულების თანმიმდევრობა.....	159
13.4. საკონტროლო კითხვები.....	162
<b>14. თავი 14. მართვის ობიექტის მათემატიკური აღწერა.....</b>	<b>.....</b>
ექსპერიმენტალური მეთოდებით.....	163
14.1. ამოცანის ჩამოყალიბება .....	163
14.2. თეორიული საკითხების მოკლე აღწერა.....	163
14.3. სტატისტიკური მახასიათებლების აპროქსიმაცია.....	164
14.4. დინამიკური მახასიათებლების აპროქსიმაცია.....	165
14.5. სამუშაოს შესრულების თანმიმდევრობა.....	166
14.6. საკონტროლო კითხვები.....	170
<b>15. თავი 15. ანალიზური მეთოდებით მათემატიკური მოდელების....</b>	<b>.....</b>
აგება(თბომცვლელი აპარატურის მოდელირება).....	171
15.1. სამუშაოს მიზანი.....	171
15.2. მოკლე თეორიული აღწერა.....	171
15.3. მაგალითი 1.....	174
15.4. მაგალითი 2.....	176
15.5. მაგალითი 3.....	178

15.6.	მაგალითი 4.....	180
15.7.	სამუშაოს შესრულების თანმიმდევრობა.....	183
15.8.	საკონტროლო კითხვები.....	183
16.	თავი 16. ანალიზური მეთოდებით მათემატიკური მოდელების.... აგება (ქიმიური რეაქციების მოდელირება) .....	187
16.1.	სამუშაოს მიზანი.....	187
16.2.	საკითხის მოკლე აღწერა.....	187
16.3.	მარტივი რეაქციების კინეტიკა.....	188
16.4.	რთული რეაქციების კინეტიკა.....	190
16.5.	რეაქციის საკვანძო კომპონენტის შერჩევა.....	190
16.6.	მაგალითი 7.....	193
16.7.	სამუშაოს შესრულების თანმიმდევრობა.....	196
16.8.	საკონტროლო კითხვები.....	199
17.	თავი 17. მარტივი ჰიდრავლიკური სისტემის მოდელირება.....	200
17.1.	მოკლე თეორიული აღწერა.....	200
17.2.	ჰიდრავლიკური სისტემის სტაციონარული რეჟიმის აღმწერი..... განტოლებათა სისტემის ინფორმაციული მატრიცა 1.....	203
17.3.	ჰიდრავლიკური სისტემის სტაციონარული რეჟიმის აღმწერი..... განტოლებათა სისტემის ინფორმაციული მატრიცა 2.....	204
17.4.	ამოცანათა შესრულების თანმიმდევრობა.....	204
17.5.	საკონტროლო კითხვები.....	209
18.	თავი 18. ორთქლის მიღების პროცესის მოდელირება.....	209
18.1.	შესასრულებელი სამუშაოს გეგმა.....	209
18.2.	მოკლე თეორიული დებულებები.....	209
18.3.	მართვის ობიექტის იმიტაციური კვლევა.....	213
18.4.	საკანში (ქვაბში) წნევის რეგულირების ერთკონტურიანი სისტემის.... მოდელირება.....	215
18.5.	ანალოგურ-ციფრული გარდამქმნელის(აცგ)-ს გარდამავალ..... პროცესში ხარისხოვანი მაჩვენებლების ანალიზი.....	219
18.6.	სამუშაოს შესრულების თანმიმდევრობა.....	219
18.7.	აცგ-ს გარდამავალი პროცესის მათემატიკური მოდელების ..... შესაბამისი განტოლებების ამოხსნა MATLAB გარემოში.....	219
19.	თავი 19. არაწრფივი სისტემების მდგრადობის გამოკვლევა..... ლიაპუნოვის მეთოდით.....	223
19.1.	ლიაპუნოვის პირველი მეთოდი.....	223
19.2.	ლიაპუნოვის მეორე მეთოდი.....	227
	ლიტერატურა.....	233



## შესავალი

საავტომობილო მრეწველობაში რობოტების გამოყენებას უკვე საკმაოდ დიდი ხნის ისტორია აქვს. ეს აღარავის უკვირს. ამერიკელი ავტომწარმოებლები, როგორც წესი საამწყობო საამქროს მუშებს არ ათავისუფლებს სამსახურიდან, არამედ ელოდებიან მის პენსიაზე გასვლას, რათა მათ მაგივრად „დაასაქმონ“ რობოტები. უკვე არსებობენ სრულად რობოტიზებული ქარხნები, მაგალითად ტელევიზორების გამოსაშვებად. საამწყობო საამქროებში აღარ არიან ადამიანები, იქ ჩამქრალია სინათლე (ეკონომია ელ. ენერგიაზე), გამორთულია დანიავეების (ვენტილაციის) სისტემები, რობოტებს არც სინათლე და არც გაგრილება არჭირდებათ. ორ-სამ კვირაში ერთხელ ამ საამქროებს აჩერებენ, ანთებენ სინათლეს, რთავენ განიავეების სისტემას - მოდიან გამმართველები ე.წ. „ნალადჩიკები“. მომავალში ასეთი ქარხნები შეიქმნებიან სულ უფრო მეტი და მეტი. პრაქტიკულად ყველა იმ საწარმოში სადაც ხელით სამუშაო შეიძლება შეიცვალოს რობოტებით ან მანიპულატორებით ანუ პროლეტარიატის საუშაოები აღარ იქნება და ასეთი კვალიფიკაციის ადამიანები ვეღარ დასაქმდებიან. ისმის კითხვა რატომ? იმიტომ რომ, რობოტი შეიძლება ჩართულ იქნას ერთი საათით და შეიძლება ჩართული იქნას მთელი ღამით, მივცეთ მას ბრძანება იმუშაოს ნელა ანდა ძალიან ჩქარა. ასეთი საწარმოების მფლობელებს გაუჩნდათ სრულიად ახალი ეკონომიური პერსპექტივები: მათ შეუძლიათ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა ცვალონ საბაზრო მოთხოვნილების შესაბამისად, გაითვალისწინოს წარმოების ოპტიმალური ფუნქციონირების ყველა ვარიანტები, რათა ეკონომიური მოგება და სხვა შემთხვევაში დანაკარგები დაიყვანონ მინიმუმამდე (არ არის საჭირო ზედმეტი სამუშაო საათების ანაზღაურება, არ ჭირდება სამედიცინო დაზღვევების გადახდა, არ ჭირდება სოციალური უზრუნველყოფის ნალოგების გადახდა, არაა საჭირო პროფკავშირებთან „ვაჭრობა“ და ა. შ.) სხვა სიტყვებით თუ ვიტყვით უფრო ზუსტად და ეფექტურად შეუძლია მოემსახუროს ბაზარს. რობოტები ჩვენი ცხოვრების სულ სხვა და სხვა სფეროებში ჩნდებიან. ცალკე თემაა რობოტები სამხედრო სფეროში, ანუ მეომარი რობოტები. მაგალითად სამხედრო მოსამსახურე დედამიწის ერთ, რომელიმე რეგიონში მართავს სამხედრო რობოტს მისგან ათასობით კილომეტრით მოშორებულ სხვა სახელმწიფოს რეგიონში ბრძოლის ველზე. ავტომოყვარულებში აღფრთოვანებას იწვევს ახალი თაობის ავტომობილები, რომელთა მიერ ავტოსადგომე თავისუფალი ადგილის მოძებნა და ავტომობილის იქ გაჩერება ხდება თავად ავტომობილის მიერ ავტომატურ რეჟიმში მძღოლის მიერ სამართავ პულტზე ხელის დაჭერით. უკვე დაიწყო ისეთი ავტომობილების გამოყენება, რომელთაც მძღოლი არ ჭირდებათ. ძნელი წარმოსადგენი არაა რა მოგებას ნახავენ საავტომობილო კომპანიები ასეთი ავტომობილების გამოყენებით. ანუ მძღოლის პროფესია, როგორც ასეთი საჭირო აღარ იქნება. უახლოეს მომავალში ამერიკის ეკონომიკა დაბალი კვალიფიკაციის პროფესიებისაგან განავისუფლდება. ის საწარმოები, რომლებიც იყენებენ დაბალკვალიფიციურ ხელით სამუშაოს გააქვთ ამერიკიდან იმ ქვეყნებში, სადაც იაფფასიანი მუშახელი არსებობს, ხოლო თუ საწარმო გადაადის ავომატური ტექნოლოგიების გამოყენებაზე მას ტოვებენ ამერიკაში.

უახლოე ხანებში დაიწყება გაყიდვა რობოტი-დამლაგებლების, რობოტი-ოფიციალტების, რობოტი-ბარმენების, რობოტი-მედდების, რობოტი-ძიძების და მრავალი სხვა და სხვა ამ ტიპის მარტივი რობოტებისა.

აქ ისმის უმთავრესი და უმტკივნეულები კითხვა: რითი დასაქმდნენ ის ხალხი ვინც ამ უბრალო სამუშაოებით არიან დასაქმებულნი და რომლებიც ამ ტიპის რობოტების ექსპლოატაციის შემთხვევაში დარჩებიან უმუშევრად? აქ უნდა მოვიგონოთ „რევოლუციის დოდო ბელადის ლენინის სიტყვები“. სწავლა, სწავლა და სწავლა! დღესდღეობით აშშ-ში ეკონომიკური კრიზისის პირობებში ყველაზე მომგებიანი ბიზნესის სახეობად გადაიქცა კოლეჯები და უნივერსიტეტები. ადამიანებმა დაკარგეს რა სამსახურები ცდილობენ აიმაღლონ კვალიფიკაცია ან საერთოდ შეიცვალონ სპეციალობა და მოძებნონ ის სფერო სადაც ისინი დასაქმდებიან. ასეთი სფეროები მრავლადაა და იქ დასაქმებულები ძალიან მოთხოვნადი არიან. მეცნიერება ახალი ცოდნა და უნარ-ჩვევები უზომოდ ზრდის თოთოეული ადამიანის ეფექტურ მოღვაწეობას.

### ადამიანების „გაციფრულება“

დღეს-დღეობით მსოფლიოში ჩართულია და მუშაობს ორ მილიარდზე მეტი სხვადასხვა გამოთვლითი მოწყობილობა: დაწყებული სუპერ-კომპიუტერებით რომელთაც გააჩნიათ ასობით ათასი სერვერი და დამთავრებული პლანშეტებითა მობილური ტელეფონებით, რომლებიც შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც სრულფასოვანი კომპიუტერები. მოგეხსენებათ ყველა კომპიუტერი პროგრამული კომპლექსების გარეშე წარმოადგენენ უბრალო გამოუსადეგარ ჯართს. სწორედ პროგრამული კომპლექსების დახმარებით ხდება კომპიუტერების იმგვარი მართვა, რომ მათ განახორციელონ ისეთი ფუნქციონირება, რომლის დიაპაზონი განუსაზღვრელად დიდია. ისინი ახორციელებენ ატომური რეაქტორებისა და კოსმოსური აპარატების მართვას, თანამშრომლების დიდი კოლექტივების მართვას საწარმოებში. თითოეულ ადამიანს აძლევს წვდომას კაცობრიობის დაგროვილ ცოდნასთან ვირტუალური საშუალებებით. უახლოეს ხანებში გამოჩნდებიან პროგრამული კომპლექსები მათთან თავვისა და კლავიატურით ურთიერთობის ტრადიციული მეთოდების ხმოვანი, ხელების მიმიკებისა და ჟესტების ენაზე კონტაქტირების გამოყენებით. ზუსტად ისევე ვიურთიერთობებთ კომპიუტერთან, როგორ ვურთიერთობთ ადამიანები ერთმანეთთან. კომპიუტერი გახდება ადამიანის ნამდვილი მეგობარი. მეორეს მხრივ უკვე დღესვე შეიძლება შეიქმნას ისეთი ციფრული რობოტი, რომელიც შეცვლის თავის მფლობელ ადამიანს არა მარტო გარეგნულად არამედ სემანტიკურადაც ანუ რობოტი პასუხებს გაგვცემს, ისევე იმოქმედებს სხვადასხვა სიტუაციებში, როგორც იმოქმედებდა მისი მეპატრონე ადამიანი. უკვე დღესვე შეიძლება დავინახოთ ის თუ როგორი იქნება ჩვენი მომავალი შვილი, მის გაჩენამდე, შესაძლებელი გახდება ეკრანზე მოვიზომოთ ტანსაცმელი ისე, რომ არ დაგვჭირდება ტანსაცმლის გახდა და ახალი ტანსაცმლის მორგება. ეს ყოველივე მოხდება მაშინ, როდესაც გამოჩნდებიან ისეთი პროგრამული კომპლექსები, რომლებიც მოახდენენ ადამიანის მუდმივ ავტომატურ განათლება-განვითარებას დაწყებული საბავშვო ასაკიდან ღრმა სიბერემდე. ეს ყოველ ჩვენთაგანს მისცემს მუდმივად მივიღოთ ახალ-ახალი ცოდნა და უნარჩვევები დროის მინიმალურ მონაკვეთში. ადამიან ალარ შეეშინდება

რობოტებისა და იგი შეასრულებს იმ სამუშაოს, რომელიც რობოტებს არ შეუძლიათ. პირველ რიგში მოახდენენ კვლევებს და ახალი ტექნოლოგიების პროექტირებას. პრაქტიკულად საქმე გვაქვს საზოგადოება „ცოდნის“ შექმნის ფაქტთან. ცოდნა და გამოცდილება ყოველთვის წარმოადგენდა კაცობრიობის ყველაზე დიდ ფასეულობას და ამ პირობებში ცოდნის ავტომატიზება მიგვიყვანს დღეს-დღეობით წარმოუდგენელ შედეგებამდე წარმატებამდე. დღეს უკვე მკაფიოდ ჩანს, რომ ადამიანის არსებობის გარემო უკვე ძალიან მათემატიზებული და რიცხვით ფორმებადაა წარმოდგენილი, რასაც საბოლოოდ მივყავართ შრომითი საქმიანობის მაღალ მწარმოებლობასა და ეკონომიკურ ეფექტიანობებამდე. ამაზე ჩვენ არც კი შეგვეძლო გვეოცნება თუნდაც 50 წლის წინათ. ხელით შრომით შექმნილი ზედმეტი ღირებულება უკვე წარსულს ჩაბარდა, ახალი ცოდნა და ახალი ტექნოლოგიები არის დღეს ის გარემო სადაც იქმნება ახალი ზედმეტი ღირებულებები. პოლოტიკოსებს, ფილოსოფოსებს, ეკონომისტებს ბევრი თავსატეხი გაუჩნდებათ ამ მიმართულებით, იმის გამო, რომ ხელოვნური „ციფრული“ რობოტები ძალიან მიუახლოვდებიან ბიოლოგიურ ასპექტშიც კი ადამიანებს.

## გენეტიკური კოსმოსი

ყველა ჩვენთაგანს უკვე გვაქვს გარკვეული ინფორმაცია „დნმ“-სა და ორმაგ სპირალზე. მოვიყვანოთ ზოგიერთი უბრალო ფაქტი. დნმ- ორმაგი სპირალი ადამიანის უჯრედში იკავებს კუბური მილიმეტრის ერთ მეხუთიასედე ნაწილს, მაგრამ თუ ამ ორმაგ სპირალს გავშლით წრფეზე მივიღებთ ორმეტრიანი სიგრძის მონაკვეთს. ერთი ადამიანის ორგანიზმში მოთავსებულია 100 ტრილიონამდე ასეთი უჯრა. ამ უჯრათა ორმაგი სპირალები, რომ გავშალოთ ერთ წრფეზე მივიღებთ ათეულჯერ მეტ მანძილს ვიდრეა დედამიწიდან მზემდე. ცოცხალი სამყაროს გენეტიკური სირთულეები ისეთ შთაბეჭდილებას ტოვებენ, რომ მეცნიერების აზრით აქ ინახება „სამყაროს მთელი“ ინფორმაცია უცხო პლანეტელების შესახებ არა მხოლოდ სამყაროში უნდა ვეძებოთ, არამედ უნდა ვეძებოთ ჩვენში. მეცნიერებმა დაიწყეს მოლეკულური კომპიუტინგი ბიოლოგიურ გარემოცვაში. საუბარია უშუალოდ „ცოცხალი“ კომპიუტერების შექმნაზე. როგორ და რითი დაეხმარებიან ისინი ადამიანებს ჯერჯერობით უცნობია. მაგრამ მიუხედავად ამისა ჩვენ უკვე ვდგავართ გენეტიკური კოსმოსის მიჯნაზე. მაგალითად ბრიტანელმა ლიტერატორმა კრისტიან ბოკ -მა თავის ცხოვრების რამოდენიმე წელი მიუძღვნა პროგრამირებისა და მოლეკულური ბიოლოგიის შესწავლას. მან ამ ცოდნაზე დაყრდნობით მოახდინა ბაქტერიის გენომში თავისი ლექსის კოდირება. ამ „გენეტიკური კოდის“ შექმნაზე მან დახარჯა დაახლოებით 4 წელი. მან მიაღწია იმას, რომ ცილაში ამინომჟავების მიმდევრობა, სინთეზში მოიყვანა თავისი ლექსის პირველ სტრიქონთან, შესაძლებელი გახდა გარდაქმნილიყო მისი ლექსის მეორე სტრიქონად და ა. შ. აგრეთვე იყენებდა ამინომჟავების კომბინაციებით დაკოდირებულ ლათინურ ანბანს. წარმოვიდგინოთ ასეთი რამ ჩვენ მოვახდინეთ ცოცხალი უჯრედის სინთეზირება, რომელიც გაყოფისას აღადგენს მიხეილ ჯავახისვილის რომანის არსენა მარაბდელის პირველი სტრიქონის შინაარს, შემდგომი გაყოფისას აღადგენს მეორე სტრიქონს და ა. შ. ყველა ახლად დაბადებული უჯრედები შეიცავენ მთელ რომანს. ისმება კითხვა მერე რა რომ ეს ასეა? პასუხად შეიძლება იქვას ის რომ, გავა რა ადამიანი გენეტიკური კოსმოსის სივრცეში და შეძლებს იქ თავისი

ინფორმაციის განთავსებას. შედეგად ჩვენ შევძლებთ არა მხოლოდ კიბორგების შექმნას და ათასი წელი სიცოცხლეს არამედ შევქმნით ხელოვნურ ეკოლოგიურ სისტემებს, რომელიც შეძლებს პრაქტიკულად პრაქტიკულად ყველა ტიპის ენერგიაზე მუშაობას, მათ შორის მზის ენერგიაზე და თავისუფლად შევძლებთ სამყაროში გადაადგილებას. აგრეთვე ამ ტექნოლოგიური გარღვევის შემდეგ აღარ იქნება პლანეტაზე ავადმყოფობები, სიღარიბე, შიმშილი...

## საზოგადოების მართვა

საზოგადოების მართვა ეფუძნება ერთი ადამიანის მართვის ტექნოლოგიებს, მისი ინტერესებისა და მოთხოვნილებების გათვალისწინებით. მართვის თანამედროვე ტექნოლოგიები რა თქმა უნდა ძალიან შორს არის ძალიან პოპულარული აზრებისგან, რომ თითქოს და კომპიუტერული ტექნოლოგიები შეაღწევენ ადამიანების ტვინებში და იქ ბიოლოგიურ დონეზე მოახდენენ მათ მართვას. მართალია უკვე შესაძლებელია ბიოლოგიურ დონეზე „შეღწევადი“ ტექნოლოგიების გამოყენება, რომელთა დახმარებითაც მოხდება ადამიანების აზრების წაკითხვა, ადამიანის ტვინში ელექტრული აქტივობების სკანირების საფუძველზე. ყველაზე დიდი მნიშვნელობა ექნება ინფორმაციის განაწილების ტექნოლოგიებს, რომლებიც ძირითადად „განთესავენ“ ადამიანისათვის არასასურველ ინფორმაციას, ანუ არ განიხილავენ ინფორმაციის იმ ბაზებს, რომელიც არ იქნება საჭირო კონკრეტული ადამიანის, კონკრეტული მიმართულებით განათლების პროცესში. ის თუ რა ტემპებით ვითარდება კაცობრიობის აზროვნება, ის თუ რა ტემპებით იკვლევს ის გარემომცველ ბუნებას და საზოგადოებრივი განვითარების პროცესებს, ის თუ რა „პრაგმატულობით“ იყენებს ის ახალ აღმოჩენებს ყოველდღიურ ცხოვრებაში მეტყველებს პირველ რიგში ის ფაქტი რომ: დაახლოებით 1000 წლის წინ წერა-კითხვა იცოდა მოსახლეობის დაახლოებით 3%-მა. 1000 წელი ეს არის მხოლოდ 1000 შემობრუნება დედამიწისა მზის გარშემო... ანუ ეს სამყაროს ფონზე წამია, ერთი გაელვებაა და ამ წამის განმავლობაში ადამიანთა ცივილიზაციამ მოახდინა ინფორმაციული აფეთქება. სხვა სიტყვებით, რომ ვქვათ ადამიანები განსაკუთრებით, შეიძლება ითქვას ზედმეტად ეფექტურები არიან. ეფექტურობის ეს ბუნებრივი ფენომენი მისი, რაობა და წარმომავლობა მეცნიერებისათვის ჯერ-ჯერობით უცნობია და თუ როდისმე ცნობილი გახდება ესეც ეჭვის ქვეშ არის. ჩვენ ყველანი დაკავებული ვართ მიმდინარე პრობლემებით და ვცდილობთ მოვძებნოთ ამ პრობლემების გადაჭრის ოპტიმალური გზები. საზოგადოებრივი მოწყობის პრობლემების ოპტიმალური გადაწყვეტის ძიება, სხვა არაფერია თუ არა ძებნა ამოცანის იმ ამონახსნისა, რომელიც საზოგადოების სხვადასხვა ფენების, ერების და ეროვნებების, სხვადასხვა რელიგიების თანაცხოვრების ეფექტურობის განმსაზღვრელი იქნება და ეს გადაწყვეტილება მისაღები იქნება დედამიწის მოსახლეობის დიდი უმრავლესობისათვის და რომელიც განსდაზღვრავს მათი ცხოვრების დონეს. მაშინ როდესაც ადამიანები ვერ ახერხებენ უმრავლესობისათვის მისაღებ გადაწყვეტილებათა გამომუშავებას, მიღებას და ცხოვრებაში დანერგვას, საზოგადოებრივი მოწყობის საკითხებში, აი სწორედ მაშინ იწყება პროტესტები, გაფიცვები, რევოლუციები, ომები და ა.შ. სახელმწიფოები, რელიგიები, რასობრივი განსხვავებები რამდენადაც ძნელი არ იყოს ამის აღიარება ქმნიან სხვადასხვა სახის ტიპის პრობლემებს, იქმნება სხვადასხვა ბანაკები,

რელიგიური გაერთიანებები, რომლების ერთმანეთთან არიან დაპირისპირებული იმ დონეზე, რომ მზად არიან გამოიყენონ მასობრივი განადგურების იარაღიც კი... , მაგრამ კაცობრიობამ უკვე გარკვეულ წილად მოძებნა ამ პრობლემის გადაჭრის სამეცნიერო-ტექნიკური გადაჭრის ერთერთი გზა, რომელიც დაუპირისპირდება ბანაკებს, - ეს არის ინფორმაციის გაცვლა ერთმანეთს შორის, ერთობლივი ვირტუალური გადაწყვეტილებების მიღება და სწორედ ასეთი მიდგომებით არის შესაძლებელი მთელს დედამიწაზე საზოგადოებრივი მოწყობის კაცობრიობის სასარგებლოდ გარდაქმნა. დღეს-დღეობით მარტო Facebook სისტემაში ყოველდღიურად დაახლოებით 800 მლნ ადამიანი ურთიერთობს. ცვლიან ინფორმაციას, იღებენ საერთო გადაწყვეტილებებს, აწყობენ ერთობლივ ვირტუალურ ღონისძიებებს, ამყარებენ პირადულ კონტაქტებს. ამის წარმოდგენა რატქმა უნდა სულ რაღაც 20 წლის წინ წარმოუდგენელი იყო, მაგრამ ეს ყველაფერი მხოლოდ დასაწყისია. ინტერნეტს ძალუმს ყველა დაპირისპირებული ბანაკის განადგურება, მაგრამ მომავალში ამან შეიძლება გამოიწვიოს სახელმწიფოების გაქრობა.

თავიდან ამერიკელებმა ინტერნეტის შექმნა დაიწყეს თავისთვის გასული საუკუნის სამოციან წლებში ( კომპიუტერული ქსელების პირველი მოდელები შეიქმნა პენტაგონში) , მისი აგება შესაძლებელი გახდა იმ დროისათვის უკვე არსებული მათემატიკის, ფიზიკის, კიბერნეტიკის, ინფორმაციის თეორიის, კავშირგაბმულობის, გამოთვლითი ტექნიკის გრანდიოზული მიღწევების საფუძველზე, მაგრამ მაინც უმთავრესი მათ შორის იყო კაცობრიობის, ადამიანების სწრაფვა თავისუფალი ურთიერთობებისკენ. ინტერნეტი - ეს არის სხვადასხვა ქვეყნის ათასობით მოწინავე მეცნიერების ფუნდამენტურ კვლევებზე და მათ საზოგადოებრივ მისწრაფებებზე დაფუძნებული ბრწყინვალე შედეგი, იმ მეცნიერებისა , რომლებიც მიეკუთვნებოდნენ სწორედ ჩვენს მიერ ზემოთ ნახსენებ ერთმანეთისადმი მტრულად განწყობილ ბანაკებს. ყველაზე მომხიბლავი ამ პროცესში მაინც არის ის, რომ სახელმწიფოები და ერთმანეთისადმი მტრულად განწყობილი ბანაკები ხარჯავენ განუზომ-ლად დიდ თანხებს ინფორმატიკაში მიღწეული შედეგების თავისი ინტერესებისათვის გამო-ყენების საქმეში. სამეცნიერო მიწევები ხდება მისაწვდომი სრულიად მსოფლიოსათვის და ურთიერთკავშირების საფუძველზე შესაძლებელი ხდება მსოფლიო საზოგადოებრივი ურთიერთობების რეორგანიზება. უახლოეს 10-15 წელიწადში ჩვენ გვინდა თუ არ გვინდა მოწმენი გავხდებით მტული ბანაკების ერთმანეთთან დაპირისპირებისა თავიანთი პოზიციე-ბის შენარჩუნებისათვის, იმედია ამ ყველაფერი ზემოთთქმულის საბოლოო შედეგი პოზიტიური იქნება კაცობრიობისათვის, მისი სამომავლო პერსპექტივის თვალსაზრისით.

აღნიშნული სახელმძღვანელო მართვის ინჟინერიის საფუძველები ეძღვნება ავტომა-ტური მართვის სისტემების (ა.მ.ს.)-ს სალექციო სილაბუსზე აგებულ სახელმძღვანელოს( კონს-პექტს). იგი კლასიკური სახელმძღვანელოებისაგან იმით განსხვავდება, რომ იგი ითვალის-წინებს კომპიუტერული გამოთვლითი მათემატიკის პროგრამა MATLAB-ის და სიმბოლური მათემატიკის სპეციალური პროგრამა MAPLE -ს უსაზღვრო შესაძლებლობებს. სახელმძღვანე-ლოში მოყვანილი დიდი განზომილების უამრავი ამოცანების რეალური ამოხსნებისათვის (ამოხსნის პროცესის გაიოლებისათვის) ამოცანების უმრავლესობა გადაწყვეტილია ამ ორ პროგრამაზე.

## თავი 1

### მართვის ძირითადი ცნებები და პრინციპები.

#### 1.1 მართვის ინჟინერიის შექმნის ისტორია

პირველად ინფორმაცია ავტომატების შესახებ ჩვენი ეპოქის დასაწყისში გამოჩნდა ალექსანდრიელი ჰერონის ნაშრომებში "პნევმატიკა" და "მექანიკა", სადაც აღწერილია თვით ჰერონისა და მისი მასწავლებლის კტესიბიუსის მიერ შექმნილი ავტომატები: პნევმატური ავტომატი ტაძარი, წყლის ორგანო, ავტომატი წმინდა წყლის გაყიდვისთვის და ა.შ. ჰერონის იდეები ბევრად უსწრებდა თავის დროს და მის ეპოქაში ვერ გამოიყენებოდა. შუა საუკუნეებში მნიშვნელოვნად განვითარდა იმიტაცია "ანდროიდის" მექანიკა, როდესაც მექანიკურმა დიზაინერებმა შექმნეს არაერთი ავტომატი, რომელიც მიჰბაძა ინდივიდუალურ ქმედებებს და შთაბეჭდილების გასაზრდელად, გამომგონებლებმა ავტომატებს გარეგნული მსგავსება მისცეს ადამიანს და მათ "ანდროიდები" უწოდეს. ", ანუ ადამიანის მსგავსი. დღეისათვის ასეთ მოწყობილობებს რობოტებს უწოდებენ, განსხვავებით ავტომატური მართვის მოწყობილობებისაგან, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება ადამიანის საქმიანობის ყველა სფეროში, რომელსაც ავტომატებს უწოდებენ. მე -13 საუკუნეში გერმანელმა სქოლასტიკურმა ფილოსოფოსმა და ალქიმიკოსმა ალბერტ ფონ ბოლშტადტმა ააშენა რობოტი კარების გასაღებად და გასახსნელად. ძალიან საინტერესო ანდროიდები შეიქმნა მე -17 და მე -18 საუკუნეებში. მე -18 საუკუნეში შვეიცარიელმა საათების მწარმოებლებმა პიერ დროზმა და მისმა ვაჟმა ანრიმ შექმნეს მექანიკური მწიგნობარი, მექანიკური მხატვარი და სხვები. მე -18 საუკუნეში შეიქმნა ავტომატების ულამაზესი თეატრი. რუსი თვითნასწავლი მექანიკოსი კულიბინი. მისი თეატრი, რომელიც ერმიტაჟში ინახება, მოთავსებულია "კვერცხის ფიგურის საათში". მისი ჩანასახოვანი ფორმით, ავტომატური მართვის თეორიის მრავალი დებულება შეიცავს (ხაზოვანი) კონტროლერების ზოგად თეორიას, რომელიც ძირითადად შემუშავდა 1868-1876 წლებში მაქსველისა და ვიშნეგრადსკის ნაშრომებში. ვიშნეგრადსკის ფუნდამენტური ნამუშევრებია: "მარეგულირებლის ზოგადი თეორიის შესახებ", "არაპირდაპირი მოქმედების მარეგულირებლის შესახებ". ამ ნამუშევრებში შეგიძლიათ იხილოთ თანამედროვე საინჟინრო მეთოდების წარმოშობა რეგულირების სტაბილურობისა და ხარისხის შესასწავლად. გამოჩენილი საბჭოთა მათემატიკოსის ანდრეი მარკოვის (უმცროსი), საბჭოთა კონსტრუქტივისტული მათემატიკის სკოლის დამფუძნებლის, ალგორითმების თეორიისა და მათემატიკური ლოგიკის ნაშრომების ავტორმა, გადამწყვეტი გავლენა მოახდინა შიდა მეთოდოლოგიის შემუშავებაზე. ავტომატური მართვის თეორია. ამ კვლევებმა გამოიყენა აკადემიკოს ლებედევის სამეცნიერო და პრაქტიკულ საქმიანობაში სამხედრო თემებზე - ავტომატური ტორპედოს კონტროლი და იარაღის ხელმძღვანელობა და დიდი ენერგოსისტემების სტაბილურობა. მე -20 საუკუნის დასაწყისისთვის და პირველ ათწლეულში ჩამოყალიბდა ავტომატური მართვის თეორია, როგორც ზოგადი სამეცნიერო დისციპლინა, რომელ\_იც გამოყენებულია მრავალი სექცია.

#### 1.2 მართვის ძირითადი ცნებები და პრინციპები

მართვა არის მეცნიერებისა და ტექნოლოგიის სფერო, რომელიც მოიცავს მართვის თეორიასა და პრაქტიკას, აგრეთვე ავტომატური სისტემების აგების პრინციპებს და მათ ფორმირების ტექნიკურ საშუალებებს. საკონტროლო ობიექტი (მო) არის მოწყობილობა, ფიზიკური პროცესი ან პროცესების ერთობლიობა, რომელთა კონტროლი უნდა მოხდეს საჭირო შედეგის მისაღებად. ობიექტამ-თან ურთიერთქმედება ხდება მისი პირობითი შეყვანის კონტროლის მოქმედების გამოყენებით (რომელიც ასწორებს ობიექტში – ში წარმოქმნილ პროცესებს), ხოლო გამომავალი არის მოდიფიცირებული პარამეტრი (რაც შედეგების პროცესია). კონტროლი არის მოქმედება (სიგნალი), რომელიც გამოიყენება კონტროლის ობიექტის შეყვანაზე და უზრუნველყოფს კონტროლის ობიექტში პროცესების იმგვარ კურსს, რომელიც უზრუნველყოფს მის გამოსვლაში მოცემული საკონტროლო მიზნის მიღწევას. მიზანი არის პროცესების სასურველი მიმდინარეობა საკონტროლო ობიექტში და მის გამოსვლაში პარამეტრის სასურველი ცვლილების მიღება.

ობიექტები არსებობენ ორი ტიპის: მართვადი და უმართავი. ავტომატური მართვის სისტემა (ამს) მოიცავს მართვის ობიექტს და მართვის მოწყობილობას.

**მართვის მოწყობილობა** არის მოწყობილობების ერთობლიობა, რომელთა დახმარებით ხორციელდება მართვის ობიექტის შესასვლელი (ინფორმაცია, სიგნალი და ა.შ) .

**რეგულირება** არის მართვის კერძო შემთხვევა, რომლის მიზანია მართვის ობიექტის ერთი ან რამოდენიმე გამოსასვლელის შენარჩუნება მოცემულ დონეზე.

**რეგულატორი** - გარდაქმნის რეგულირების  $\varepsilon(t)$  შეცდომას მმართველ ზემოქმედებად, რომელიც მიეწოდება მართვის ობიექტს.

**დამკვეთი ზემოქმედება  $g(t)$**  - განსაზღვრავს გამომავალი მნიშვნელობის საჭირო რეგულირების კანონს.

რეგულირების შეცდომა მოიცემა ფორმულით  $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$ , სხვაობა კონტროლირებადი ცვლადის საჭირო მნიშვნელობასა და მის მიმდინარე მნიშვნელობას შორის. თუ  $\varepsilon(t)$  არ არის ნულოვანი, მაშინ ეს სიგნალი მიეწოდება რეგულატორს შესასვლელზე, რომელიც ახორციელებს ისეთ მარეგულირებელ ზემოქმედებას, რომ საბოლოოდ  $\varepsilon(t) = 0$  დროთა განმავლობაში.

**აღმწფოთი ზემოქმედება  $f(t)$**  არის პროცესი მართვის ობიექტის შესასვლელზე, რომელიც წარმოადგენს მართვის ხელისშემშლელ ზემოქმედებას.

**მართვის გახსნილი (ღია) სისტემები** არიან პროგრამული მართვის სისტემები. მმართველი მოწყობილობა გასცემს მმართველ ზემოქმედებას ისე, რომ არ აქვს ინფორმაცია სისტემის მდგომარეობის შესახებ, დროებითი პროგრამის მინიშნებით (უბრალოება და გაზრდილი საიმედოობა, მართვის დაბალი ხარისხი თუ სხვა). მართვის სისტემა (მს) აღმწფოთების საფუძველზე. მმართველი მოწყობილობა (მმ) შეიმუშავებს მმართველ ზემოქმედებას, რომელიც ეფუძნება სისტემაზე ხელისშემშლელი ზემოქმედების სიდიდეს.

**ჩაკეტილი სისტემა: (ჩს)** ახდენს მმართველ ზემოქმედებას შერჩეული პარამეტრით ობიექტის გაზომილი მდგომარეობის ინფორმაციის საფუძველზე.

**კომბინირებული სისტემა:** მმართველი მოწყობილობა (მმ) გამოიმუშავებს მმართველ ზემოქმედებას ობიექტის პარამეტრების შესახებ ინფორმაციის საფუძველზე და აღმწფოთი

ზემოქმედების საფუძველზე. პირველად ინფორმაცია ავტომატების და მართვის შესახებ ჩვენი ეპოქის დასაწყისში გამოჩნდა ალექსანდრიის ჰერონის ნამუშევრებში " პნევმატიკა "და" მექანიკა ", სადაც აღწერილია თვით ჰერონისა და მისი მასწავლებლის ქტესიბიუსის მიერ შექმნილი ავტომატები: პნევმატური ავტომატური მოწყობილობა ტაძრის კარების გასახსნელად, წყლის ორგანო, წმინდა წყლის გაყიდვის ავტომატური მოწყობილობა და ა.შ. ჰერონის იდეები შორს უსწრებდა თავის ეპოქას და ამიტომაც ვერ ჰპოვეს აღიარება იმ ეპოქაში. შუა საუკუნეებში მნიშვნელოვნად განვითარდა იმიტაციური "ანდროიდული" მექანიკა, როდესაც მექანიკოს-კონსტრუქტორებმა შექმნეს რიგი ავტომატებისა, რომელიც იმეორებდნენ ადამიანები გარკვეულ მოქმედებებს. შთაბეჭდილების მოსახდენად, გამომგონებლები ავტომატებს აძლევდნენ გარეგნული მსგავსების ელემენტებს ადამიანთან და მათ "ანდროიდები" (ადამიანის მსგავსი) უწოდეს. დღეისათვის ასეთ მოწყობილობებს რობოტებს უწოდებენ, განსხვავებით ავტომატური მართვის მოწყობილობებისაგან, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება ადამიანის საქმიანობის ყველა სფეროში, რომელსაც ავტომატებს უწოდებენ.

მე -13 საუკუნეში გერმანელმა ფილოსოფოს-სქოლასტიკოსმა და ალქიმიკოსმა ალბერტ ფონ ბოლშტადტმა ააგო რობოტი კარების გასაღებად და დასახურად.

ძალიან საინტერესო ანდროიდები შეიქმნა მე -17 და მე -18 საუკუნეებში. მე -18 საუკუნეში შვეიცარიელმა საათების მწარმოებლებმა პიერ დრომ და მისმა ვაჟმა ანრიმ შექმნეს მექანიკური მწიგნობარი, მექანიკური მხატვარი და სხვები.

მე -18 საუკუნეში შეიქმნა ავტომატების ულამაზესი თეატრი. რუსი თვითნასწავლი მექანიკოსი კულიბინი. მისი თეატრი, რომელიც სანკტ-პეტერბურგში ერმიტაჟში ინახება, მოთავსებულია "კვერცხის ფიგურის საათში".

ჯერ კიდევ ჩანასახურ მდგომარეობაშია, ავტომატური მართვის თეორიაში მრავალი დებულება (წრფივი) რეგულატორების შესახებ, რომელიც ძირითადად შემუშავდა 1868-1876 წლებში მაქსველისა და ვიშნეგრადსკის ნაშრომებში. ვიშნეგრადსკის ფუნდამენტური ნამუშევრებია: "რეგულატორების ზოგადი თეორიის შესახებ", "ირიბი მოქმედების რეგულატორების შესახებ". ამ ნამუშევრებში შეგიძლიათ იხილოთ თანამედროვე საინჟინრო მეთოდების ჩანასახური იდეები რეგულირების სტაბილურობისა და ხარისხის კვლევის მიმართულებით.

გამოჩენილი მათემატიკოსის ანდრეი მარკოვის (უმცროსი), კონსტრუქტივისტული მათემატიკის სკოლის დამფუძნებლის, ალგორითმების თეორიისა და მათემატიკური ლოგიკის ნაშრომების ავტორმა, გადამწყვეტი გავლენა მოახდინა შიდა მეთოდოლოგიის შემუშავებაზე. ავტომატური მართვის თეორია. ეს კვლევები გამოიყენა აკადემიკოსმა ლებედევმა სამეცნიერო, პრაქტიკულ საქმიანობაში აგრეთვე სამხედრო სფეროში - საზღვაო და სხვა ტორპედოების ავტომატურ მართვაში ანუ ტორპედოს მიზანში მოხვედრის სიზუსტის მართვაში. ამ თეორიებს იგი აგრეთვე იყენებდა მსხვილი, დიდი ენერგოსისტემების სტაბილურობის საქმეში.

მე 20 საუკუნის დასაწყისში მართვის თეორია კერძოდ ავტომატური მართვის თეორია ჩამოყალიბდა ზოგადსამეცნიერებო საგნად.

### **1.3. ფუნქციური სქემები**

ტიპიური მართვის სისტემის (მს)სქემა



**ელემენტის ფუნქციონალური სქემა** - ავტომატური რეგულირებისა და მართვის სისტემის სქემაა, რომელიც შედგენილია იმ ფუნქციის მიხედვით, რომელსაც ეს ელემენტი ასრულებს.

**გამომავალი სიგნალები** არის პარამეტრები, რომლებიც ახასიათებენ მართვის ობიექტის მდგომარეობას და აუცილებელია მართვის პროცესის განხორციელებისათვისთვის.

**სისტემის გამოსასვლელი** არის სისტემის ის წერტილები, სადაც გამომავალი სიგნალები შეიძლება შეინიშნოს გარკვეული ფიზიკური სიდიდეების სახით.

**სისტემის შესასვლელი** არის სისტემის ის წერტილები, რომლებზეც ხდება გარე გავლენა.

**სიგნალები შესასვლელზე:**

**ხელშეშლა (помеха)** არის სიგნალები, რომლებიც არ უკავშირდება მენეჯმენტის ამოცანებისა და შედეგების შესახებ ინფორმაციის წყაროებს.

**სასარგებლო - სიგნალები**, რომლებიც დაკავშირებულია ინფორმაციის წყაროებთან მენეჯმენტის ამოცანებისა და შედეგების შესახებ.

**სისტემები:**

**ერთგანზომილებიანი** არის სისტემები ერთი შესასვლელით და ერთი გამოსასვლელით.

**მრავალგანზომილებიანი** არის სისტემები მრავალი შესასვლელით და მრავალი გამოსასვლელით.

**მართვის სისტემის (მს) მართვის პრინციპები**

**უკუკავშირი** არის კავშირი, რომელშიც გამომავალი ცვლადის რეალური მნიშვნელობა, ისევე როგორც კონტროლირებადი ცვლადის დაყენებული მნიშვნელობა, იკვებება კონტროლერის შეყვანაში.

**ხისტი** - ისეთ უკუკავშირიან სისტემას (**სუ**), რომელის რეგულატორის შესასვლელზე მიიღება ობიექტის გამომავალი სიგნალის პროპორციული სიგნალი ნებისმიერ დროს.

**მოქნილი** - ისეთ უკუკავშირიან სისტემას (**სუ**), რომელშიც რეგულატორის შეყვანისას მიიღება არა მხოლოდ ობიექტის გამომავალი სიგნალის პროპორციული სიგნალი, არამედ გამომავალი ცვლადის წარმოებულების პროპორციული სიგნალი.

**მართვა მმართველი ცვლადის გადახრის (ცვლილების) დროს** - უკუკავშირი ქმნის ჩაკეტილ კონტურს. მოქმედება გამოიყენება კონტროლირებად ობიექტზე, რომელიც პროპორციულია გამომავალ ცვლადსა და შემავალ ცვლადს შორის ჯამისა (სხვაობისა) ისე, რომ ეს ჯამი (სხვაობა) მცირდებოდეს.

**მართვა შემფოთების კომპენსაციის პრინციპით** რეგულატორის შესასვლელზე ხვდება შემამფოთებელი ეფექტის პროპორციული სიგნალი. მიჰყავს კონტროლერის შეყვანას. არ არსებობს დამოკიდებულება მმართველ მოქმედებასა და ამ მოქმედების შედეგს შორის ობიექტზე.

**მართვა კომბინირებული რეგულირების პრინციპის შესაბამისად** გამოიყენება ერთდროულად რეგულირება შემფოთებით და რეგულირება გადახრით რაც უზრუნველყოფს მართვის დიდ სიზუსტეს.

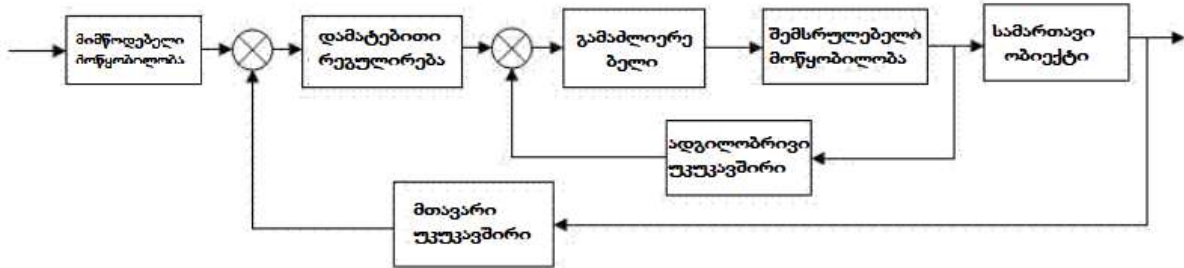
**მართვის თეორიაში (მთ)– ში** სამართავი ცვლადის გადახრის პრინციპი

**მართვის თეორიაში (მთ)– ში** შემფოთებათა კომპენსირების პრინციპი.

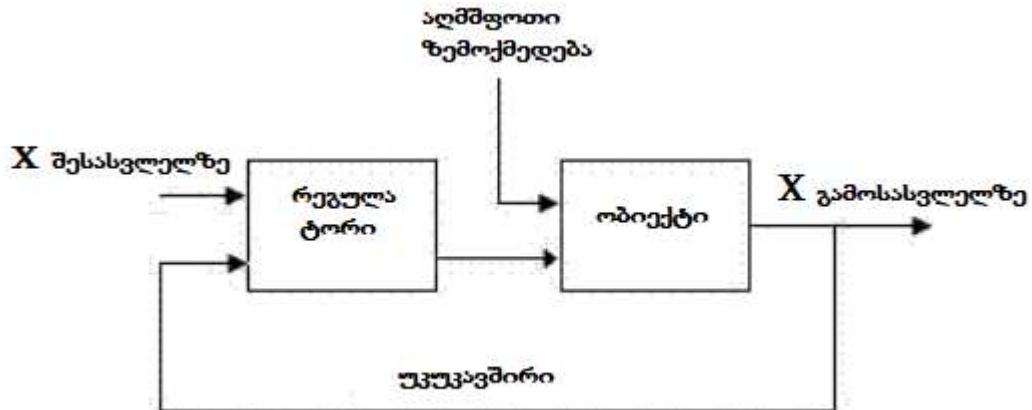
**მართვის თეორიაში (მთ)– ში** კომბინირებული რეგულირების პრინციპი.

#### 1.4. ტიპური ფუნქციონალური სქემები:

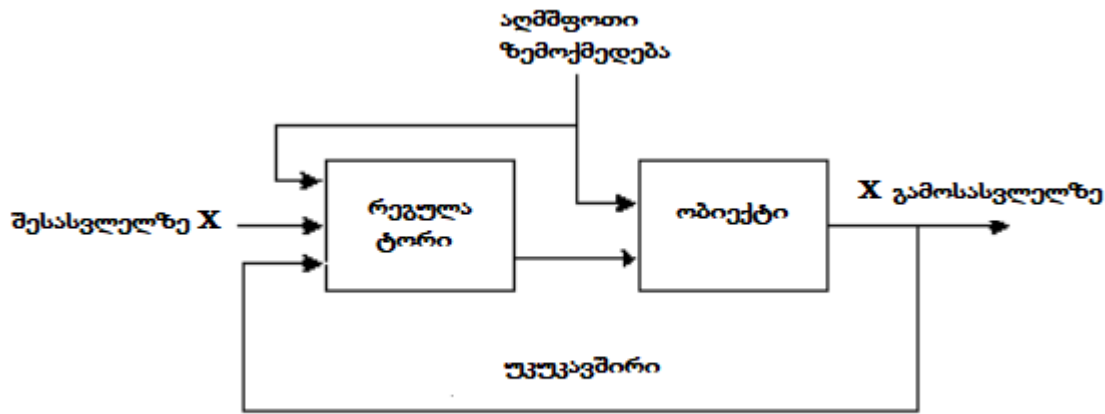
##### 1.4.1. მართვის სისტემის ტიპური სქემა:



##### 1.4.2. მართვის სისტემაში (მს) მართული ცვლადის პრინციპი:



##### 1.4.3. მართვის სისტემის კომბინირებული რეგულირების პრინციპი



## თავი 2

### მართვის სისტემების კლასიფიკაცია.

#### 2.1. მართვის პრინციპები მართვის სისტემებში (მს)

- **უკუკავშირი** არის კავშირი, რომელშიც რეგულატორის შესასვლელზე მიეწოდება გამოსასვლელი ცვლადის რეალური მნიშვნელობა, ასევე როგორც რეგულირებადი ცვლადის საწყისი მნიშვნელობა.
- **ხისტი** არის ასეთი უკუკავშირი, რომელშიც რეგულატორის შესასვლელში მიიღება ობიექტიდან გამომავალი სიგნალის პროპორციული სიგნალი დროის ნებისმიერ მომენტში.
- **მოქნილი** არის ისეთი უკუკავშირი, რომელშიც რეგულატორის შესასვლელზე მიეწოდება არა მხოლოდ სიგნალი, რომელიც პროპორციულია ობიექტიდან გამომავალი სიგნალისა, არამედ ის სიგნალიც რომელიც წარმოადგენს გამომავალი სიგნალის წარმოებულს.
- **მართვა მართვადი ცვადის გადახრის პრინციპით** არის უკუკავშირი ჩაკეტილი კონტურით. სამართავ ობიექტს მიეწოდება ზემოქმედება რომეც პროპორციულია გამომავალ და შემავალ ცვლადების ჯამისა და სხვაობისა, ისე, რომ ეს ჯამი (სხვაობა) უნდა მცირდებოდეს.
- **მართვა აღშფოთებების კომპენსაციის პრინციპით** არის ისეთი მართვა, როდესაც რეგულატორზე ხვდება სიგნალი, რომელიც პროპორციულია აღმშფოთი ზემოქმედებისა. არ არსებობს გავლენა მმართველ ზემოქმედებასა და ობიექტზე ამ ზემოქმედების შედეგს შორის.
- **მართვა კომბინირებული რეგულირების პრინციპით** არის ისეთი მართვა, რომელშიც ერთდროულად გამოიყენება რეგულირება, როგორც გადახრით ასევე აღშფოთებით, რაც მართვის ყველაზე დიდ სიზუსტეს უზრუნველყოფს.

## 2.2. მართვის სისტემების კლასიფიკაცია

მართვის სისტემების (მს) კლასიფიკაცია მართვის სახეობების მიხედვით:

- მართვის სისტემები;
- რეგულირების სისტემები;

მოქმედების ხასიათის მიხედვით:

- უწყვეტი მოქმედების სისტემები;
- დისკრეტული მოქმედების სისტემები;
- სარელეო მოქმედების სისტემები.

სამართავი ობიექტის მდგომარეობის შესახებ ინფორმაციის გამოყენების ხარისხის მიხედვით:

- მართვა უკუკავშირით;
- მართვა უკუკავშირის გარეშე.

კონტროლი ოპერაციული სისტემის გარეშე

სამართავი ობიექტის პარამეტრებისა და სტრუქტურის შესახებ ინფორმაციის გამოყენების ხარისხის მიხედვით:

- ადაპტური სისტემა;
- სამიეზო სისტემა;
- არაადაპტური სისტემა;
- არასამიეზო სისტემა;
- სისტემა ცვლადი სტრუქტურით;
- სისტემა იდენტიფიკაციით.

მს-ში კორდინატები გარდაქმნის ხარისხის მიხედვით:

- დეტერმინირებული სისტემა;
- სტოქასტური (შემთხვევითი ზემოქმედების შემცველი) სისტემა.

კორდინატთა გარდაქმნის მათემატიკური მოდელის სახის მიხედვით:

- წრფივი;
- არაწრფივი.

მმართველი ზემოქმედების სახის მიხედვით:

- ანალოგური;
- დისკრეტული (წყეტადი, იმპულსური, ციფრული).

ადამიანის მონაწილეობის ხარისხის მიხედვით:

- ხელით მართვის სისტემები;
- ავტომატური;

- ავტომატიზირებული( ადამიანი მართვაში).

**გამომავალი ცვლადის ცვლილების კანონების მიხედვით:**

- მასტაბილიზებული : გამომავალი ცვლადის მნიშვნელობა უცვლელია;
- პროგრამული: გამომავალი ცვლადის მნიშვნელობა იცვლება წინასწარ მიცემული პროგრამით;
- მიმყოლი: გამომავალი ცვლადის მნიშვნელობა დამოკიდებულია მართვის სისტემის შესასვლელზე წინასწარ მოცემული ცვლადის მნიშვნელობაზე.

**მმართველი და რეგულირებადი ცვლადების რაოდენობაზე:**

- ექსტრემალური ცვლადები;
- თვითაწყობადი ცვლადები;
- ინტელექტუალური ცვლადები.

**მგრძობიარე (გაზომვადი) ელემენტის მარეგულირებელზე ზემოქმედების მიხედვით:**

- პირდაპირი მართვის სისტემა;
- ირიბი მართვის სისტემა.

**2.3.ინტელექტუალური მართვის სისტემები (იმს)**

ეს არის სისტემები, რომლებიც სწავლების, ადაპტაციის ან რეგულირების საშუალებას იძლევა ობიექტის ქცევის, მისი მართვის სისტემისა და გარე გავლენის შესახებ ინფორმაციის დამახსოვრებისა და ანალიზის გზით. ამ სისტემების თავისებურებაა დასკვნითი ლოგიკური დასკვნების მონაცემთა ბაზის არსებობა, ახსნისა და განმარტებების ქვესისტემა და ა.შ.

**ცოდნის ბაზა** არის ფორმალიზებული წესები ლოგიკური ფორმულების, ცხრილებისა და ა.შ. სახით ჩაწერილ-დამახსოვრებული ინტელექტუალური მართვის სისტემები (იმს)-ები გამოიყენებიან ცუდად ფორმალიზებული ანდა რთული აგებულების ტექნიკური სისტემების მართვისას.

ინტელექტუალური მართვის სისტემების (იმს) კლასი შეესაბამება შემდეგ ნიშან-თვისებებს:

- მართვის სისტემის რეალურ გარემოსთან ურთიერთკავსირის არსებობით კავშირების ინფორმაციული არხების საშუალებით.
- სისტემის გახსნილობა (ღიაობა) საჭიროა ცოდნის შეძენისა და შევსებისათვის.
- პროგნოზირების მექანიზმების არსებობა სისტემის ფუნქციონირების გარემოსი.

- უკუკავშირზე ინფორმაციის უზუსტობა შეიძლება კომპენსირდეს მართვის ალგორითმის მეტი ინტელექტუალიზებით და კავშირის
- წყვეტის შემთხვევაში ფუნქციონირების შენარჩუნებით.

თუ ინტელექტუალური მართვის სისტემა ზემოთ ჩამოთვლილ ხუთ ნიშან-თვისებას აკმაყოფილებს მაშინ იმს ინტელექტუალურია, ხოლო თუ არ აკმაყოფილებს არაინტელექტუალურია.

### ზოგადი განმარტებები

- **ზოგადად მართვა** ეს არის ობიექტზე მიზანმიმართულ მოქმედებათა ერთობლიობა რის შედეგად ობიექტი გადადის ჩვენთვის მიზნობრივად სასურველ მდგომარეობაში.
- **რეგულირება** ეს არის მართვის კერძო შემთხვევა. რეგულირების დროს მიიღწევა სისტემის გამოსასვლელზე მიღებული სამართავი ცვლადების ნორმის ფარგლებში გასწორება (რეგულირება).
- **ავტომატური მართვა** ეს არის მართვა ანუ ობიექტზე მიზანმიმართულ მოქმედება, რომელიც ხორციელდება ადამიანის ჩარევის გარეშე ობიექტის მუშაობის პროცესში.
- **ავტომატური რეგულირება** ეს არის რეგულირება, რომელიც ხორციელდება ადამიანის ჩარევის გარეშე ობიექტის მუშაობის პროცესში.
- **ავტომატური მართვის სისტემა (ამს)** ამს-ის დროს უშუალოდ მართვის პროცესში ადამიანი არ იღებს მონაწილეობას.
- **მართვის ავტომატიზებული სისტემა (მას)** მას-ის დროს მართვა ხორციელდება ადამიანის მონაწილეობით, ინფორმაციის შეგროვება, ანალიზი და გარდაქმნა ხორციელდება კომპიუტერის ანუ ადამიანის საშუალებით.
- **მართვის ობიექტი (მო)** ეს არის ტექნოლოგიური პროცესი ან ტექნიკური ობიექტი, რომელიც სისტემის მუშაობის პროცესში საჭიროებს სხვა ობიექტებთან ან პროცესებთან კავშირს. (მო) შეიძლება იყოს ცალკეული მექანიზმი, მანქანა, ჩარხი, მუშათა ან სპეციალისტთა ჯგუფი.
- **ფიზიკური პარამეტრები(ფპ)** ფიზიკური პარამეტრები ეს შეიძლება იყოს რაღაც ნივთიერება, ენერგია, ტემპერატურა, წნევა, რაიმე მოწყობილობის მუშაობის რეჟიმი და ა.შ.
- **მმართველი პარამეტრი(მპ)** ეს არის პარამეტრები, რომელთა მნიშვნელობების შენარჩუნებაა საჭირო მუდმივად, ან ცვლილება უნდა უზრუნველიყოს გარკვეული ჩვენთვის საჭირო წინასწარ გაგსაზღვრული წესის ფარგლებში .ამ პარამეტრს სხვანაირად უწოდებენ **მმართველ სიდიდეს  $y(t)$** . მმართველი პარამეტრის მოცემულ მომენტში მინიჭებულ მნიშვნელობას უწოდებენ მმართველი პარამეტრის მოცემულ ანუ საწყის მნიშვნელობას  $y_0$ -ს.
- **მმართველი მოწყობილობა (მმ)** - ეს არის მოწყობილობათა კომპლექსი, რომელიც მიერთებულია მმართველ ობიექტთან (მო), რათა უზრუნველიყოს მმართველი პარამეტრის საჭირო მნიშვნელობის შენარჩუნება, ან მისი ცვილება ჩვენთვის სასურველი წესის მიხედვით.

ე.ი. ავტომატური მართვის სისტემა (ამს) არის მართვის ობიექტისა (მო) და მმართველი მოწყობილობის(მმ) ერთობლიობა (კავშირი), რომელთა ფუნქციონალური ურთიერკავშირის შედეგად მიიღწევა მართვის დასახული მიზანი.

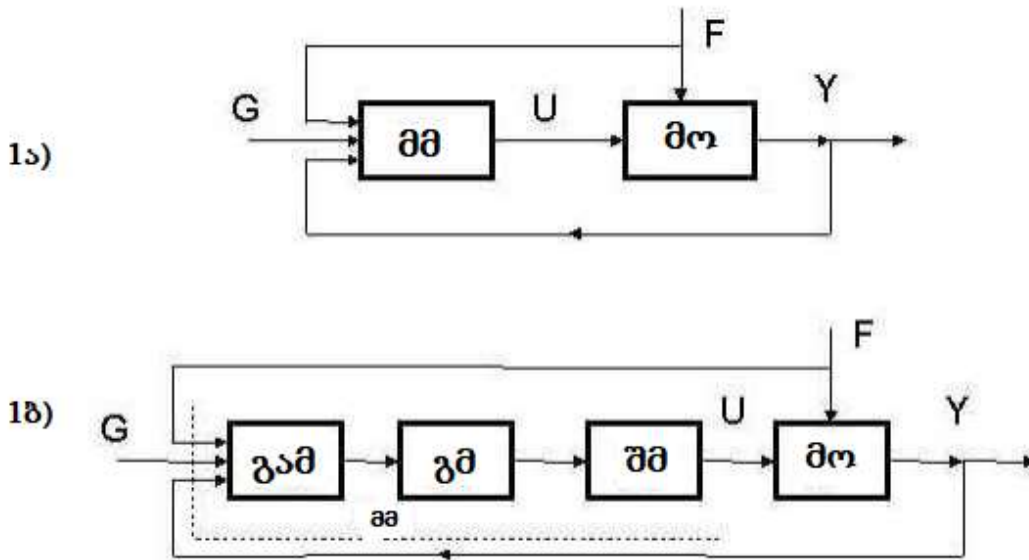
- მმართველი ზემოქმედება (ზზ) ეს არის ის ფაქტორი ან ფაქტორთა ერთობლიობა, რომელიც (რომლებიც) მოქმედებენ მართავის ან რეგულირებად ობიექტებზე ამ ფაქტორებს ეწოდებათ მმართველი ფაქტორები. სხვა ფაქტორები, რომლებიც იწვევენ მმართველი (რეგულირებადი) სისიდეების არასასურველ ცვლილებებს ეწოდებათ შეშფოთებები (აღშფოთებები).

მართვის ობიექტი (მო) სქემატურად მოცემულია ნახ.1.-ზე სამართავი სიდიდეების ერთობლიობა აღვნიშნოთ  $Y$  ვექტორით  $Y\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , მმართველი სიდიდეები - აღვნიშნოთ  $U$  ვექტორით  $U\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , ხოლო შეშფოთებები - აღვნიშნოთ  $F$  ვექტორით  $F\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ . მაშასადამე, მართვის ქვეშ გვესმის მართვის ობიექტზე ისეთი მიზანმიმართული ზემოქმედება, რომელიც უზრუნველყოფს ობიექტის მიზნობრივ (წინასწარ დაგეგმილ) მდგომარეობაში გადაყვანას. მართვის ობიექტზე მმართველი ზემოქმედების განხორციელება შესაძლებელია თუ სრულდება შემდეგი სამი პირობა:

1. მართვის ყოველი პროცესი უნდა იყოს მიზანმიმართული, ანუ უნდა იყოს ცნობილი მართვის მიზანი.
2. არსებობს გარკვეული წესი (წესები), რომლებიც გვაძლევენ საშუალებას მივალწიოთ მართვის მიზანს სხვადასხვა სიტუაციაში.
3. არსებობს მმართველი მოწყობილობა, რომელსაც ძალუძს შექმნას მმართველი ზემოქმედება მართვის წესებიდან მართვის დასახული მიზნიდან გამომდინარე.

#### 2.4. ავტომატური მართვის სისტემის(ამს) ბლოკ-სქემა. ფუნქციონალური ბლოკები. ძირითადი სტრუქტურული სქემა. მართვის ინფორმაციული ასპექტები.

ამს-ს სტრუქტურული სქემა (ნახ. 1ა) შეიცავს მართვის ობიექტს (მო) და მმართველ მოწყობილობას (მმ). ობიექტის მდგომარეობა ხასიათდება  $Y$  ვექტორით, რომლის კომპონენტებიცაა ცალკეული სამართავი (მმართველი) სიდიდეები  $y_i(t)$  - ები. მმართველი მოწყობილობის (მმ) მხრიდან ობიექტის შესასვლელზე ხორციელდება მმართველი ზემოქმედება  $u_i(t) U$  -დან. ობიექტზე აგრეთვე ძემოქმედებს შეშფოთებები (აღშფოთებები)  $F$ , რომლებიც ცვლიან ობიექტის მდგომარეობას,  $Y$  რომელიც ხელს უშლის ან ხელს უწყობს მართვას. მმართველი მოწყობილობის (მმ) შესასვ-ლელზე მიეწოდება დამკვეთი ზემოქმედება (დავალება)  $G$ , რომელიც შეიცავს სამართავი სიდიდის სასურველ მნიშვნელობას  $Y(y_0)$  ანუ მართვის მიზანს. ცვლადები  $U, G, F$  ზოგადად წარმოადგენენ ვექტორებს, ისევე, როგორც  $Y$ . ნახ.1ა -ზე ნაჩვენებია, რომ მმართველი მოწყობილობის შესასვლელზე ზოგადად მმართველი  $G$  ზემოქმედების გარდა, მიეწოდება ობიექტის მიმდინარე მდგომარეობა  $Y$  და შეშფოთებები  $F$ . მმართველი მოწყობილობა (მმ) გადაამუშავებს მიღებულ ინფორმაციას გარკვეული ალგორითმით. რის შედეგადაც (მმ)-ს გამოსასვლელზე მოიცემა მმართველი ზემოქმედება. ნახ.1ბ-ზე მოცემულ ამს-ს სტრუქტურული სქემაზე დატანილია მმართველი მოწყობილობის (მმ) შემადგენელი ნაწილები: 1. გაზომვის მოწყობილობა (გამ) 2. გამომთვლელი მოწყობილობა (გმ). 3. შემსრულებელი მოწყობილობა (შმ). (გაზმ) - ახორციელებს  $U, G, F$  ცვლადების გაზომვას. (გმ) - ახორციელებს მართვის მოწყობილობის ალგორითმის რალიზებას. (შმ) - განკუთვნილია უშუალოდ ობიექტის მართვისათვის, ანუ მდგომარეობის შეცვლა (გმ)-ის მიერ



ნახ. 1 - ავტომატური მართვის სისტემის ბლოკ-სქემა

ნახ.1 -ზე მოცემულია შემდეგი შემოკლებები:

$G$  - დამკვეთი ზემოქმედება (დავალება).  $U$  - მმართველი ზემოქმედება.

$F$  - გარეგანი შემფოთება.  $Y$  - სამართავი სიდიდის საბოლოო მნიშვნელობა.

**მმ** - მმართველი მოწყობილობა; **მო** - მართვის (სამართავი) ობიექტი;

**გამ** - გაზომვის მოწყობილობა; **გმ** - გამომთვლელი მოწყობილობა;

**შმ** - შემსრულებელი მოწყობილობა.

სამრეწველო ტექნოლოგიის რთული ობიექტების მართვის თანამედროვე სისტემები აგებულია იერარქიული პრინციპის შესაბამისად. ეს ნიშნავს, რომ კონტროლის სისტემაში ასეთი ობიექტები იყოფა რიგ ქვესისტემებად, რომლებიც დგანან დაქვემდებარების სხვადასხვა დონეზე. უფრო მაღალი რანგის სისტემა ორიენტირებულია მართვის ზოგადი (გლობალური) კრიტერიუმზე, გვაწვდის ცალკეული ლოკალური ობიექტების ჩართვა-გამორთვის ბრძანებებს, აგრეთვე ახორციელებს ობიექტის მართვის კერძო კრიტერიუმების შერჩევას. მართვის ლოკალური სისტემები ახორციელებენ სისტემის ამოქმედების (გაშვების) ოპტიმალურ რეჟიმებს. სამრეწველო ობიექტის მართვაში ავტომატური მართვის ლოკალური ობიექტები, არიან რა ქვედა იერარქიული რგოლის წარმომადგენლები ახორციელებენ ძირითადი ტექნოლოგიური პროცესების მახასიათებელი ტექნოლოგიური პარამეტრების გაზომვას, კონტროლს, რეგულირებას. როგორც წესი სარეგულირებელი პარამეტრების რაოდენობა ლოკალურ სისტემებში არ არის დიდი, ერთი ან მაქსიმუმ სამი პარამეტრი. მართვის სისტემების საერთო რიცხვიდან ლოკალური სისტემების ხვედრითი წილი არის 80%. ლოკალური სისტემების მუშაობის ხარისხი მნიშვნელოვან-



წილად განსაზღვრავს გამოსავალზე მიღებული პროდუქტის ხარისხს, რაც თავისთავად განაპირობებს წარმოების რენტაბელობას.

## თავი 3

### მართვის ტექნიკური სისტემების მაგალითები.

მართვის ტექნიკური სისტემები: საფრენი აპარატების მართვის სისტემები, ავტომობილის მართვის სისტემა, მართვის სისტემები მეტალურგიულ, ქიმიურ და სხვა ტექნიკურ საწარმოებში.

#### 3.1. მართვის ტექნიკური სისტემები:

##### 3.1.1. საფრენი აპარატების მართვის სისტემები :

საფრენი აპარატების მართვის პროცესი მოიცავს

- საფრენი აპარატების მართვის სისტემის და მისი დანიშნულების ცოდნას;
- მართვის სისტემაში ხელით მართვის ხელსაწყოების სახეობებს;
- კავშირის სახეობებს ხელით მართვის ხელსაწყოებსა და სამართავ მოწყობილობებს შორის;
- ავტომატური მართვის სისტემების აუცილებლობას საფრენი აპარატების მართვის პროცესში.

განვიხილოთ სააფრენი აპარატების მართვის სისტემის დანიშნულება და აუცილებელი მოთხოვნები მათ მიმართ;

საფრენი აპარატების მართვის სისტემის ქვეშ გვესმის: თვითმრინავების ბორტზე განლაგებული ყველა იმ მოწყობილობების ერთობლიობა, რომელიც განსაზღვრავს სხვადასხვა აგრეგატების, თვითმფრინავების ფრენის უზრუნველყოფი შემადგენელი ნაწილების მართვას.

მართვა შეიძლება განხორციელებულ იქნას უშუალოდ მფრინავის მიერ. ანუ მფრინავს თავისი მექანიკური ძალისხმევით აქვს საშუალება სხვადასხვა იმ მოწყობილობების მართვა, რომლებიც საბოლოო ჯამში წარმოადგენენ საფრენი აპარატების მართვის სისტემებს ასეთი ტიპის მართვას ეწოდება **პირდაპირი** (არაავტომატური) მართვა.

თუ მფრინავი საფრენი აპარატის მართვას ახორციელებს იმ მექანიზმებითა და მოწყობილობებით, რომლებითაც იმართება საფრენი აპარატი ამას ეწოდება მართვის **ნახევრადავტომატური** რეჟიმი.

თუ მართვა ხორციელდება ავტომატური მართვის სისტემების კომპლექსით, სადაც მფრინავს მხოლოდ დამკვირვებლის ანუ მაკონტროლებლის ფუნქცია აკისრია, მაშინ ამ მართვის სისტემას ეწოდება **ავტომატური მართვის სისტემა**.

ამჟამად დიდი სისწრაფის საფრენი აპარატების მართვისას გამოიყენებიან **ნახევრად-ავტომატური** და **ავტომატური მართვის სისტემები**

##### 3.1.2. საფრენი აპარატის მართვის ავტომატიზებული სისტემა

თანამედროვე თვითმფრინავის მართვა ხორციელდება მფრინავისა და სპეციალური ავტომატიზებული სისტემების საშუალებით, რომლებიც მფრინავებს ეხმარებიან საფრენი აპარატების მართვის და პილოტირების საქმეში, რაც ემსახურება საფრენი აპარატების (თვითმფრინავების) ეფექტური გამოყენების გაზრდას. ამ სისტემების შექმნის აუცილებლობა გამოიწვია თანამედროვე თვითმფრინავების მართვის სირთულემ. გარდა ამისა ეს აუცილებელი გახდა იმიტომ, რომ თანამედროვე მაღალი სისწრაფის თვითმფრინავების ხელით მართვისას ადგილი აქვს საფრენი აპარატის რეაქციის გარკვეულ დაგვიანებას, მფრინავის მოქმედებაზე (ამას განაპირობებს თვითმფრინავის დიდი სისწრაფე). სწორედ ასეთი ტიპის ხარვეზების აღმოსაფხვრელად არის შექმნილი თვითმფრინავის მართვის ავტომატიზირებული სისტემები. ისინი უზრუნველყოფენ უსაფრთხო ფრენას დიდ მცირე და ძალიან მცირე სიმაღლეებზე, აეროდრომიდან აფრენისა და აეროდრომზე დასმის პროცესებს და სხვა. ავტომატიკა აგრეთვე უზრუნველყოფს რამოდენიმე თვითმფრინავის მწკრივში (ერთმანეთის სიახლევეს) მოძრაობის უსაფრთხოებას შეჯახების თავიდან აცილებას.

თანამედროვე თვითმფრინავის სპეციალური ავტომატური მართვის სისტემა (ამს) ახორციელებს მფრინავის მონაწილეობის გარეშე, ან მფრინავის კონტროლით ასრულებს შემდეგ ფუნქციებს:

- თვითმფრინავის ფრენის მართვას წინასწარ განსაზღვრული, ან ფრენის პროცესში შეცვლილი მარშრუტით მოცემულ სიმაღლეზე მოცემული სისწრაფით;
- თვითმფრინავის მოძრაობის მდგრადობისა მართვის მახასიათებლების გაუჯობესება;
- ძრავების მუშაობის ზედამხედველობას და მართვას ;
- თვითმფრინავის უსაფრთხო და ეფექტურ მართვას;

(ამს) თანამედროვე ზეგერითი სამგზავრი თვითმფრინავების მართვისას უზრუნველყოფს :

- თვითმფრინავის მდგრადობას;
- თვითმფრინავის „ტანგაჟის“ ( დედამიწის მიმართ აწევის ან დაწევის კუთხე) მართვას;
- ტრაექტორიის განსაზღვრის, მოზრუნებების, დაშვების პროცესების მართვას;
- ძრავების წევის სიმძლავრეების ავტომატურ მართვას;
- ნახევრავტომატურ რეჟიმში თვითმფრინავის მართვას;
- თვითმფრინავის უწყვეტობათა შემთხვევაში „მეორე წრეზე“ მოძრაობის უზრუნველყოფას.

გავეცნოთ ზოგიერთი ქვეყნების საბრძოლო თვითმფრინავებს;

დიდი ბრიტანეთი



Sea Harrier



Xok-200



Eurofighter 2000



F-16 Fighting Falcon

B-2 Spirit

F-117 Night Hok

F-22 Rapier

ს შ შ

[< Назад](#)



სამგზავრო თვითმფრინავები  
 ყველაზე დიდი სამგზავრო თვითმფრინავი  
**AIRBUS 380**



Airbus A380 — ფართე ფუზელაჟიანი, ორსართულიანი, ოთხ ძრავიანი სამგზავრო თვითმფრინავი, შექმნილია Airbus S.A.S მიერ - უმსხვილესი სერიული ავიალაინერი მსოფლიოში ( სიმაღლე 24,08 მეტრი, სიგრძე 72,75 მეტრი, ფრთის განშლა 79,75 მეტრი). ტევადობა - 525 მგზავრი სამი კლასის სალონში, 853 მგზავრი ერთკლასიან კონფიგურაციაში. შეუძლია დაჯდომის გარეშე იფრინოს 15 400 კმ-მდე მანძილზე. დახასიათება: აქვს 4 ძრავა. შეუძლია 150 ტ ტვირთის გადატანა 10 370 კმ-მდე მანძილზე. მაქსიმალური ასაფრენი მასა — 560 ტ (თვითონ თვითმფრინავის წონა შეადგენს 280 ტ). დღეს A380 ითვლება ყველაზე დიდ სამგზავრო ავიალაინერად მსოფლიოში, იგი უსწრებს ტევადობით Boeing 747, რომელსაც მხოლოდ 525 მგზავრის გადაყვანა შეუძლია (Boeing 747 36 წლის განმავლობაში ითვლება ყველაზე მსხვილ სამგზავრო ლაინერად მსოფლიოში). დამპროექტებლების თქმით, თვითმფრინავის შექმნისას ყველაზე რთულ ნაწილს შეადგენდა მისი მასის შემცირება.

ამ პრობლემის გადაჭრა მოხერხდა კომპოზიტური მასალების გამოყენებით. ასევე მასის შესამცირებლად გამოყენებული იქნა თანამედროვე ტექნოლოგიები და გაუმჯობესებული ალუმინის შენადნობები. ასე, 11-ტონიანი ცენტროპლანის მასის 40%-ს შეადგენს კარბონი. ზედა და გვერდითა ფილზელაჟის პანელების დასამზადებლად გამოიყენება ჰიბრიდული მასალა „GLARE“ (Glass laminate aluminium reinforced epoxy).

დიდ ლაინერებს შორის ის ყველაზე ეკონომიურია — 3 ლიტრა საწვავი 1 მგზავრზე 100 კილომეტრ მანძილზე. Airbus-ის განცხადებით A380 წვავს 17%-ით ნაკლებ საწვავს ვიდრე თანამედროვე ყველაზე დიდი თვითმფრინავი (ბოინგ 747). შესაბამისად გამოიყოფა ნაკლები CO<sub>2</sub> 1 მგზავრზე გათვლით 1 კილომეტრზე 75 გრამი CO<sub>2</sub>

A380-ის შექმნას დასჭირდა დაახლოებით 10 წელი. მთელი ამ პროგრამის ფასი შეადგენს დაახლოებით 12 მილიარდ ევროს. ამ ხარჯების ანაზღაურებისთვის უნდა გაიყიდოს 420 თვითმფრინავი, მაგრამ ანალიტიკოსების თქმით გაყიდვების რაოდენობა ბევრად დიდი იქნება.

## ბოინგ 747



საშუალო სიგრძის მარშრუტების ძირითადი თვითმფრინავი ბოინგ 737



ანტონოვის ყველაზე დიდი სატვირთო თვითმფრინავები  
ან 225 მრია.



ან 124



შედარება ბოინგ 747 და ან 225-ისა.



### 3.1.3. საავტომობილო მოძრაობის მართვის სისტემები.

<http://lib.madi.ru/fel/fel1/fel16E377.pdf>

**ACC** – სატრანსპორტო საშუალებათა მოძრაობის კონტროლის სისტემა (Adaptive Cruise Control);

**ACS** – მართვის ადაპტური სისტემები (adaptive control system);

**ADAS** – მძღოლების მხარდაჭერის სისტემა (Advanced Driver Assistance System);

**AHS** – მაგისტრალზე მოძრაობის მართვის ავტომატიზებული სისტემა (Automated Highway Systems);

**AHS** – მაგისტრალზე მანქანის მართვის მხარდამჭერი სისტემა (Automated Cruise-Assist Highway Systems);

**AMLCD** –ავტომობილის აქტიურ მატრიცაზე თხევადკრისტალური ეკრანი (დისგლი) (Active Matrix LCD);

**APS** – პარკირების ავტომატური მართვის სისტემა;

**APTS** – საზოგადოებრივი ტრანსპორტის განვითარების სისტემა (Advanced Public Transportation Systems);

**ARQ** – გამეორები ავტომატური სისტემა (Automatic Repeat Request);

**ATIS** – ტურისტების მოძრაობის გაუმჯობესებული საინფორმაციო სისტემა (Advanced Traveler Information Systems);

**ATMS** – მოძრაობის მართვის გაუმჯობესებული სისტემა (Advanced Traffic Management Systems);

**AVCS** – საქალაქო ტრანსპორტის გაუმჯობესებული მართვის სისტემა (Advanced Vehicle Control Systems);

**AVI** – სატრანსპორტო საშუალებების ავტომატური იდენტიფიკაციის სისტემა (Automatic Vehicle Identification);

**AVS-TDC** – სამაშველო სამსახურებისათვის საგზაო შემთხვევის ადგილზე დროული მისვლის გაუმჯობესებული სისტემა (Advancer Video Surveillance-Time to Destination Calculation);

**CACS** – საავტომობილო მოძრაობის კომპლექსური მართვის სისტემა (Comprehensive Automobile Traffic Control System).;

**CARiN** – ავტოტრანსპორტისათვის ნავიგაციის საინფორმაციო სისტემა (Car Information and Navigation).

**CD** – საგზაო შემთხვევის აღმოჩენის სისტემა (Collision Detection);

**CEN** – სტანდარტების ევროპული კომიტეტი (Comité Européen de Normalisation).6;

**CFP** – მოძრაობის ინტენსიურობის განმუხტვის ციკლური გრაფიკი (Cyclic Flow Profile);

**CIR** – მონაცემთა გადაცემის სისწრაფის კომიტეტი (Committed Information Rate);

**CLEOPATRA** – კრიტიკული დროის პარალელური კლასტერი საცობებისთვის (Cluster of Embedded Parallel TimeCritical Applications);

**COSMOS** – ქალაქებში საცობების მართვის სტრატეგია და მეთოდები (Congestion Management Strategies and Methods in Urban Sites);



**CPS** – ავტომობილის ადგილმდებარეობის განსაზღვრის ცენტრალური სისტერმა (Central Positionning System);

**CRT** – ელექტრულ სხივური დისფლები (Catode Ray Tube Displays);

**CSDN** – მონაცემთა გადაცემა კომუტაციური არხებიდან (Circuit Switched Data Network);

**CSMA** – ინფორმაციის მატარებელზე მრავლობითი შეღწევის კონტროლი (Carrier Sense Multiple Access);

**CVO** – კომერციული სატრანსპორტო საშუალებათა მართვა (Comercial Vehicle Operations).;

**DA** – მონაცემთა მიდამო (Data Area);

**DAB** – цифровая передача (Digital Audio Broadcasting).

**DGPS** – GPS -ის ციფრული გადაცემა;

**DGT** – მთავარი სატრანსპორტო დირექცია (Dirección General de Tráfico);

**DLCI** – მონაცემთა გადაცემის არხების მართვის იდენტიფიკატორი (Data Link Connection Identifier);

**DMB** – მულტიმედიური ციფრული მაუწყებლობა (Digital Multimedia Broadcasting);

**DSP** – სიგნალის ციფრული დამუშავება (Digital Signal Processing);

**DSRC** – კავშირი მოკლე მანძილზე (Connection for short distances);

**DSS** – მძღოლთა მხარდამჭერი სისტემა (Driver Support System);

**DTE** – მონაცემთა ტერმინალური მოწყობა (Data Terminal Equipment);

**EDGE** – GSM სისტემის გადაცემათა სიხშირის გაზრდის სისტემა (Enhanced Data Rates for GSM);

**EFC** – სარკინიგზო ტრანსპორტის ევროპული მწარმოებლები (Evropské sdružení výrobců kolejových vozidel);

**EIR** – ვირტუალური ჯაჭვი (Excess Information Rate);

**EL** – ელექტრო-ლუმინესცენსური დისფლეი (Electroluminiscent Display);

**EMC** – ელექტრო მაგნიტური ხარვეზები (ხელშემშლელი) (Electromagnetic defects interference) ;

**EU** – ევროპული კავშირი (European Union);

**FDDI** – ოპტიკურ-ბოჭკოვანი კავშირის არხებით მონაცემთა განაწილებული ინტერფეისი (Fiber Distributed Data Interface);

**FEC** – შეცდომათა წინასწარი კონტროლი (Forward Error Control);

**FIP** – ინდიკაციის ფლოურესცენსული ინდიკაციის „პანელები“ (Fluorescent Indicator Panels);

**FM** – სიხშირული მოდულაცია (Frequency Modulation);

**FR** – კადრების რეტრანსლირება (Frame Relay);

**FRAD** – კადრების რეტრანსლირები შეღწევის მაშრუტირება (Frame Relay Access Device);

**FRND** – კადრების რეტრანსლირების ქსელური მოწყობილობა (Frame Relay Network Device);

**FSK** – სიხშირული მანიპულაციები (Frequency Shift Keying);

**GGSN** – GPRS-ის ქსელის მონაცემთა კვანძი (Gateway GPRS Support Node);

**GNSS** – გლობალური თანამგზავრული ნავიგაციის სისტემა (Global Navigation Satellite

System);

**GPRS** – პაკეტური რადიომომსახურების სისტემა (General Packet Radio Service);

**GPS** – გლობალური პოზიციონირების სისტემა (Global Positioning System);

**GSM** – გლობალური მობილური კავშირგაბმულობის სისტემა (System for Mobile Communication);

**HOV** – ტრანსპორტისათვის პრიორიტეტების მინიჭების სისტემა (High Occupancy Vehicles);

**HSCSD** – მონაცემთა გაზრდილი სისწრაფით გადაცემის სისტემა (High Speed Circuit Switched Data);

**ISO** – სტანდარტიზაციის საერთაშორისო სისტემა (International Standard Organisation);

**ICC** – სატრანსპორტო საშუალებების მართვის ინტელექტუალური სისტემა (Intelligent Cruise Control);

**IN** – ინტელექტუალური ქსელი (Intelligent Net);

**IPIS** – ინტეგრირებული საბორტო საინფორმაციო სისტემა (Integrated onboard information system);

**IR** – ინფრაწითელი (Infrared);

**ISDN** – ციფრული ქსელი კომპლექსურ-ინტეგრალური მომსახურებით (Integrated Services Data Network);

**IT** – ინფორმაციული ტექნოლოგიები (Information technologies);

**ITM** – მოძრაობის მართვის ინტეგრალური სისტემა (Integrated Traffic Management);

**ITS** – ინტელექტუალური სატრანსპორტო სისტემები (Intelligent Transportation Systems);

**IWF** – სტანდარტული მოდემების ნაკრები (Inter Working Function);

**KGT** – მწვანე სიგნალის ხანგრძლივობის დათვლის მოდული (Kernel Green Time);

**LAN** – მონაცემთა ლოკალური ქსელი (Local Area Network);

**LCD** – თხევადკრისტალური დისფლემი (Liquid Crystal Display);

**LED** – სინათლის გამოსხივებიანი დისფლემი (Light Emitting Displays);

**MAN** – საქალაქო ქსელი (Metropolitan Area Network);

**MMI** – интерфейс человек – устройству (Man-Machine Interface).

**MOTION** – ქსელში Online - ურად მართვადი მუქნიშნების ოპტიმიზაციის მეთოდი (Method for the Optimisation of Traffic Signals In On-line controlled Networks);

**MPH** – მილი/სთ (mile per hour);

**OSI** – ღია სისტემების ურთიერთკავშირი (Open System Interconnection);

**OBE** – ტრანსპორტში ჩაშენებული მოწყობილობა (On Board Equipment);

**OBU** – бортовая единица (On Board Unit).

**P+R** – პარკირების სისტემა „გააჩერე და წადი“ (park and ride);

**PDO** – арендуемые каналы передачи данных.

**PI** – показатель неэффективности транспортного движения (Performance Index).

**PIT** – მმართველი საინფორმაციო ტაბლო (Managing information board);

**PPS** – стандарт точного позиционирования (Precise Positioning Standard).

**PRI** – საბაზისო სიჩქარით გადაცემის ინტერფეისი (Primary Rate interface);

**PROMETHEUS** – უმაღლესი ეფექტურობისა და უსაფრთხოების ევროპული ტრანსპორტის მართვის პროგრამა (Pragramme for an European Traffic with Highest Efficiency and Unprecedented Safety in Europe);

**PSDN** – მონაცემთა პაკეტური გადაცემა(Packet Switching Data Network);

**RAM** – ოპერატიულ დამმახსოვრებელი მოწყობილობა (RAM system);

**RD** – რეკონფიგურაციული შესაძლებლობების დისფლეი (Reconfigurable Displays);

**RDS-TMC** – სატრანსპორტო შეტყობინებათა არხი (Traffic Message Channel);

**RLTC** – მოძრაობის მართვის წრფივი სისტემა (Road Line Traffic Control);

**RM** – управление въездом на автомагистраль (Ramp Metering).

**ROMANSE** – ევროპაში ტრანსპორტის მართვის პროექტი (Road Management System for Europe);

**RSE** – მოწყობილობა განლაგებული სავალი ნაწილის ახლოს(Road Side Equipment);

**RTI** – ინფორმაცია მოძრაობის ინტენსივობაზე და სვლაგეზზე (Road and Traffic Information);

**RTP** – რეალური დროის პროტოკოლი(Real Time Protocol);

**RTS** – გადაცემისთვის მზადყოფნა (Request To Send);

**SCADA** – მონაცემთა შეგროვება და დისპეჩერული მართვა (Supervisory Control and Data Acquisition);

**SCATS** – ქ. სიდნეი-ს საავტომობილო მოძრაობის მართვის სისტემა(Sydney Coordinated Adaptive Traffic System);

**SCOOT** – მოძრაობის მართვის SCOOTსისტემა (Split, Cycle and Offset Optimization Technique).;

**SGSN** – GPRS ქსელში მონაცემთა კვანძი (Serving GPRS Suport Node);

**SMDS** – მონაცემთა გადაცემის კომუტატიური მულტიმეგაბიტური სამსახური (Switched Multimegabit Data Service);

**SONET** – სინქრონული ოპტიკური ქსელი (Synchronous Optical Network);

**SONET, SDH** – სინქრონული გადაცემის თანამედროვე სისტემები (Modern systems of synchronous transmission);

**SPS** – ადგილმდებარეობის განსაზღვრის სტანდარტული სამსახური (Standard Positionning Service);

**TDOA** – სიგნალის მიღების დრო (Time Difference of Arrival);

**TEN** – ტრანსევროპული სატრანსპორტო დერეფნების ქსელი (Transeuropean Network);

**TETRA** – შორი მიწისზედა რადიოკავშირის სისტემა (Terrestrial Trunked Radio);

**TFINS** – ტრანსპორტზე ზემოქმედების ინფორმაციული და ნავიგაციური სისტემები (Traffic Flow Information and Navigation System);

**TFIS** – ტრანსპორტის ნაკადზე ზემოქმედების სისტემები (Traffic Flow Information System);

**TIS** – ტრანსპორტის ინფორმაციული სისტემა (Traffic Information System);

**TMC** ტრანსპორტის შესახებ ციფრული ინფორმაციის გადაცემა(Traffic Message Channel);

**TOA** – სიგნალის მოსვლის დრო (Time Of Arrival);

**TPEG** – სატრანსპორტო ნაკადის ექსპერტთა ჯგუფი (Transport Protocol Experts

Group);  
TRL – ტრანსპორტის სამეცნიერო-კვლევითი ბრიტანული ლაბორატორია (Transport Research Laboratory);

### 3.1.4. მართვის სისტემები მეტალურგიულ, ქიმიურ და სხვა ტექნიკურ საწარმოებში.

ყველა თანამედროვე მეტალურგიულ საწარმოში, ამ ეტაპზე ხორციელდება წარმოების სიმძლავრეების სრული მოდერნიზება, ტექნოლოგიური პროცესების მაქსიმალური ავტომატიზებით. ამის განსახორციელებლად საჭიროა ავტომატიზე ბული მართვის სისტემების დანერგვა. განსაკუთრებით ეს ეხება შავი და ფერადი ლითონების მწარმოებელ ქარხნებს. საჭიროა ამ პროცესის განხორციელებისას სისტემური მიდგომა, რაც გამოიხატება ყველა პროცესის მაქსიმალური ავტომატიზირების გზით. ესენია სითბოტექნიკური, ეკოლოგიური, მეტალურგიული, მართვის პროცესები და სხვა, გარდა ამისა უნდა იქნეს უზრუნველყოფილი ოპტიმალური ფუნქციონირება, ყველა ამ რგოლისა. ეს ყველაფერი საბოლოო ჯამში უზრუნველყოფს გამოშვებული პროდუქციის ხარისხის გაუმჯობესებას, ახდენს ხარჯების ეკონომიას ზრდის მწარმოებულობას. მეტალურგიული ქარხნების ფუნქციონირების თანამედროვე მოთხოვნები აგრეთვე გულისხმობს ეკოლოგიური უსაფრთხოების საკითხებს. საბოლოო ჯამში მეტალურგიული წარმოება უნდა ზრუნავდეს არა მხოლოდ ეკონომიურ ეფექტურობაზე, არამედ ეკოლოგიურ უსაფრთხოებაზე. უნდა შემცირებულ იქნას მავნე გამონაბოლქვების შემცირებაზე. მათ შორის აზოტისა და ნახშირბადის ოქსიდების ტექნოლოგიური მტვერისა და სხა.

მეტალურგიულ საწარმოში ავტომატიზებული მართვის სისტემების საშუალებით შესაძლებელია შემდეგი ამოცანების გადაწყვეტა:

1. მთელი საწარმოო პროცესის და ცალკეული ტექნოლოგიური პროცესების რაციონალურ რეჟიმში მართვა;
2. წარმოების მოცემულ რეჟიმში მართვის შენარჩუნება;
3. გამოშვებული პროდუქციის ხარისხის ამაღლება, ზედმეტი დანახარჯების, ავარიული სიტუაციების, ენერგო მარაგების შემცირების და სხვა ხელისშემშლელი ფაქტორების შემცირების გზით.

დამტკიცებულია, რომ გამახურებელი მოწყობილობების ავტომატიზებული მართვის სისტემა ამცირებს საწვავის ხარჯებს 10%-ით. განსაკუთრებით ეფექტურია ყველა ტექნოლოგიური პროცესის მართვა ერთი მართვის ცენტრიდან. ეს ყველაფერი ეხება ნედლეულის მიწოდებას, ლუმელთა კომპონენტებით დატვრთვას, გამომშვებ ხაზებს, აღრიცხვის სფეროს ტექნიკურ კონტროლს და სხა. მეტალურგიულ წარმოებაში სასურველია ავტომატიზებულ იქნას შემდეგი ტექნოლოგიური პროცესები:

1. კოქსოქიმიური პროდუქციის წარმოების;
2. აგლომერაციული კირის წარმოება;
3. მრავლობითი ღუმელის შემცველი დომენური ღუმელის მართვის;
4. ფოლადის დნობის პროცესის მართვის;
5. გამზადებული პროდუქციის გამოშვების პროცესის;
6. დაშტამპვისა და მეტიზური ტექნოლოგიური ხაზის.

ფერადი ლითონების მეტალურგიულ ქარხნებში საჭიროა ავტომატიზებულ იქნას შემდეგი ტექნოლოგიური პროცესები:

1. ალუმინის წარმოება;
2. სპილენძის წარმოება;
3. ტიტანისა და მაგნიუმის წარმოება;
4. თუნუქის წარმოება;
5. ტყვიის წარმოება;
6. ნიკელისა და კობალტის წარმოება.

მიღებული გამოცდილება აჩვენებს, რომ მეტალურგიული წარმოების მართვაში ავტომატიზებული სისტემების გამოყენება ყოველმხრივ ეფექტურს ხდის წარმოებას, რომელიც თანამედროვე ეკოლოგიური უსაფრთხოების გამოწვევებსაც პასუხობს გარდა რენტაბელობისა. დღეს-დღეობით მეტალურგიის სფეროში გამოიყენება უკანასკნელი ტექნიკური მიღწევების ბაზაზე აგებული ავტომატიზებული მართვის სისტემები, რაც მოითხოვს მაღალი კვალიფიკაციის მომსახურე პერსონალს.

**ქიმიური წარმოების** ავტომატიზება ძალიან მნიშვნელოვანი და გადაუდებელი საკითხია. ასეთი ღონისძიება საჭიროა იმისთვის, რომ სრული კონტროლი მივიღოთ როგორც ტექნიკურად რთულ, ასევე საკმაოდ საშიშ და საზიანო წარმოებაზე. კონტროლის ავტომატიზირებული სისტემა საშუალებას იძლევა არამარტო ვაწარმოოთ მაღალი ხარისხის პროდუქტები ამ ინდუსტრიაში, არამედ შეამცირონ ხარჯები, გაზარდონ მომგებიანობა, არამედ უზრუნველყონ ამ წარმოების უსაფრთხოება. ეს უკანასკნელი ხორციელდება არა მხოლოდ ხანძრისა და აფეთქების საშიში ზონების სისტემების მკაცრი ავტომატიზირებული კონტროლის დანერგვით, არამედ ტექნიკური მომსახურე პერსონალის რაოდენობის შესამცირებლად, რის შედეგადაც მხოლოდ ოპერატიული ჯგუფი მუშაობს ობიექტის შეკეთებაზე. ასევე, პროცესის ავტომატიზებული სისტემის წყალობით, შესაძლებელი ხდება ქიმიური მრეწველობის ყველა პროცესის კონტროლი და მონიტორინგი დისტანციურად, ყველა ინფორმაციული მონაცემების და განგაშის სიგნალების მიღებით ინტერნეტში, მობილურ ტელეფონზე და ა.შ. ქიმიურ ქარხანაში მართვის ავტომატიზირებული სისტემის დანერგვის მთავარი სირთულე არის ინფორმაციის ნაკლებობა იმის შესახებ, თუ როგორ მიმდინარებს ყველა უაღრესად რთული ტექნოლოგიური პროცესი ამ წარმოებაში. აქამდე ეს ყველაფერი სათანადო დონეზე არ არის გამოკვლეული და არსებული მონაცემები არ იძლევა სამუშაოს სრულად სტრუქტურირების საშუალებას, რათა ერთდროულად შეიქმნას ავტომატიზებული მართვის სისტემა მთელი საწარმოსთვის.

თანამედროვე ქიმიური მრეწველობის საწარმოებში ავტომატიზირებული მართვის სისტემების უპირატესობებია:

1. მათი გამოყენება ზრდის საბოლოო პროდუქტის ხარისხისა და მისი გარემოს უსაფრთხოების ზუსტი რეგულირების შესაძლებლობას, რაც აკმაყოფილებს ზოგად მსოფლიო სტანდარტებს;
2. აძლიერებს მოწყობილობების სწორი მუშაობის საიმედოობას და დროულად ცნობებს ავარიას ან სხვა სახის გაუმართაობასთან დაკავშირებული საფრთხის შემთხვევაში ოპერატიულ მართვას.

ყველა ქიმიური საწარმოს მუშაობა ემყარება სხვადასხვა ტექნოლოგიურ სქემას, რომელიც ემყარება ამ ინდუსტრიისთვის დამახასიათებელ მეთოდებს და გამოთვლებს. ეს ეხება ყველა ქიმიურ ფორმულას, ზოგიერთი ნივთიერების სხვაში გარდაქმნას, მასალების თვისებების ცვლილებას, მათ სტრუქტურას და ა.შ. ქიმიური ინდუსტრიის იგივე მახასიათებელი საშუალებას იძლევა გამოიყენოს მასში მრავალფეროვანი ნედლეული, რომელიც შესაძლოა ნარჩენებსაც კი მოიცავდეს. ზოგიერთ საწარმოში ქიმიური წარმოების სირთულე იზრდება, რადგან გარდა გადამამუშავებელი ნივთიერებებისა, ისინი იქვე მოიპოვება. მაგალითად, ყველა სამთო და ქიმიური ქარხანა ასეთი საწარმოა. გარკვეული წარმოების დაწყებამდე ისინი დეტალურ გაანგარიშებას აკეთებენ პროდუქტის შექმნის მთელი პროცესის შესახებ. რადგან ქიმიური მრეწველობა ასოცირდება ერთი ნივთიერების მეორეში გარდაქმნასთან, ამის გამო პროდუქტის ხარისხი ექვემდებარება მკაცრ კონტროლს. ასევე, პროცესში შესული ნედლეული ძალიან მკაცრად არის შერჩეული. მხოლოდ ასეთი ავტომატიზირებული სისტემის კონტროლის სისტემა იძლევა საშუალებას მაქსიმალურად ზუსტად მოხდეს ქიმიური წარმოების თითოეული, ცალკეული ეტაპის მონიტორინგი და კონტროლი. ასევე უნდა აღინიშნოს ის ფაქტი, რომ ამს-ს შეუძლია მნიშვნელოვნად დაზოგოს ენერგო ხარჯები, რაც საკმაოდ მაღალია ქიმიურ მრეწველობაში. მთლიანად ქიმიური წარმოების საიმედო და უწყვეტი ფუნქციონირება დამოკიდებულია ელექტროენერგიაზე. ქიმიური მრეწველობა ადამიანის საქმიანობის ერთ-ერთი ყველაზე მავნე სფეროა. თანამედროვე ავტომატიზებული მართვის სისტემა საშუალებას გაძლევთ შექმნათ მკაცრი კონტროლი მომსახურე პერსონალის მუშაობის უსაფრთხოების სტანდარტების დაცვაზე. იმისათვის, რომ ქიმიური საწარმო უსაფრთხო იყოს თავის მუშაობაში, მან უნდა განახორციელოს საწარმოო პროცესი მოცემული ალგორითმის შესაბამისად. ამისათვის მას დროულად უნდა მიეწოდოს ნედლეული და მკაფიოდ უნდა იყოს ორგანიზებული მომსახურე პერსონალის მუშაობა. ყოველივე ეს შესაძლებელია ობიექტის ავტომატიზებული მართვისა სისტემის დანერგვის საფუძველზე. ადამიანის სიცოცხლისა და ჯანმრთელობისთვის მრავალი ქიმიკატის მავნეობის გამო, ქარხანაში მრავალი პროცესი ტარდება მხოლოდ დახურულ ჭურჭელში. ეს ართულებს მომსახურე პერსონალის მიერ მომხდარის პირდაპირ მონიტორინგს. ამს საშუალებას იძლევა მიიღოს ზუსტი მონაცემები მოვლენების მიმდინარეობის შესახებ სპეციალური სენსორებისა და სხვა საზომი მოწყობილობების გამოყენებით. ადამიანის სიცოცხლისა და ჯანმრთელობისთვის მრავალი ქიმიკატის მავნეობის გამო, ქარხანაში მრავალი პროცესი ტარდება მხოლოდ დახურულ ჭურჭელში. ეს ართულებს მომსახურე პერსონალის მიერ მომხდარის პირდაპირ მონიტორინგს. ამს საშუალებას იძლევა მიიღოს ზუსტი მონაცემები

მოვლენების მიმდინარეობის შესახებ სპეციალური სენსორებისა და სხვა საზომი მოწყობილობების გამოყენებით. ასევე ძალიან მნიშვნელოვანია ავტომატიზებული მართვის სისტემის სწორად გამოყენება ხარვეზებისა და საგანგებო სიტუაციების თვალთვალის სფეროში. ეს არის ერთ-ერთი მთავარი სფერო, რომელშიც მხოლოდ საიმედო აძს უნდა იქნას გამოყენებული. ქიმიურ მრეწველობაში წარმოების პროცესების სირთულე მოითხოვს ინტეგრირებული ავტომატიზებული კონტროლის დანერგვას. იგი მოითხოვს უმაღლესი მოთხოვნების ცოდნისა და პროფესიონალიზმს მომსახურე პერსონალისგან. მუშაკებმა პერიოდულად უნდა აიმაღლონ ცოდნა და მიიღონ ახალი ინფორმაცია ქიმიური მრეწველობის სფეროდან. DATASOLUSHN კომპანიამ შეიმუშავა საკუთარი სტრატეგია ქიმიური ქარხნების ავტომატიზებული მართვის სისტემის სფეროში. მის განვითარებაში შედის:

1. უშუალოდ არაორგანული ნივთიერებების, კერძოდ, გოგირდმჟავას, სუპერფოსფატის, ამიაკის და ამონიუმის ნიტრატის წარმოების ავტომატიზება;
2. ორგანული ნივთიერებების პირდაპირი ქიმიური წარმოების ავტომატიზება, რომელშიც შედის აცეტილენი, ბუტადიენი და სტიროლი ეთილბენზოლიდან;
3. ელასტომერებისა და პოლიმერების ქიმიური წარმოების ავტომატიზება. მაგალითად, მაღალი სიმკვრივის პოლიეთილენის, პოლიპროპილენის, სტირონის ბუტადიენის ლატექსი;
4. ბოჭკოების ქიმიური წარმოების ავტომატიზება, რომელთა შორის პირველ ადგილზეა ნეილონი;
5. რეზინის ქიმიური წარმოების ავტომატიზება. მაგალითად, საბურავები მანქანებისთვის და ა.შ.
6. პლასტიკური დამუშავების ქიმიური წარმოების ავტომატიზება.

## თავი 4

### თემა. ბიოლოგიური მართვის სისტემების მაგალითები.

#### 4.1. მართვა ბიოლოგიურ სისტემებში

მეცნიერებისა და ტექნოლოგიის მრავალ სფეროში წარმოიქმნება პრობლემები, რომლის გადაწყვეტა მოითხოვს ტექნიკური საშუალებებისა და ცოცხალი ორგანიზმის ურთიერთქმედების სრულყოფილ შესწავლას. ამ სახის ამოცანები მოიცავს ბიოტექნოლოგიური ტექნოლოგიების შექმნას, მათ შორის ფიზიკური ფაქტორების გავლენა ბიოლოგიურზე ობიექტები, უჯრედის, ქსოვილის, ორგანოს და მთლიანად ორგანიზმის

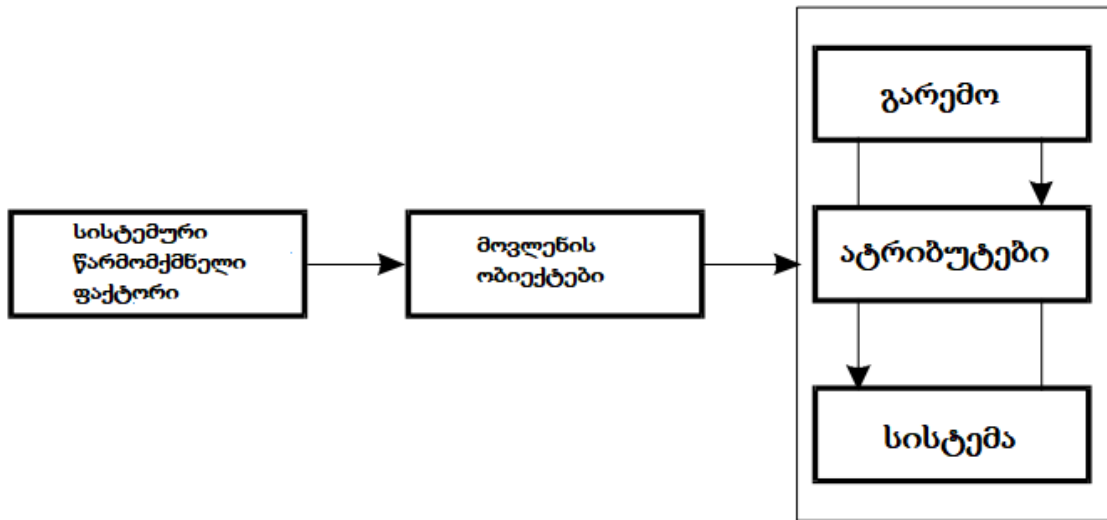
დონეზე, სამედიცინო და ტექნიკური ტექნოლოგიები დაავადებების დიაგნოზისა და მკურნალობისთვის, მათ შორის, ბიოსამედიცინო ტექნოლოგიის ნიმუშების შემუშავება, მანქანების, მართვის სისტემების ეფექტურობის გაზრდა კომპლექსური ტექნიკური ობიექტები, სადაც ადამიანის ფაქტორი განიხილება როგორც სისტემის მაკონტროლებელი რგოლი. ბიოტექნიკური ურთიერთქმედების და ბიოტექნიკური სისტემების სინთეზის საკითხების შესწავლა შესაძლებელია ერთიანი აღწერის საფუძველზე ერთმანეთთან დაკავშირებული ბიოლოგიური და ტექნიკური ობიექტების ქცევის სისტემური ანალიზის, რთული სისტემების თეორიისა და გამოყენებითი ბიოლოგიის თვალსაზრისით. თანამედროვე ბიოსამედიცინო ინჟინერიისა და ბიოლოგიის განვითარებაში შეიმჩნევა ინდივიდის შესწავლიდან გადასვლის ტენდენცია ბიოლოგიური სისტემები რთული სინერგიული სისტემების შესწავლაზე, კონიუგირების ადექვატური მეთოდების დასადგენად ბიოლოგიური ობიექტები ტექნიკური მოწყობილობებით ერთიანად ბიოტექნიკური სისტემებია და ეს მთავარი განმასხვავებელი ნიშანია, რაც მათი გაჩენაა. ბიო-სამედიცინო ინჟინერიის განვითარებაში მნიშვნელოვანი პროგრესის და ბიოტექნიკური სისტემების პრაქტიკაში ფართო გამოყენების მიუხედავად, ამჟამად საჭიროა სისტემატიზაციისა და ერთიანი სამეცნიერო თვალსაზრისისა და პრეზენტაციების შემუშავება. აგრეთვე უნდა შემუშავდეს ბიოტექნიკური სისტემების ანალიზისა და სინთეზის თეორიის ძირითადი მეთოდოლოგიური საფუძველები.

#### **4.2. ბიოტექნიკური სისტემები, როგორც კვლევის ობიექტები.**

##### **ძირითადი განმარტებები.**

"სისტემების" ცნება [გრ. Systeme - მთელი] საერთოდ აქედან გამომდინარე სხვადასხვა ხასიათის ურთიერთდაკავშირებული ობიექტებისა და ფენომენების აღწერაში გამოყენებული ყველაზე ზოგადი ცნებაა. ყველაზე ზოგად შემთხვევაში, სისტემა გაგებულია როგორც ბუნებით ერთმანეთთან დაკავშირებული ელემენტების კომპლექსი, იგი წარმოადგენს გარკვეული ჰოლისტიკური განათლების პროდუქტს და მისი მიზნობრივი ფუნქციის შესრულებას. ბიოტექნიკური სისტემა (**ბტს**) არის ერთიანი სისტემა, ურთიერთდაკავშირებულ ბიოლოგიურ და ტექნიკური ელემენტებისა (ბმულებისა) . **მიზნობრივი ფუნქცია** შეიძლება განვიხილოთ როგორც სისტემის წარმომქმნელი ფაქტორი, რომელიც სისტემაში არსებულ ელემენტებს გამოყოფს მთლიანობისგან განსახილველი ობიექტებისა და ფენომენების მრავალფეროვნება, ე.ი. ფაქტორი სისტემასა და გარემოს შორის პირობითი განსხვავების გათვალისწინებით





ნახ.4.1 გარემოსა და სისტემის კავშირისა და გაცალკევების სქემა

დაავადებების ადრეული დიაგნოზირების მიზნის ფუნქციის განხორციელება, რაც წარმოადგენს (ბტს) სისტემას. იგი იქმნება დაავადებების ადრეული დიაგნოზირებისათვის სამედიცინო დიაგნოსტიკური (ბტს) სისტემის სახით, რომელიც აერთიანებს პაციენტს, საზომ ინსტრუმენტებს სხეულის ფიზიოლოგიური მაჩვენებლებსა და დიაგნოსტიკური საშუალებების, ერთიანობას, რომლის ხარისხი შეიძლება ჩაითვალოს როგორც ექიმად, ასევე ტექნიკურ საშუალებად. სისტემასა და გარემოს შორის ურთიერთქმედების რაოდენობრივი საზომი ხასიათდება სისტემის პარამეტრებით, როგორც გარე პარამეტრები. სისტემები შეიძლება ჩაითვალოს მონაცემთა შეყვანის მოქმედებებად, პარამეტრების გარემოდ, სისტემიდან გამომავალ რეაქციებად. სისტემა შედგება ელემენტებისგან (ბმულებისგან), რომლებიც გაგებულია, როგორც ზოგიერთი ფუნქციურად სრული ერთეული, რომელსაც ახასიათებს მრავალი საკუთარი ატრიბუტი, რომელთა გაზომვაც შესაძლებელია. ან სისტემის ელემენტების ურთიერთქმედების შეფასებად და დახასიათება. სტრუქტურა გაგებულია, როგორც სისტემის იმ ელემენტებს შორის კავშირების დროის უცვლელი ფიქსატორი, რომელშიც ხორციელდება კავშირის პარამეტრებს შორის. ქვევა ნიშნავს სისტემის მოქმედებას დროში, ახასიათებს ცვლილება სისტემაში დრო მისი პარამეტრია. სისტემას აქვს გარკვეული მახასიათებელი თვისებები, რომლებიც განასხვავებს სისტემას ურთიერთდაკავშირებული ელემენტების მარტივი ერთობლიობისაგან. სისტემის ძირითადი მახასიათებელია გაჩენა (ინგლისური emergence - გაჩენა, ახლის გაჩენა), რომელიც განსაზღვრავს სისტემის თვისებებსა და მასში შემავალ პარამეტრებს შორის განსხვავების ხარისხს. სისტემას აქვს ისეთი თვისებები, რომლებიც არ არის მოცემული სისტემის ცალკეულ ელემენტებში. სისტემის მიზნობრივი ფუნქციის განხორციელებისას ვლინდება მისი წარმოქმნის თვისებები, ვინაიდან ამ ფუნქციას შეუძლია განხორციელოს ურთიერთკავშირი სისტემასა და ელემენტებს შორის. მაგალითად, სამედიცინო დიაგნოსტიკური (ბტს) მართვის სისტემის გამოჩენით შეიძლება საძლებელი გახდეს დაავადებების ადრეული გამოვლენის, ინფექციების გავრცელების შეზღუდვის, პაციენტების მკურნალობის ღირებულების შემცირების და ა.შ. პერსპექტივები, ელემენტების ურთიერთკავშირის წყალობით, ამ

სისტემას თან ახლავს დაავადების დიაგნოზირების და დასახული მიზნის იმ ფუნქციის განხორციელება, რომლებიც არ ახასიათებს სისტემის ცალკეულ ელემენტებს. სისტემის სირთულე განპირობებულია არა მხოლოდ მისი ელემენტების რაოდენობის ზრდით და მათ შორის კავშირებით, არამედ ძირითადად იმ ელემენტებით, რომლებშიც გადაწყვეტილების მიღების თანდაყოლილი აქტით (ალტერნატივების არჩევა). სისტემის სირთულის ზრდასთან ერთად, მისი აგების სირთულეც იზრდება. ასე რომ, სამედიცინო დიაგნოსტიკურ (ბტს)– ში იზრდება სხეულის მდგომარეობის განმსაზღვრელი ფიზიოლოგიური პარამეტრების რაოდენობა და ალგორითმის მრავალგანშტოებადობა დიაგნოზური გადაწყვეტილების მისაღებად (იზრდება ალტერნატივების რაოდენობა). (ბტს)–ზე ორიენტირებული სამედიცინო სისტემების გამოყენებულ სახელმწიფოთა რაოდენობა განუხრელად იზრდება. კომპლექსურ სისტემებს, მაგალითად, ბიოსისტემებს, აქვთ მიზანმიმართული ქცევა, ე.ი. სისტემის შეუძლია მიაღწიოს სასურველ მდგომარეობას. სისტემის სირთულე განისაზღვრება არა მხოლოდ მისი ელემენტების რაოდენობის ზრდით და მათ შორის კავშირებით, არამედ ძირითადად იმ ელემენტებით, რომლებშიც გადაწყვეტილების მიღების აქტი თანდაყოლილია (ალტერნატივების არჩევა). სტაბილურობა ხასიათდება სისტემის უნარით გაუძლოს გარე დარღვევებს თვითგადარჩენისთვის. მარტივი ტექნიკური სისტემებისთვის განისაზღვრება სტაბილურობა სტრუქტურული მთლიანობა, ენერგეტიკული ბალანსი. რთულ

სისტემებში, სტაბილურობა შენარჩუნებულია ელემენტების უწყვეტი ჩანაცვლებით. ასეთი პროცესები დამახასიათებელია ბიოლოგიური სისტემებისთვის.

თუ მარტივი ფიზიკური სისტემების მდგრადობა მცირდება სირთულის ზრდასთან ერთად, ბიოლოგიური სისტემების სტაბილურობა იზრდება. საილუსტრაციოდ, საკმარისია აღვნიშნოთ **ფორესტერის ფენომენი**, რომლის მიხედვითაც დედამიწაზე უმაღლესი ორგანიზმების უჯრედების გავრცელება აღემატება ქვედა არსებების გავრცელებას. ფორესტერმა ეს ახსნა რთული სისტემების სტაბილურობით. არაიდენტურობას ახასიათებს სისტემებს შორის ერთი სახის განსხვავებების ხარისხს. განსხვავების ხარისხი იზრდება სისტემების სირთულეებთან ერთად. პოპულაციების არაიდენტიფიკაცია აჭარბებს პოპულაციაში ადამიანის სხეულის ფიზიოლოგიურ სისტემებში არსებულ სხვაობას, რაც,

კერძოდ, ხსნის ორგანოების გადანერგვის შესაძლებლობებს დაერთი ორგანიზმის ქსოვილის გადაცემას სხვა ორგანიზმში. რეალური ელემენტებისგან შემდგარი მატერიალური სისტემების გარდა, შეიძლება განვიხილოთ ციფრული სისტემები. ციფრული სისტემები ასახავენ (ამოდელირებენ) რეალურ სისტემებს. სისტემების თეორია რეალურად არსებული სისტემების ფორმალიზებული (მათემატიკური) მოდელების თეორიაა. ნებისმიერი ობიექტის შესწავლისას

შეიძლება გამოიყოს ორი არსებითი ასპექტი, რომელსაც წინა პლანზე აქვს ცოცხალი ორგანიზმის არსის მნიშვნელობა, მისი ინტერპრეტაცია, მიზნები,

ღირებულებები და ა.შ. მათში ვლინდება სისტემის ატრიბუტებს შორის კავშირურთიერთობები. სისტემების თეორია იკვლევს განსახილველი მოვლენების მეორე, ფორმალურ ასპექტს. ცხადია, ეს ფორმალური ურთიერთობები უცვლელია განხილული რეალური სპეციფიკური თვისებების მიმართ. გამოიყენება სისტემები სრულიად განსხვავებული ელემენტებით. განიხილებიან სოციალური, ბიოლოგიური და

ტექნიკური სისტემები ან სისტემები, რომლებიც მოიცავს ურთიერთდაკავშირებულ ტექნიკურ, ბიოლოგიურ და სხვა ობიექტებს. ზოგადად სისტემების თეორია ემყარება ორ ფუნდამენტურ წინაპირობას:

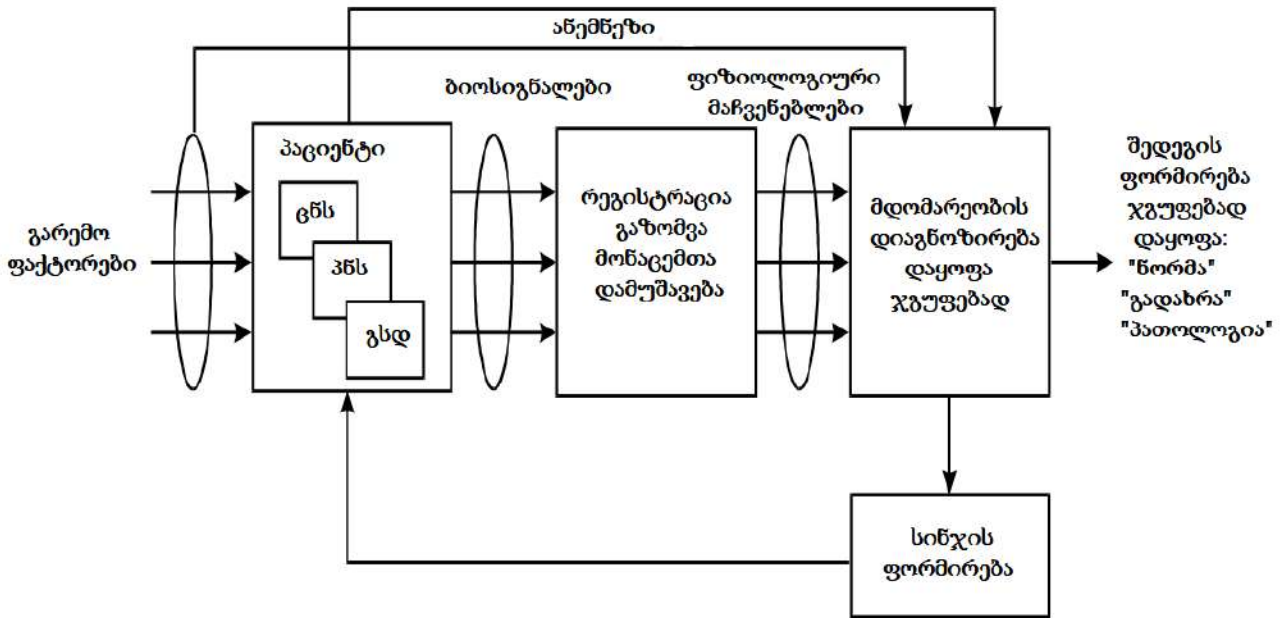
1. ნებისმიერი რეალური მოვლენა ყოველთვის ემყარება რაიმე რეალურ მოცემულობას (მოდელს).
2. ამ მოდელის ფორმალური, რეალური ასპექტები შეიძლება იყოს წარმოადგენს მის ატრიბუტებს მათემატიკური თანაფარდობის (ფორმულების) სახით.

როგორც წესი, რეალური ფენომენის, ობიექტის მათემატიკური მოდელია იმეზნება განტოლებების სახით (სხვაობიანი, დიფერენციალური და ა.შ.), სისტემის ატრიბუტებზე აგებული. ყველაზე ხშირად პრაქტიკაში არსებობს სისტემის ისეთი ამოცანა, რომელსაც ახასიათებს სტრუქტურა, რომელიც გულისხმობს შემავალი და გამომავალი ცვლადების არსებობას, მისი შინაგანი მდგომარეობისა და ქცევის აღმწერი პარამეტრებიანად. ამ შემთხვევაში, სისტემა შეიძლება წარმოდგენილი იყოს, როგორც:

$$Y = F \{X, V\}$$

სადაც: **X** - სიგნალებია შესასვლელზე (გავლენა); **Y** - გამომავალი სიგნალები (რეაქციები); **V** - საკუთრივი პარამეტრები; **F** {\*} არის ფუნქციური ტრანსფორმაციის ოპერატორი, რომელიც განსაზღვრავს სისტემის ქცევას. სისტემის მდგომარეობა განისაზღვრება საკუთარი პარამეტრების ან მიღებული ინდიკატორების მნიშვნელობებით. ხშირად წარმოდგენილია მდგომარეობის ვექტორის კონცეფცია, რომელიც ნაჩვენებია მდგომარეობების ფაზური სივრცის გამოყენებით. ზომისა და პოზიციის შეცვლა ვექტორისა ნიშნავს, სისტემის გადასვლას ერთი მდგომარეობიდან მეორეში. სისტემები, რომლებსაც შეუძლიათ არსებული მდგომარეობის შეცვლა ზეგავლენის მომენტში დინამიური სისტემები ეწოდებათ.

მოდით, უფრო დეტალურად გავეცნოთ სტრუქტურას სამედიცინო დიაგნოსტიკური (**ბტს**) სკრინინგი, რომელსაც აქვს მიზნის ფუნქცია ადრეული დიაგნოზირებისთვის, გამოკვლეული სუბიექტების მგრძობელობის შესამოწმებლად გულ-სისხლძარღვთა დაავადებების მიმართ. (**ბტს**) - ის მიზნის ფუნქციის მოძებნას ახორციელებს გულსისხლძარღვთა ფუნქციური ცვლილებებაზე გამოკითხულთა დიაგნოზირების სისტემა და გამოკითხული ჯგუფების დიფერენციაცია: "ნორმა" (ნორმალური მდგომარეობის არარსებობა), "გადახრა" (სავარაუდოდ ნორმიდან გადახრის არსებობა), "ცვლილება" (დაზუსტებული ცვლილების არსებობა). ეკონომიკურად განვითარებულ ყველა ქვეყანაში გულსისხლძარღვთა სისტემის პათოლოგია არის სიკვდილიანობის მთავარია მიზეზი. აგრეთვე ეს დაავადებები იწვევენ დროებით ან მუდმივ ინვალიდობას რაც ქვეყნებისათვის გარკვეული ეკონომიკური ზარალის ტოლფასია.



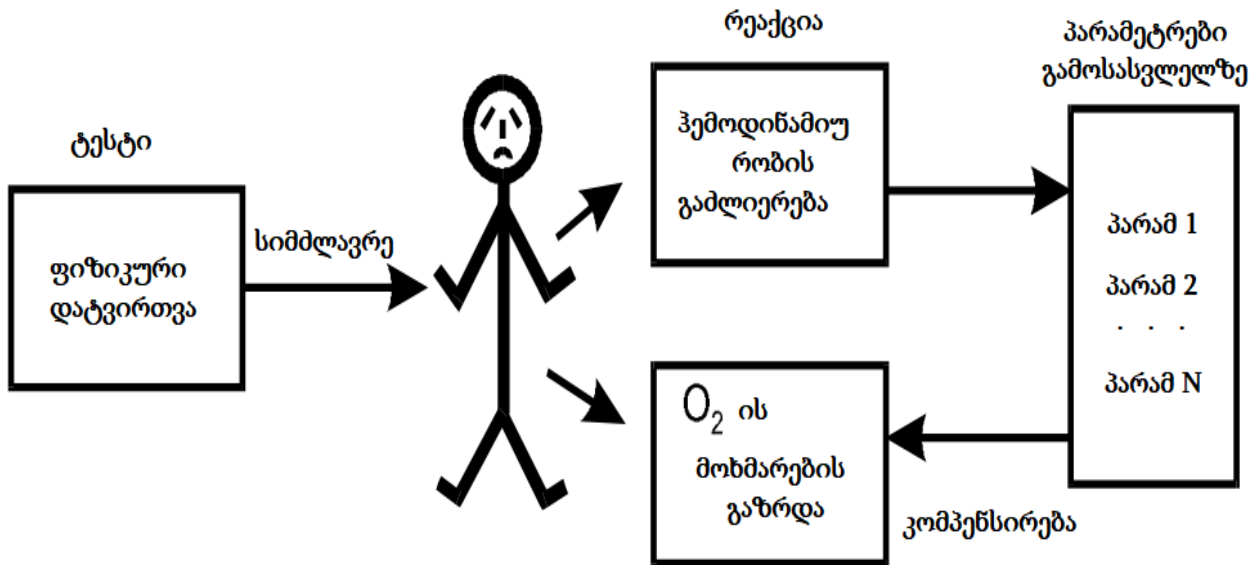
ნახ.4.2 ბტს სისტემის გამოყენებით სკრინინგის სამედიცინო-დიაგნოზირების სტრუქტურულ-ფუნქციონალური სქემა

შემოკლებათა განმარტება:

- ცნს - ცენტრალური ნერვული სისტემა;
- პნს - პერიფერიული ნერვული სისტემა;
- გსდ - გულ-სისხლძარღვთა დაავადებები.

თუ ექიმი დიაგნოზს უსვამს პაციენტის მდგომარეობას, მაშინ ფიზიოლოგიური მაჩვენებლების ბტს სისტემისათვის მიწოდებისა და ჩვენების მეთოდების გათვალისწინებით, საშუალება გვეძლევა განვახორციელოთ ექიმის დიაგნოზისათვის საჭირო თინფორმაციის აღქმა, მიღება, დამუშავება და მონაცემების შემდგომი გამოყენება მკურნალობის ოპტიმალური მეთოდის შერჩევაში. ახლა უფრო დეტალურად განვიხილოთ ბტს - ის სისტემის, გამოყენებით, ფიზიოლოგიური ტესტის - დოზირებული ფიზიკური დატვირთვის ნიმუში. ადამიანის სხეულზე ფიზიკური დატვირთვა განსხვავებულად მოქმედებს გულსისხლძარღვთა სისტემაზე, რაც იწვევს კერძოდ, გულისცემის, არტერიული წნევის ზომიერ მომატებას ,გულის მუშაობის ინტენსივობის ზრდა და შესაბამისად, მიოკარდიუმის მოთხოვნა ჟანგბადზე (დანარჩენთან შედარებით იზრდება 8 ... 10-ჯერ). ჯანმრთელ ადამიანში ეს იწვევს კორონარული გემების ადეკვატურ გაფართოებას (სისხლის მიმოქცევა შეიძლება გაიზარდოს 5 ... 7-ჯერ) და კუმშვადობის ზრდას. სქემატურად ეს შეიძლება გამოვსახოთ ასე:

იხილე ნახ.4.3



ნახ.4.3 ტესტი ფიზიკურ დატვირთვაზე

პარამ 1, პარამ 2, ..., პარამ N - შეიძლება იყოს არტერიული წნევა (აწ), გულის კუნთის შეკუმშვის სიხშირე (გკშს), სისხლის მოცულობა წუთში (სმწ) და ა.შ.

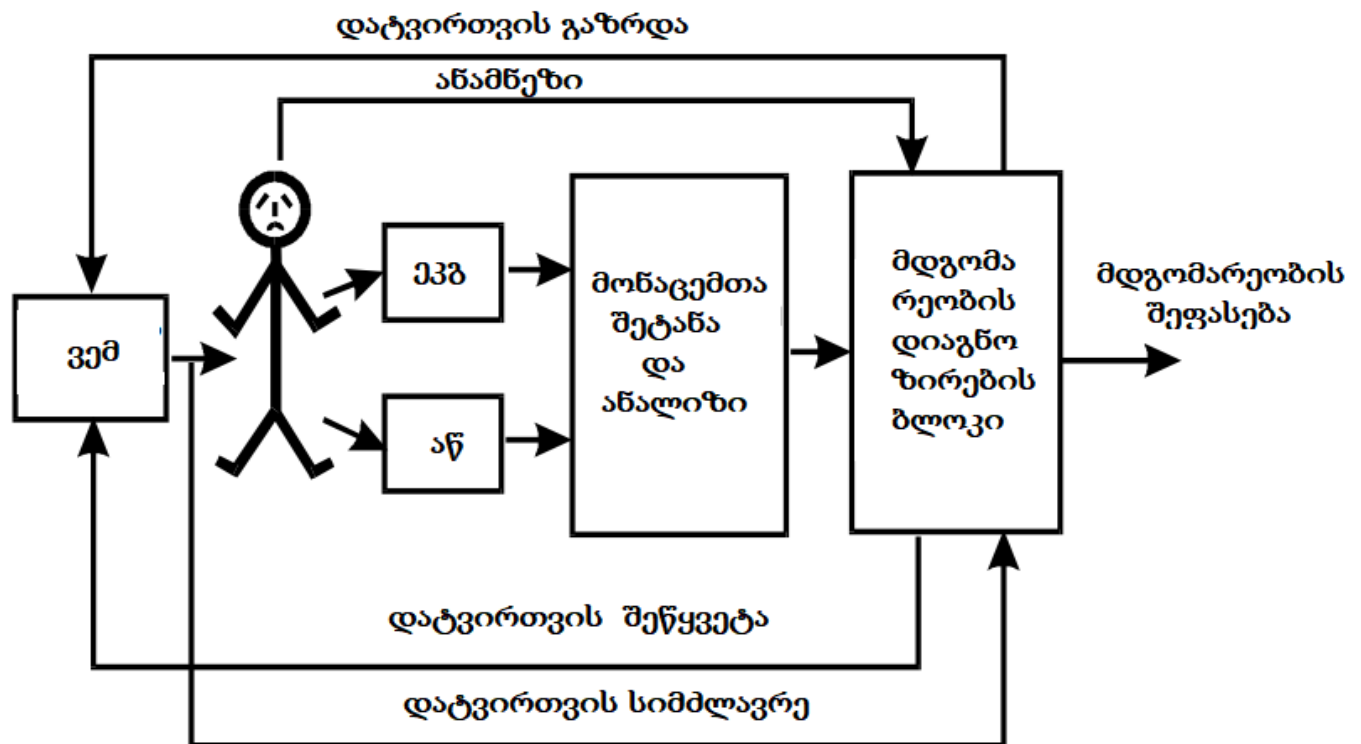
გულ-სისხლძარღვთა სისტემაში პათოლოგიური ცვლილებების გამოვლენისას აღინიშნება სხეულის ტოლერანტობის შემცირება ფიზიკური დატვირთვის მიმართ. კორონარული შეზღუდვისას ცირკულაცია, მაგალითად, ათეროსკლეროზული გამო შეიძენება კორონარული არტერიების ცვლილებები, მიოკარდიუმის მოთხოვნილების ზრდა ჟანგბადზე იწვევს მწვავე კორონარულ უკმარისობას, რომელსაც თან ახლავს სტენოკარდიის შეტევის შესაძლებლობა გულის კუნთში, იშემიის ადგილები, რაც გამოიხატება კარდიოგრამაში ცვლილებებით. გამოიყენება დოზირებული სავარჯიშო ტესტებები. ყველაფერი ამ ფუნქციების ავტომატიზება შესაძლებელია თანამედროვე ბიო-ტექნოლოგიური სისტემებით (ბტს). დოზირებული ფიზიკური აქტივობის ფორმირება შეიძლება განხორციელდეს ველოერგომეტრის გამოყენებით. ამ მოწყობილობაში პედლების ბრუნვის ფიქსირებული სიჩქარე (ჩვეულებრივ 60 ბრუნვა), დატვირთვის სიმძლავრე განისაზღვრება ელექტრული დამუხრუჭების როტაციით, რომლის დაყენება შესაძლებელია საჭირო დიაპაზონში ჩამრთველის გამოყენებით. ხშირად, დატვირთვა იზრდება ეტაპობრივად, დაწყებული 25 ვტ – დან, 3 ... 5 წთ, მიაღწევს 150 ვტ-ს. სპორტსმენების შემოწმებისას დატვირთვა შეიძლება 800 ვატამდე გაიზარდოს. კლინიკური დაკვირვების შედეგად, მაქსიმალური დასაშვები სიმძლავრის მიღწევის შემდეგი ნიშნების დროს ხდება ველოსიპედის ერგომეტრიული ტესტის შეჩერება:

- გულის მაქსიმალური სიხშირის მიღწევა;
- არტერიული წნევის მომატება 230/130 მმ.ვწყ.სვ.;
- სტენოკარდიის შეტევის დადგომა;
- ქოშინი, ზოგადი სისუსტე, თავბრუსხვევა;
- საგნის უარი ნიმუშის ჩატარებაზე;

- ს-ტ ელექტრო კარდიო გრამის (ეკგ) სეგმენტის გადაადგილება 0.1 მგ-ზე მეტ მნიშვნელობამდე
- ხშირი (1:10) ექსტრასისტოლის გამოჩენა, პაროქსიზმული ტაჰიკარდიის, მოციმციმე არითმიის, წინაგულების ფიბრილაციის ;
- ეკგ-ს QRS კომპლექსის ფორმის შეცვლა.

მიზნობრივი ფუნქციის შესაბამისად, გათვალისწინებული სისტემა უნდა შეიცავდეს ველოსიპედის ერგომეტრს - გამზომი მოწყობილობის დატვირთვებს, ფიზიოლოგიური პარამეტრების გაზომვისა და ანალიზის მოწყობილობებს: გულისცემის, არტერიული წნევის, ეკგ ეკრანი და ანალიზის სისტემებს. ერგომეტრიული ტესტი იწყება დატვირთვის მინიმალური მნიშვნელობიდან. თუ მონაცემთა ანალიზი აჩვენებს, რომ ნიშნები არ არსებობს ტესტის დასრულებამდე, მაშინ დატვირთვა იზრდება ეტაპობრივად. მაქსიმალური დატვირთვის ნიშნების მიღწევისას, შემოწმება ჩერდება :

- მაღალი ტოლერანტობა  $P_{max} > 150$  ვტ
- საშუალოდ  $100 W < P_{max} < 125 W$
- დაბალი  $P_{max} < 75$  ვტ

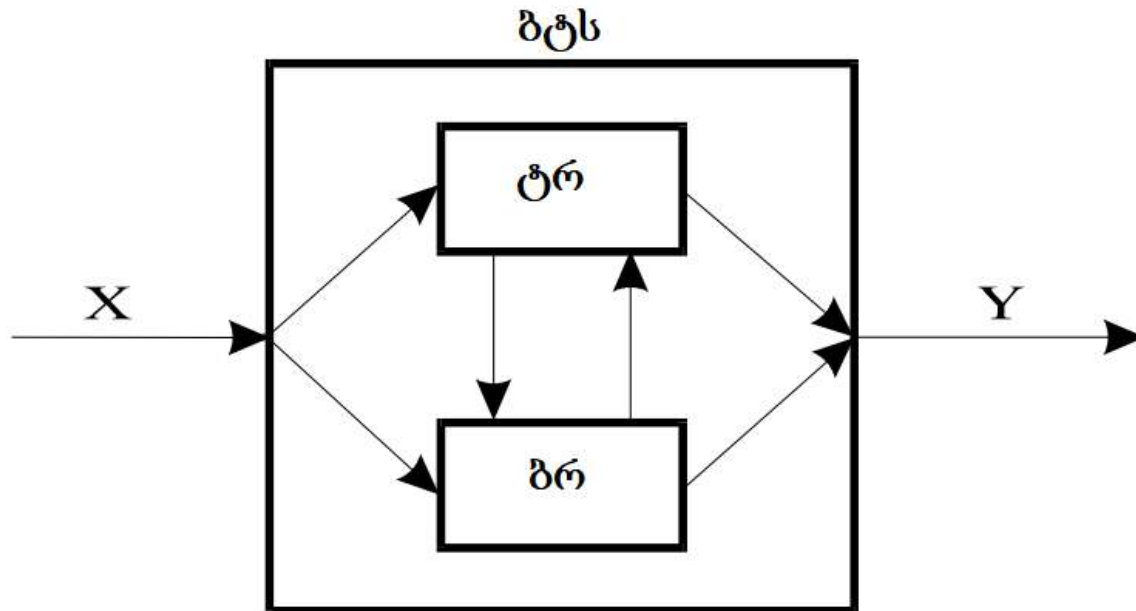


ნახ. 4.4. სამედიცინო დიაგნოზირების სისტემა ველოერგომეტრის გამოყენებით

ნახაზზე მოცემული შემოკლებების განმარტება:

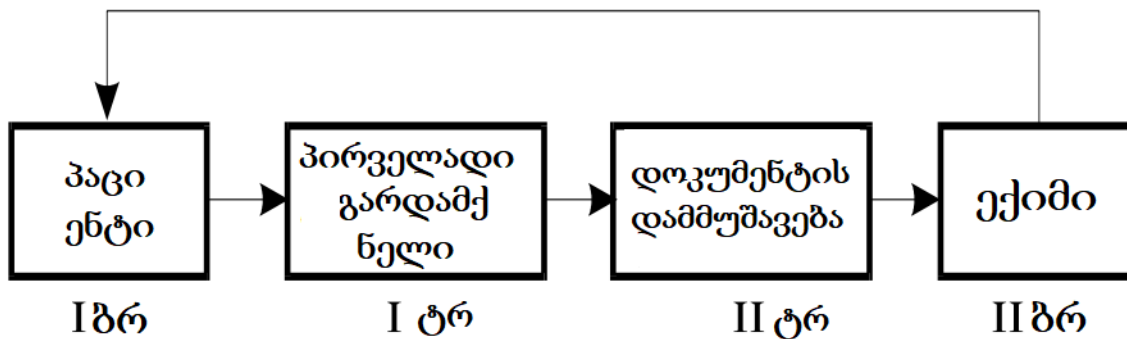
- ვემ - ველო ერგო მეტრი;
- ეკგ - ელექტრო კარდიო გრამა;
- აწ - არტერიული წნევა.

სისტემების ზოგადი თეორიაზე დაყრდნობით, ბტს თეორია იკვლევს ურთიერთქმედების სახეებს ტექნიკურ საშუალებებსა და ცოცხალ ორგანიზმებს შორის მათი საერთო აღწერილობის საფუძველზე. ბტს-ის კვლევის ძირითადი ამოცანები ტექნიკური და ბიოლოგიური კავშირების ოპტიმიზაციაა, სისტემის მიზნის ფუნქციის შესრულების საუკეთესო შედეგია, ფორმირება მოთხოვნები აღჭურვილობის დიზაინის, დამუშავების მეთოდების მიმართ სიგნალები, კონტროლის ალგორითმები ბიოლოგიური ობიექტების მდგომარეობისთვის დასადგენად და ა.შ. ნახ.4.5. -ზე მოცემულია ბტს სისტემის ზოგადი სქემა



ნახ.4.5. ბტს (ბიო-ტექნიკური სისტემის) ზოგადი სქემა

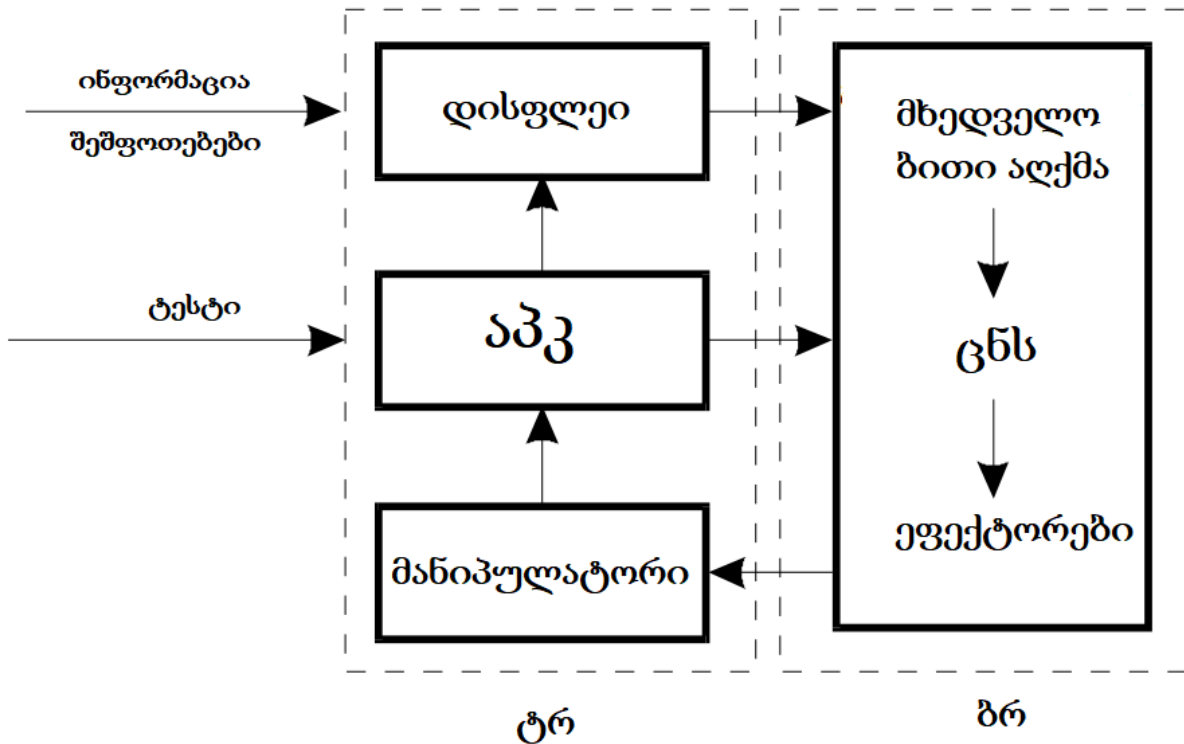
**ტრ** - ტექნიკური რგოლი, **ბრ** - ბიოლოგიური რგოლი, **X** - ინფორმაცია (მონაცემები) შესასვლელზე, **Y** - ინფორმაცია (მონაცემები, დასკვნები) გამოსასვლელზე.



ნახ.4.6. ბტს-ის სამედიცინო დიაგნოზირების ზოგადი სქემა

**ბტს** - ბიო-ტექნიკური სისტემა, **ბრ**- ბიოლოგიური რგოლი, **ტრ** - ტექნიკური რგოლი.

ნახ.4.6-ზე გამოსახულია ბტს-ის ოპერატორის მოქმედების სქემა



ნახ.4.6. ბტს-ის ოპერატორის მოქმედების სქემა

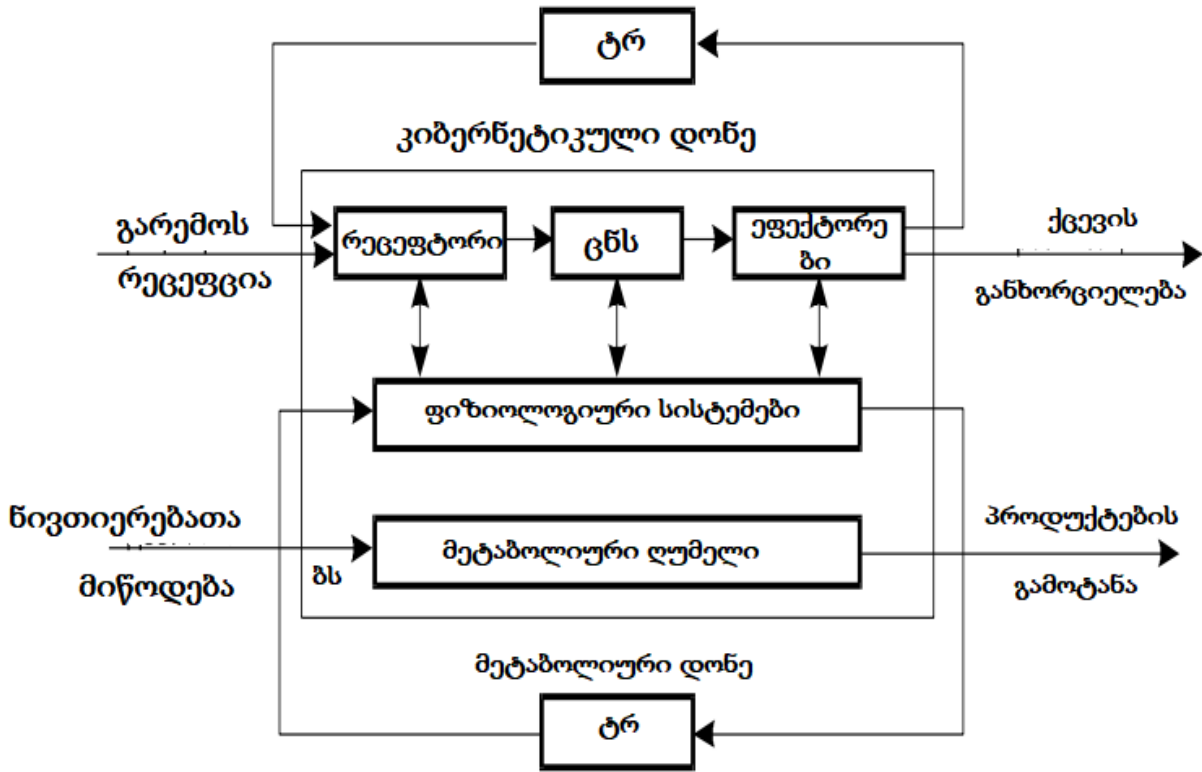
**აპკ** – აპარატურულ-პროგრამული კომპლექსი, **ცნს** –ცენტრალური ნერვული სისტემა.

**ბტს**– ის შესწავლის ყველაზე მნიშვნელოვანი ეტაპია ბიოლოგიური ეტაპი, რომელიც განსაზღვრავს BPS– ის ბიოლოგიურ კავშირს. მოდით, აღვნიშნოთ ცოცხალი ორგანიზმის თავისებურებები, რომლებიც ვლინდება მისი BPS– ის რგოლად განხილვისას.ფონ ბერტალანფის განმარტებით, ცოცხალი ორგანიზმები არის ღია სისტემები, რომელშიც კონტროლდება ინფორმაციისა და ნივთიერების გაცვლა გარემოსთან. ცოცხალი ორგანიზმის BPS– ის რგოლად განხილვისას შეიძლება განასხვაგონ სერია მისი ფუნქციები უზრუნველყოფს გარემოსთან ურთიერთქმედებას

- ინფორმაციასთან დაკავშირებული კიბერნეტიკული ფუნქციები გარემოსთან ურთიერთქმედება, ადეკვატური შერჩევა და განხორციელება ქცევის ფორმები;
- მეტაბოლური ფუნქციები, რომლებიც დაკავშირებულია ენერგიასთან და ქცევის ფორმების სუბსტრატის უზრუნველყოფა.

ქვემოთ,ნახ. 4.7 მოცემულია **ბტს**-ის ტექნიკური და ბიოლოგიური რგოლების კავშირის სტრუქტურული სქემა





ნახ.4.7. ბტს-ის ტექნიკური და ბიოლოგიური რგოლების კავშირის სტრუქტურული სქემა

### 4.3. მართვა ეკონომიკურ სისტემებში.

თანამედროვე ეკონომიკური სისტემები და პროცესები, სამრეწველო წარმოება იმდენად რთული და მრავალმხრივია, რომ მათი შესწავლისთვის საჭიროა მათემატიკური მოდელირების, მართვის ავტომატიზებული სისტემები წარმოადგენენ მშპლავრ სამეცნიერო და პრაქტიკული კვლევის საშუალებას. ეს პირველ რიგში განპირობებულია იმით, რომ მათემატიკური მეთოდები და მართვის მოდელები აადვილებენ ეკონომიკური ობიექტების ფორმალიზებულ აღწერას, გადაწყვეტილების ავტომატურად მიღებას ყველაზე რთულ ეკონომიკურ სიტუაციებში და მენეჯმენტური გადაწყვეტილებების ფორმირებას, რაც საბოლოო ჯამში იწვევს ეკონომიკური სისტემების ეფექტურ ფუნქციონირებას. მართვა და მათემატიკური მოდელირება უკიდურესად თამაშობს მნიშვნელოვან როლს ადამიანის ნებისმიერი საქმიანობის ორგანიზებაში, ეს არის თანამედროვე ეკონომიკური მეცნიერების შეუცვლელი ელემენტი, როგორც მიკრო, ისე მაკრო დონეზე. ეკონომიკური სისტემების მართვის საკითხები დადის ფუნდამენტურ ეკონომიკურ და მათემატიკური ამოცანების კომპიუტერული მართვის მოდელებზე, რის საფუძველსაც წარმოადგენს ანალიტიკური პრობლემების გადაჭრის თანამედროვე ავტომატიზებული მართვის საკითხებზე. ეკონომიკის მართვის საკითხები მჭიდროდ არის დაკავშირებული ეკონომიკაში მათემატიკური მოდე-

ლების აგებასთან, ხშირ შემთხვევაში ეს პირდაპირ კავშირშია სტატისტიკური მონაცემების ანალიზთან, რომლის მოპოვება ხშირად მოითხოვს დიდ მატერიალურ და დროულ ხარჯებს. ამიტომ, ეს საკითხი მოითხოვს ღრმა ცოდნა როგორც ეკონომიკის, ასევე მათემატიკისა და სტატისტიკის მიმართულეებით და საბოლოო ჯამში კომპიუტერული მოდელირებისა და კომპიუტერული მართვის საკითხების ღრმა ცოდნას. ეკონომიკის მოდელირების რეალური ობიექტები მათი სირთულის თვალსაზრისით აღემატება ფიზიკური ბუნების ბევრ ობიექტს. ამასთან, გადამოწმება ეკონომიკური და მათემატიკური მოდელების ადეკვატურობისა ძალიან რთულია რადგან ექსპერიმენტი ეკონომიკური სისტემის მართვის შემოწმების თვალსაზრისით რთულია, რადგან პრაქტიკული ექსპერიმენტი ხშირად ასოცირდება კოლოსალურ ხარჯებთან და ამიტომ ყოველთვის არ არის შესაძლებელი.

ეკონომიკური სისტემების მართვის საკითხებში, როგორც აღვნიშნეთ უმნიშვნელოვანესია ეკონომიკური ობიექტის ფორმალიზებული აღწერის და მისი მათემატიკური მოდელის შექმნის ეტაპი.

**მოდელი** - რეალური სისტემის (ობიექტის, პროცესის) არის ობიექტის ფორმალიზებული წარმოდგენა, რომელიც ობიექტის თვისებებს მის რეალურ სახეს ცვლის მათემატიკური ფორმულებისა და ფორმულებით აღწერილი სხვადასხვა მოდელებით. ეს მოდელები უმნიშვნელოვანეს როლს თამაშობენ ეკონომიკური სისტემების მართვის იგივე მენეჯმენტის საკითხებში.

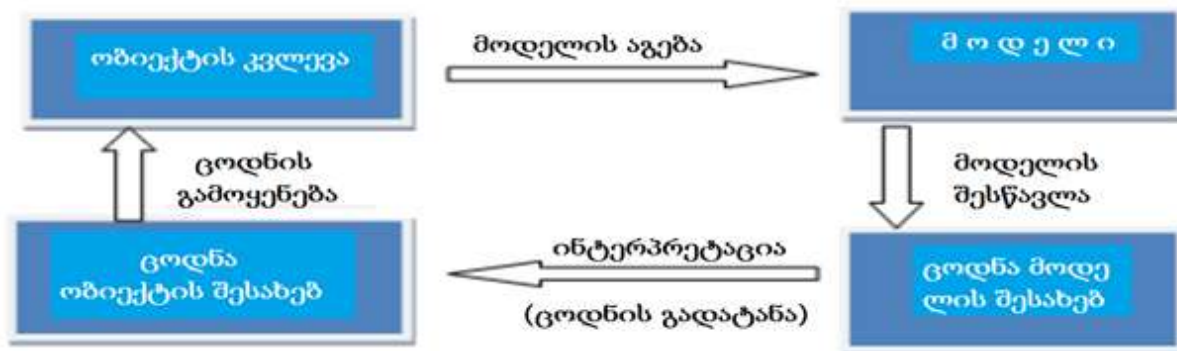
**მათემატიკური მოდელი** - არის მათემატიკური განტოლებების, უტოლობების, ფორმულებისა და სხვადასხვა მათემატიკური ინსტრუმენტებით აღმწერილი სისტემა ანუ რეალური ობიექტი, მისი შემადგენელი მახასიათებლები და ურთიერთკავშირი ერთმანეთთან. მათ მათემატიკური მოდელის აგების პროცესს **მათემატიკური მოდელირება** ეწოდება. ზოგადად მოდელირების თეორიაში თავად მოდელირება არის ერთი აბსტრაქტული მათემატიკური სტრუქტურის, მეორის საშუალებით ასახვის შედეგი. ასევე იგი წარმოადგენს აბსტრაქტული, ანუ **პირველადი მოდელის** ტერმინებში და სურათებში ინტერპრეტირების პროდუქტს. **მეორე დონის მოდელირება** ემყარება ანალოგიის პრინციპს, ე.ი. რეალური ობიექტის (სისტემის) შესწავლის შესაძლებლობას არა პირდაპირ, არამედ ირიბი მიმართებით, მსგავსი და უფრო ხელმისაწვდომი ობიექტის (მოდელის) გათვალისწინებით. ამრიგად, მოდელის აგების პროცესი, ძირითადად ემყარება ობიექტის შესწავლასა და მის მაქსიმალურად მიახლოებულ ფორმალიზირებული აღწერის პრინციპებს. **მოდელირების მიზანია** მენეჯმენტის ეფექტურობის გაუმჯობესება ეკონომიკური სისტემის მმართველობის სხვადასხვა ეტაპზე. ეკონომიკური მენეჯმენტი ხორციელდება მაკრო- და მიკროეკონომიკურ დონეზე. **მაკრო დონეზე** - მართვის ობიექტებია მთლიანობაში ეროვნული ეკონომიკა, მრეწველობა, აგრეთვე საკუთარი და სხვა ქვეყნების მართვის გლობალური სექტორებია. ეკონომიკა, **მიკრო დონეზე** - საწარმოები და ბაზრები. ეკონომიკური ობიექტის მათემატიკური მოდელის აგება საშუალებას იძლევა განხორციელდეს წარმოების პროცესების ეკონომიკური ანალიზი მათემატიკურ მოდელებზე დამყარებული **მართვის სისტემების** გამოყენებით ეფექტური გადაწყვეტილების მიღების მიზნით. მოდელირების მთავარი მახასიათებელია ის,

რომ ეს არის შემცვლელი ფორმალიზებული ობიექტების გამოყენებით ობიექტის ფუნქციონირების არსის შემეცნებაში. მოდელი მოქმედებს, როგორც შემეცნების ინსტრუმენტი, რომელსაც მკვლევარი იყენებს თავის კვლევაში რეალური ობიექტის შესწავლის მიზნით, ე.ი. ობიექტს განიხილავენ, მოდელის პრეზენტაციის "პრიზმა"-ში. მოდელირების პროცესი, შესაბამისად, მოიცავს სამ ელემენტს: კვლევის საგანი (მკვლევარი), საკვლევი ობიექტი და მოდელი (ნახ.4.8).



ნახ. 4.8 მოდელის როლი კვლევის პროცესში

მართვისა და მოდელირების პროცესის არსი და მნიშვნელობის სტრუქტურა ზოგადად მოცემულია ნახ. 4.9-ზე



ნახ. 4.9 მართვისა და მოდელირების არსი

მოდელირების პროცესის მეორე ეტაპზე, მოდელი განიხილება, როგორც დამოუკიდებელი სასწავლო ობიექტი. ამ ეტაპის საბოლოო შედეგია ცოდნის მოდელის შესახებ. ამასთან, სრულყოფილი ცოდნა მოდელის შესახებ ჯერ არ არსებობს. ცოდნა თვით ორიგინალური ობიექტის შესახებ.

მოდელირების პროცესის მესამე ეტაპზე ხდება მიღებული ცოდნის ინტერპრეტაცია, ე.ი. ცოდნის მოდელიდან ორიგინალზე გადატანა. იქმნება ცოდნის ბაზა ობიექტის შესახებ.

მეოთხე ეტაპი არის მიღებული ცოდნის პრაქტიკული შემოწმება, მათი გამოყენება ობიექტის შესახებ რეალურ გარემოში ფუნქციონირების შესაძლებლობათა ინფორმაციის ფორმულირებისთვის, მისი გარდაქმნისთვის ან მისი მართვისათვის.

მოდელირება და მართვა ციკლური პროცესებია. ეს ნიშნავს, რომ პირველ ოთხ ეტაპს ციკლს შეიძლება მოყვეს მეორე ოთხეული, მესამე და ა.შ. ამ დროს ფართოვდება და იხვეწება ცოდნა გამოკვლეული ობიექტის შესახებ და თანდათანობით იხვეწება ორიგინალური მოდელი და შესაბამისად მართვაც უფრო სრულყოფილი ხდება. მოდელირების პირველი ციკლის შემდეგ აღმოჩენილი უარყოფითი მხარეები, რომლებიც გამოწვეულია ობიექტის მცირე ცოდნით და მოდელის აგების შეცდომებით, შეიძლება გამოსწორდეს მომდევნო ციკლებში. ამრიგად, მოდელირების მეთოდოლოგია შეიცავს თვითგანვითარების დიდ შესაძლებლობებს, რაც ავტომატურად აისახება ეკონომიკური ობიექტის (ეო) მართვის ხარისხზე. მათემატიკური მოდელების და ავტომატიზებული მართვის სისტემების (ამს) გამოყენების უპირატესობა აღსაწერად ეკონომიკური სისტემებში შეიძლება ჩამოვყალიბოთ შემდეგნაირად:

1) მათემატიკური მოდელის აგების პროცესში მკვლევარს შეუძლია შესწავლილი საკომუნიკაციო სისტემისა და პარამეტრებისათვის განსაზღვროს არსებითი და არა ასებითი პარამეტრები;

2) მათემატიკური მოდელი საშუალებას იძლევა დამყარდეს ურთიერთკავშირი სისტემის სხვადასხვა პარამეტრებს შორის, აგრეთვე აღწეროს ზოგიერთი პარამეტრის გავლენა სხვებთან;

3) მათემატიკური მოდელი, სიტყვიერისგან განსხვავებით, საშუალებას გვაძლევს აღწეროთ პროცესი კომპაქტურად, მათემატიკური ფორმულების სახით;

4) აგებული მათემატიკური მოდელის გამოყენება შეიძლება შესასწავლი სისტემის რიცხვითი ანალიზისათვის კომპიუტერის გამოყენებით. ეს საშუალებას გვაძლევს სისტემის ქცევის ალტერნატიული სცენარების დადგენისას და ამ ეკონომიკური სისტემის (ამს)-ის აგებისათვის;

5) მათემატიკური აპარატის გამოყენებით, მკვლევარს შეუძლია მიიღოს შესწავლილი სისტემის შესახებ ახალი ცოდნა, რომელიც რეალობის ადეკვატურია ისეთივე მასშტაბით, როგორც აგებული მოდელი;

6) მათემატიკური მოდელების გამოყენება საშუალებას იძლევა ჩატარდეს ოპტი-მალური ან მათთან ახლოს მყოფი გადაწყვეტილებების წინასწარი შერჩევა გარკვეული კრიტერიუმები, რომლებიც შემდგომ ეფექტურად გამოიყენება (ამს)-ს მიერ ;

7) ეს მათემატიკური მოდელები (მმ) დასაბუთებულია მეცნიერულად და მმართველი გადაწყვეტილების მიმღებს პროცესში (ამს)-ს გამოყენებისას შეუძლია იხელმძღვანელოს ამ მოდელებით.

ეკონომიკურ მათემატიკური მოდელები, მათემატიკურად ფორმალიზებული კავშირების დახმარებით ხდება ეკონომიკური პროცესებისა და ფენომენების ძირითადი თვისებების, ასახვა და სამართავი ფუნქციების განსაზღვრა. ეს ეტაპი ძალიან მნიშვნელოვანია ეკონომიკური ობიექტების ავტომატიზებული მართვის საკითხების გადაწყვეტისას (**ეოამს**), ეს მართვის სისტემები განსაკუთრებით ეფექტურია რთული ეკონომიკური პრობლემების გამოსაკვლევად და მათი მართვის პროცესში. ასეთი ტიპის მათემატიკურ მოდელებს სხვანაირად ეკონომიკურ-მათემატიკურ მოდელებს (**ემმ**) უწოდებენ. (**ემმ**)– ს გამოყენების საფუძველზე ხორციელდება გამოყენებითი კომპიუტერული პროგრამების შედგენა, რომლებიც შექმნილია ეკონომიკური ანალიზის, დაგეგმვის პრობლემების და მენეჯმენტის საკითხების გადასაჭრელად (**ემმ**)– ს საფუძველზე ხორციელდება ეკონომიკური სისტემების ავტომატური მართვის სისტემების აგება. გადაწყვეტილების დამხმარე სისტემების (**გდს**) კომპონენტების (მონაცემთა ბაზებთან, ტექნიკასთან, ადამიანის და ადამიანის ინტერფეისთან ერთად). ეკონომიკური სისტემების მათემატიკური მოდელები და ავტომატიზებული მართვის სისტემები შეიძლება დაიყოს შემდეგ ნაწილებად:

1. დაკვირვების მოდელს **ქცევის მოდელს** უწოდებენ. ობიექტის ქცევა და დაკვირვებადი ქცევის აღწერა (კავშირი შესაყვან და გამომავალ ცვლადებს შორის) ობიექტის შიდა სტრუქტურის შესახებ ინფორმაციის გარეშე ანუ "შავი ყუთის" მოდელი. სტრუქტურა და პარამეტრების რაოდენობა დგინდება მოდელის აგების პროცესში, როდის ასეთი მოდელების პარამეტრებს შეიძლება არ ჰქონდეს რაიმე ეკონომიკური მნიშვნელობა.
2. **ფენომენოლოგიური მოდელი** არის შესაბამისი ეკონომიკური სისტემის შიდა სტრუქტურის მათემატიკური აღწერა, როგორც წესი, ასეთი მოდელების ამსახველი განტოლებების სტრუქტურა შეესაბამება ეკონომიკური თეორიის ჰიპოთეზას და პარამეტრების რაოდენობა წინასწარ განსაზღვრას და ნათლადაა ამ განტოლებებში გაცხადებული ეკონომიკური ამოცანის აზრი და არსი. (**ამს**)-ში გამოყენებული ეკონომიკურ - მათემატიკური მოდელების კლასიფიკაცია შესაძლებელია ქვემოთ მოყვანილი ზოგადი ნიშნების შესაბამისად:

1. **მიზნობრივი დანიშნულების მიხედვით**, მოდელები შეიძლება დაიყოს:

ა) **თეორიული და ანალიზური**, რომლებიც ყველაზე მეტად გამოიყენე ბიან ეკონომიკური პროცესების განვითარების ზოგადი ტენდენციების დასადგენად მიმართულ კვლევაში;

ბ) **გამოყენებითი**, რეალური კონკრეტული პრობლემების გადასაჭრელად.;

2. **შესასწავლი ეკონომიკური პროცესების მიხედვით**:

ა) საწარმოო და ტექნოლოგიური;

ბ) სოციალურ-ეკონომიკური.

3. მიზეზობრივი კავშირის ასახვის ხასიათიდან გამომდინარე:

ა) დეტერმინესიული;

ბ) არასაკმარისი (ალბათური, სტოქასტური), გაურკვევლობის ფაქტორის გათვალისწინებით.

4. დროის ფაქტორის ასახვის გამოყენებით:

ა) სტატიკური (აქ ყველა დამოკიდებულება დროის მოცემულ მომენტში ან დროის მონაკვეთში);

ბ) დინამიური, პროცესების ცვლილებების დამახასიათებელი დროის ცვლილების გათვალისწინებით.

5. მათემატიკური მოდელირების ფორმით:

ა) წრფივი (ყველაზე მოსახერხებელია ანალიზისა და გამოთვლებისთვის, იმის გამო, რომლებიც ფართოდ არის გავრცელებული);

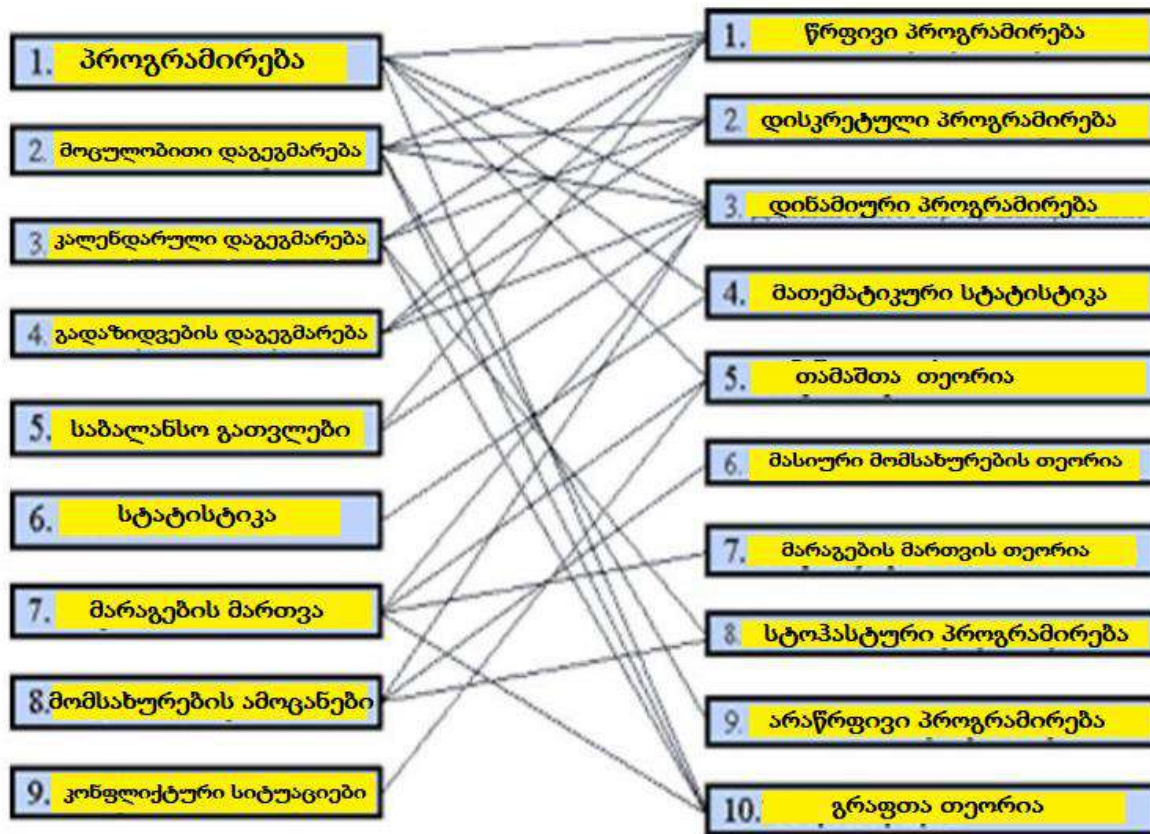
ბ) არაწრფივი.

6. დეტალური აღწერილობი ხარისხის მიხედვით:

ა) აგრეგირებული ("მაკრომოდელები");

ბ) დაწვრილებითი ("მიკრომოდელები").

ნახ.4.10 - ზე წარმოდგენილია ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდების (ამს)-ს ის ჯგუფები, რომლებიც ერთად ქმნიან ეკონომიკური ობიექტების ავტომატიზებული მართვის სისტემების აგების სრულყოფილ სქემას (ეოამს)-ს.



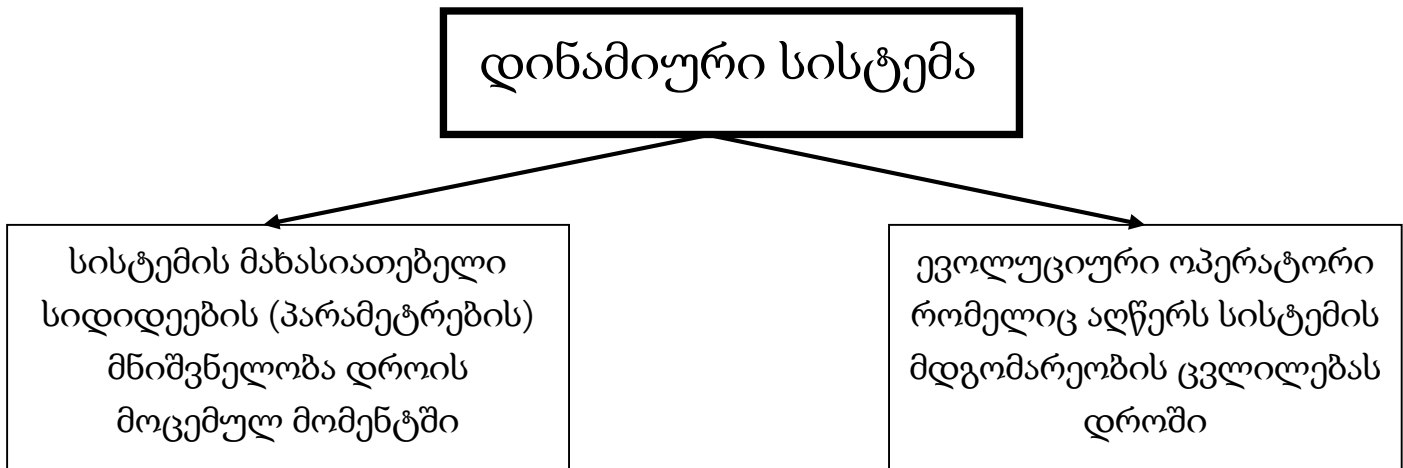
ნახ.4.10 (ამს)-ს აგების პროცესში უმნიშვნელოვანესი ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელების კავშირის ჯგუფები

## თავი 5

### თემა. დინამიური სისტემების მათემატიკური მოდელები.

#### 5.1 დინამიური სისტემების მათემატიკური აღწერა დიფერენციალური განტოლებებით.

დინამიური სისტემა ეს არის ნებისმიერი ობიექტი ან პროცესი, რომლისთვისაც ცალსახად არის განსაზღვრული მდგომარეობის ცნება, როგორც გარკვეული სიდიდეების ერთობლიობა დროის გარკვეულ მომენტებში და აგრეთვე მოცემულია მათი საწყისი მდგომარეობიდან დროში ევოლუციის (განვითარების) კანონი. დინამიური სისტემები თავისი ხასიათის მიხედვით შეიძლება იყვნენ - ფიზიკური, ბიოლოგიური, ქიმიური, გამოთვლითი ან ინფორმაციის გარდაქმნის პროცესები. ევოლუციის კანონი - ეს არის დიფერენციალური განტოლებები, დისკრეტული ასახვები და სხვა.



**დინამიური სისტემის მათემატიკური მოდელი** - ეს არის მახასიათებელი პარამეტრების (კოორდინატების) და გარკვეული მმართველი ოპერატორის (ოპერატორების) საშუალებით სისტემის (სისტემის კოორდინატების) დროში ცვლილების აღმწერი ფორმალიზებული წარმოდგენა.

### დინამიური სისტემების კლასიფიკაცია

- ოპერატორების სახეობათა მიხედვით: წრფივი  
$$\varphi_t[x(t) + y(t)] = \varphi_t[x(t)] + \varphi_t[y(t)]$$
  
და არაწრფივი
- სისტემები დროში დისკრეტული ან უწყვეტი (ნაკადური ან კასკადური);
- რხევითი სისტემები:
  - წრფივი და არაწრფივი;
  - თავმოყრილ პარამეტრიანები და განაწილებული;
  - ავტონომიური და არაავტონომიური;
  - ავტორხევითი;
- კონსერვატიულები (ჰამილტონიანები) და არაკონსერვატიულები;

### 5.2. თავმოყრილ-პარამეტრიანი დინამიკური სისტემები

თუ  $M$  - არის ევკლიდური სივრცის რაღაც გარემო, ხოლო  $t$  – მუდმივად ცვლადი პარამეტრი, მაშინ ევოლუცია შეიძლება მოიცეს ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების სახით.

სისტემის მდგომარეობა შეიძლება აღწერილ იქნას ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემის საშუალებით.



$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

.....

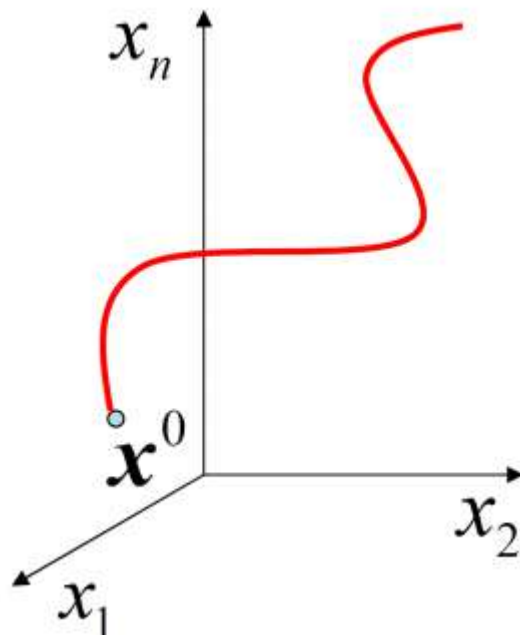
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

სადაც

არის  $i$ -ური ცვლადის პირველი წარმოებული  $t$  პარამეტრით ანუ

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$$

ანუ ამ დიფერენციალური განტოლებების სისტემის ამოხსნას შეიძლება მიეცეს შემდეგი გრაფიკული სახე ნახ.11



ნახ.11

ახლა განვიხილოთ ზოგადად მათემატიკური მოდელირების საკითხების არსი და მნიშვნელობა კაცობრიობის განვითარების იტორიულ ფონზე. იმიტომ, რომ კაცობრიობას ყოველთვის აინტერესებდა სხვადასხვა მოვლენათსა კანონზომიერებების დადგენა, რისთვისაც იგი არ ზოგავდა არც დროს, არც ენერგიას და არც ხარჯებს. შემეცნების პროცესში პირველადია და მოვლენებზე ან საგნებზე დაკვირვება, შემდეგ დაკვირვების შედეგების გაანალიზება

აბსტრაქტული აზროვნების ელემენტების გამოყენებით. ამის შემდეგ ხდება მოდელირების პროცესის გააზრება და საბოლოოდ ამ მოდელის (მათემატიკური, ზოგჯერ ფიზიკური მოდელისაც). შემეცნების ეს სქემა არ არის დმოკიდებული საგნის ან მოვლენის ბუნებაზე. მათემატიკური მოდელისა და საერთოდ მათემატიკური მოდელირების გარეშე შეუძლებელია კომპიუტერული მოდელის შექმნა და საერთოდ საყოველთაო კომპიუტერიზაციის პროცესი. დღევანდელ მსოფლიო მეცნიერებები ნებისმიერ სფეროში ხშირად გვხვდება სიტყვები „მპოდელი“, „მათემატიკური მოდელი“, „იმიტაციური მოდელი“ და სხვა. არსებობს მოდელის მრავალი განსაზღვრება. მაგალითად „**მოდელი არის მატერიალური ან აზრობრივად წარმოდგენილი ობიექტი, მოვლენა, პროცესი, რომელიც ინარჩუნებს რეალური ობიექტის, მოვლენის, პროცესის მნიშვნელოვან თვისებებს და ცვლის მას შემეცნების პროცესში**“.

კარგად აგებული მოდელი კვლევისათვის უფრო ხელმისაწვდომია, ვიდრე რეალური ობიექტი. ამასთან, ზოგიერთ ობიექტი საერთოდ მიუწვდომელია გამოსაკვლევად, მაგალითად კოსმოსური სხეულების, პლანეტების, კომეტების, ასტეროიდების, მეტეორების, გალაქტიკების და საერთოდ ვარსკვლავების შემთხვევაში. ამ დროს მათემატიკურ ან სხვა მოდელების გამოყენება აუცილებელი ხდება. ახლა დავსვათ კითხვა: **რისთვის არის საჭირო მოდელი? რაში მდგომარეობს მისი დანიშნულება?**:

1. გამოვიკვლიოთ, თუ რას წარმოადგენს ობიექტი, როგორია მისი ბუნება, სტრუქტურა, ძირითადი თვისებები, განვითარების კანონები და სხვა;
2. ვმართოთ ობიექტი, ვიპოვოთ მოცემულ პირობებში საუკეთესო მართვის რეჟიმი;
3. მოვახდინოთ ობიექტის მდგომარეობის და მისი მოსალოდნელი ცვლილებების პროგნოზირება;

**მოდელის აგების პროცესს ეწოდება მოდელირება.** მოდელირების არსებული მეთოდები (სახეობები) შეიძლება დავყოთ ორ ძირითად ნაწილად იგი ორ მაკრო ჯგუფად: **მატერიალური** (ფიზიკური, სანობრივი) ანუ რეალური და **იდეალური** (ფორმალიზებული სახით წამოდგენილი) ჯგუფებად.

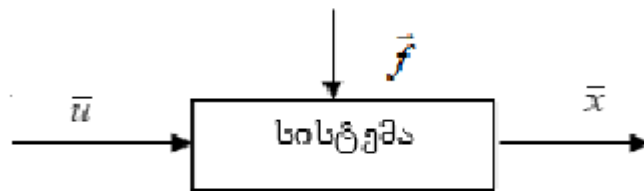
მატერიალური მოდელები ასახავენ ობიექტის გეომეტრიულ, ფიზიკურ, დინამიკურ და ფუნქციონალურ მახასიათებლებს. მატერიალური მოდელირების ძირითადი სახეებია **ფიზიკური და ანალოგური** მოდელირება. **ფიზიკური მოდელირებისას** რეალური ობიექტი იცვლება მისი გადიდებული ან შემცირებული ასლით, რომელიც იძლევა ლაბორატორიულ პირობებში მისი გამოკვლევის საშუალებას. **ანალოგური მოდელირება** დამყარებულია სხვადასხვა ფიზიკური ბუნების მქონე პროცესების და მოვლენების ანალოგიაზე. **იდეალურ** მოდელირებას კი წარმოადგენს ისეთი ტიპის მოდელირებას, რომელიც იყენებს ობიექტის შესახებ ინტუიციურ წარმოდგენას. არსებობს აგრეთვე **ნიშნობრივი** მოდელირება, რომელიც იყენებს ნიშნობრივ გარდაქმნებს სქემების, გრაფიკების, ნახაზების, ფორმულებისა და სხვა **ფორმალიზებულ** საშუალებებს.

არსებობს მათემატიკური მოდელის მიღების ორი გზა: **თეორიული** და **თეორიულ-ექსპერიმენტალური**. თეორიული გზა უფრო მოსახერხებელია (ადვილია, ნაკლებხარჯიანია) იგი ძირითადად გამოიყენება მარტივი ობიექტების კვლევისას. იგი გულისხმობს მოდელის მიღებას ობიექტში

მიმდინარე მათემატიკური კანონების საფუძველზე. რთული ობიექტისთვის ეს გზა მიუღებელია, ვინაიდან ან მოდელი გამოდის ძალიან რთული ან საერთოდ არ ხერხდება მისი მიღება. ასეთ შემთხვევაში იყენებენ ექსპერიმენტულ მეთოდს, რომელიც დამყარებულია თეორიული გამოკვლევების შედეგებზე. მათემატიკური მოდელი მიიღება ექსპერიმენტიდან მიღებული ობიექტის სიგნალების „შესასვლელი-გამოსასვლელი“-ის რეალიზების შედეგად. მოდელის მიღების ასეთ მეთოდს ეწოდება „**იდენტიფიკაცია**“.

მათემატიკური მოდელირება შეიცავს **ანალიზურ, იმიტაციურ და კომბინირებული** სახის მოდელირებას.

**ანალიზური მოდელის შემთხვევაში** სისტემის ელემენტების ფუნქციონირების პროცესი ჩაიწერება ფუნქციონალური დამოკიდებულებებით - **ალგებრული, ინ-ტეგრალურ-დიფერენციალური** და სხვა . ანალიზური მოდელების შესწავლა შეიძლება ანალიზური, რიცხვითი, ხარისხობრივი მეთოდებით, იმიტაციური მოდელირების დროს კი ის ალგორითმი , რომელიც ახდენს ობიექტის მოდელის რეალიზებას, დროში აღადგენს სისტემის ფუნქციონირების პროცესს, რაც იძლევა ობიექტის შესახებ ინფორმაციის მიღების, სისტემის მახასიათებლების შეფასების საშუალებას დროის გარკვეულ მომენტში. იმიტაციური მოდელირება იძლევა რთული ამოცანების გადაწყვეტის საშუალებას, რადგან შესაძლებელია დისკრეტული და უწყვეტი ელემენტების, არაწრფივი მახასიათებლების, შემთხვევითი ზემოქმედების და სხვათა გათვალისწინება. ნებისმიერი საწარმოო პროცესი შეიძლება წარმოდგენილ იქნას როგორც სისტემა. **სისტემა** - არის ისეთი ელემენტების ერთობლიობა, რომლებიც გაერთიანებულ არიან გარკვეული წესით და განიხილება, როგორც მთლიანი ერთეული. ის ელემენტები, რომლებიც არ შედიან მოცემულ სისტემაში, წარმოზადგენენ მისთვის გარეშე გარემოს. სქემატურად სისტემა შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგნაირად(ნახ.12):



ნახ. 12.

სადაც  $\vec{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  - შესასვლელი სიგნალის ვექტორი;

$\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  - გამოსასვლელი სიგნალის ვექტორი;

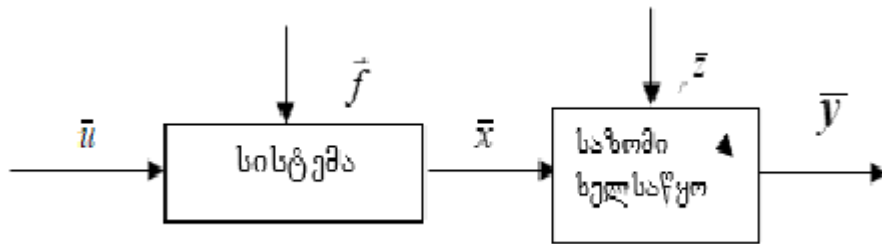
$\vec{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_r\}$  - აღშფოთების ვექტორი.

5  
ვტომა  
ტური  
მართვ  
ის  
თეორი  
აში  $\vec{x}$  -

ს უწოდებენ ფაზურ კოორდინატებს ან მდგომარეობის პარამეტრებს . სისტემის შესწავლა ხორციელდება მისი მათემატიკური მოდელის საფუძველზე. მათემატიკური მოდელი არის სისტემის თვისებების გამარტივებული ასახვა, რომელიც ჩაწერილია მათემატიკური (ფორმალიზებული) ფორმით:

$$\vec{x} = A(\vec{u}, \vec{f}) \quad (5.1)$$

სადაც A არის აგებრული, ინტეგრალური, დიფერენციალური ან სხვა რომელიმე სახის ოპერატორი. ხშირად სისტემის გამოსასვლელზე დაკვირვება ვერ ხორციელდება . ამის გამორეალურად სიგნალი გვაქვს საზომი ხელსაწყოს გამოსასვლელზე (ნახ.13):



ნახ.13

$\vec{y}$  განსხვავდება  $\vec{x}$  –ისგან, ვინაიდან საზომ ხელსაწყოზე შემთხვევითი ხმაური (შესფოთება)  $\vec{z}$  . მაშინ მოდელი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\vec{y} = B(\vec{x}, \vec{z}) \quad (5.2)$$

ამრიგად სისტემის მათემატიკური მოდელი მიზანშეწონილია წარმოვადგინოთ

**ორნაირი სახით**

1. სისტემის მდგომარეობის მოდელით (5.1)
2. დაკვირვების მოდელით (5.2)

**5.3. მოდელების კლასიფიკაცია**

საწარმოო პროცესების მათემატიკური მოდელების სიმრავლე შეიძლება კლასიფიცირდეს სხვადასხვა ნიშნით.

განვიხილოთ მოდელების კლასიფიკაცია ოპერატორის ნიშნების მიხედვით:

1. ობიექტის შესასვლელი და გამოსასვლელი სიგნალების არგუმენტი შეიძლება იყოს, როგორც დრო, ასევე სივრცული კოორდინატა, ან რომელიმე სხვა ცვლადი. თვითონ ოპერატორიც შეიძლება დამოკიდებულ იქნას დროზე. ასეთი ტიპის მოდელებს ეწოდებათ **დინამიკური მოდელები**. თუ მოდელი არ არის დამოკიდებული დროზე მაშინ მას ეწოდება **სტაციონარული მოდელი**. სტაციონარული სისტემის რეაქცია დამოკიდებულია შესასვლელი სიგნალის ზემოქმედების ინტერვალზე  $\tau = t_2 - t_1$  და არ არის დამოკიდებული ზემოქმედების დაწყების  $t_1$  და დამთავრების  $t_2$  მომენტებზე. თუ შესასვლელი და

გამოსასვლელი სიგნალები დამოკიდებულია სივრცულ კოორდინატებზე, მაშინ გვექნება **სტატისტიკურ-სივრცული** მოდელი.

2. დინამიკური მოდელები იყოფა ორ ჯგუფად: **ინერციული და უინერციო**. უინერციო მოდელებში ოპერატორი განსაზღვრავს დამოკიდებულებას შესასვლელ-გამოსასვლელ სიგნალებს შორის ერთსა და იმავე დროის მომენტში. უინერციო მოდელებს ეწოდებათ მოდელები მეხსიერების გარეშე. ინერციულ მოდელებში გამოსასვლელი ფუნქციის მნიშვნელობა მოცემული დროის მომენტში დამოკიდებულია შესასვლელი ფუნქციის მნიშვნელობაზე არა მარტო მიმდინარე დროის მომენტში, არამედ წინა მნიშვნელობაზეც. ინერციულ მოდელებს სხვაგვარად უწოდებენ **მეხსიერების მქონე მოდელებს**. უინერციო მოდელებს მიეკუთვნება **ტრენდის ტიპის მოდელი**, ხოლო ინერციულ მოდელებს მიეკუთვნება **დიუამელის ინტეგრალი, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება** და სხვა.
3. ასეობენ სასრული და უსასრულო მეხსიერების მქონე დინამიკური მოდელები.
4. არსებობენ **დეტერმინირებული და სტოქსასტური** მოდელები. დეტერმინირებული ოპერატორი საშუალებას იძლევა, ცალსახად განისაზღვროს გამოსასვლელი სიგნალი ცნობილი შესასვლელი სიგნალის დროს. დეტერმინირებული მოდელი გულისხმობს მხოლოდ შესასვლელი სიგნალის არაშემთხვევით დეტერმინირებულ გარდაქმნას, ხოლო თვითონ სიგნალები შეიძლება იყოს შემთხვევითიც და დეტერმინირებულიც. სტოქსასტურ (ალბათურ) მოდელში გამოსასვლელი სიგნალის ცალსახად განსაზღვრა არ ხდება, ცალსახად განისაზღვრება მხოლოდ გამოსასვლელი სიგნალების ალბათობის განაწილება და სისტემის პარამეტრები.
5. გარდაქმნის ოპერატორი შეიძლება შეიცავდეს უცნობ პარამეტრებს. მდგომარეობის მოდელი ჩაიწერება შემდეგნაირად:  $\vec{x} = a(\vartheta)\vec{u}$ , სადაც  $\vartheta$  - არის პარამეტრების ვექტორია. ასეთ მოდელებს ეწოდება პარამეტრული. მაგალითად, პარამეტრულია მოდელი, რომელიც აღიწერება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებით, უცნობი პარამეტრებით, კოეფიციენტებით. არაპარამეტრული მოდელია - დიუამელის ინტეგრალი.
6. ოპერატორის მნიშვნელოვანი ნიშანია შესასვლელი სიგნალის მიმართ მისი წრფივობა და არაწრფივობა. ოპერატორი და შესაბამისი მოდელი წრფივია, თუ ადგილი აქვს სუპერპოზიციის პრინციპს. წინააღმდეგ შემთხვევაში - მოდელი არაწრფივია.
7. მოდელების კლასიფიცირება შესაძლებელია იმ მათემატიკური ოპერაციების მიხედვით, რომლებიც გამოიყენება ოპერატორში:
  - ა) თუ  $\vec{x}(t)$ -სა და  $\vec{u}(t)$ -ს შორის დამოკიდებულება მოცემულია ფუნქციის სახით, მაშინ მოდელი არის ალგებრული. მაგალითად **ტრენდის მოდელი**.
  - ბ) თუ  $\vec{x}(t)$  და  $\vec{u}(t)$  შორის დამოკიდებულება მოცემულია ფუნქციონალის სახით, მაშინ მოდელი **ფუნქციონალურია**. მაგალითად **დიუამელის ინტეგრალი**.
  - გ) თუ მოდელი აღიწერება დიფერენციალური განტოლებით, იგი დიფერენ-

ციალურია. მისი დისკრეტული ანალოგი არის **სასრულსხვაობიანი მოდე-  
ლი**. თუ განტოლება არის კერძოწარმოებულებით, მაშინ მოდელი არის  
**კერძოდიფერენციალური**

### **დინამიკური მოდელების კლასიფიკაცია**

1. განვიხილოთ მოდელების კლასიფიკაცია შესასვლელ-გამოსასვლელი სიგნალების ვექტორებისგანზომილების მიხედვით:
  - ა) **ერთგანზომილებიანი მოდელი** ამ მოდელის შესასვლელი და გამოსასვ-  
ლელი სიგნალები სკალარებია და მრავალგანზომილებიანი - თუ ისინი  
ვექტორებია.
  - ბ) თუ მოდელის გამოსასვლელი სკალარია, მაშინ შესასვლელის განზომილების  
მიუხედავად მოდელი არის ერთგანზომილებიანი, თუ არა რავალგანზომილე-  
ბიანი.
  - გ) პარამეტრების ვექტორის განზომილების მიხედვით, არსებობს **ერთ და  
მრავალპარამეტრიანი** მოდელები.
2. სიგნალების თვისებების მიხედვით, არსებობს სხვადასხვა ტიპის მოდელები.  
მოდელებს, რომელთა შესასვლელი და გამოსასვლელი უწყვეტი სიგნალებია  
ეწოდებათ **უწყვეტი მოდელები**, ხოლო თუ სიგნალები დისკრეტულია -  
**დისკრეტული მოდელები** სიგნალების დისრეტირება შესაძლებელია დროშიც და  
სიგნალის დონითაც. თუ სიგნალი არის დროში დისკრეტული, მაშინ მოდელი არის  
**იმპულსური**.
3. არსებობს მოდელები შეკრული და გახსნილი წრედებით. შეკრულ და ჩაკეტილ  
სისტემაში არის უკუკავშირი , რაც ართულებს არა მარტო მათემატიკური  
მოდელის ჩაწერას არამედ მის ანალიზსაც.

## **5.4. მათემატიკური მოდელების სახეები**

### **5.4.1 უინერციო მოდელები**

1. **ტრენდის მოდელი** ტრენდი აღნიშნავს რაღაც მდგრად სისტემურ ცვლილებას  
დროის ხანგრძლივ პერიოდში. **ტრენდის ერთგამოძახილიანი** მოდელი შეიძლება  
ჩაიწეროს ასე:  $y(t) = \eta(t, \theta) + \nu(t)$ , სადაც  $\eta(t, \theta)$  ცნობილი დროის ფუნქციაა  $\theta$   
პარამეტრამდე სიზუსტით;  $\nu(t)$  შემთხვევითი შემადგენელია .
2. **რეგრესიული მოდელი**  $y(t) = \eta[u(t), \theta] + \nu(t)$ , სადაც  $u(t)$  სამართავ ფუნქციათა  
ვექტორია, რომელიც შეიძლება შეირჩეს მოცემული საზღვრებში. ეს მოდელი  
სტატისტიკური რეგრესიული მოდელის განზოგადებაა. სტატისტიკურ მოდელებ-  
ში ფაქტორები არის სიდიდეები, დინამიურში ფუნქციები. რეგრესიული  
მოდელები შეიძლება იყოს წრფივიც და არაწრფივიც პარამეტრების მიმართ.  
მოდელი შეიცავს უცნობ  $\theta$  პარამეტრებს, რომელთა შეფასება აუცილებელი ხდება.  
გამოძახილი შეიძლება იყოს უწყვეტიც და დისკრეტულიც. ექსპერიმენტის დაგეგმვა  
დაიყვანება  $u(t)$  ფუნქციის საუკეთესო არჩევანზე.

### **5.4.2. ინერციული მოდელები**

1. **ხვეული ინტეგრალი და ხვეული ჯამი.**

წრფივი რაციონალური დინამიკური სისტემები უწყვეტი „შესასვლელ-გამოსასვლელის“ შემთხვევაში, შეიძლება აღიწეროს შემდეგნაირად:

$$y(t) = \int_0^{\infty} \omega(\tau) * u(t - \tau) d\tau + v(t) = \int_{-\infty}^t \omega(t - \tau) * u(\tau) d\tau + v(t) \quad (5.3)$$

არასტაციონარული კი: 
$$y(t) = \int_{-\infty}^t \omega(t, \tau) * u(\tau) d\tau + v(t)$$

გამოსახულებაში შემავალ ინტეგრალს ეწოდება **ხვეული** ინტეგრალი ან **დიუამელის** ინტეგრალი.

თუ „შესასვლელ-გამოსასვლელი არის „ არის დისკრეტული, მაშინ გვექნება:

$$y(k\Delta t) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega(i\Delta t) * u(k\Delta t - i\Delta t) + v(k\Delta t) \quad (5.4)$$

გამოსახულებაში შემავალი ფუნქცია  $\omega(\tau)$  ან  $\omega(i)$  არის სისტემის იმპულსური მახასიათებელი - **წონითი ფუნქცია**, რომელიც სისტემის რეაქციას  $\delta$  - დირაკის ფუნქციაზე

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

ეს მოდელები არაპარამეტრულია, ისინი შეიცავენ უცნობ წონით ფუნქციას  $\omega(t)$ -ს. მისი განსაზღვრა შეიძლება ინტეგრალურ განტოლებიდან, რაც გარკვეულ სიმძნელებთან არის დაკავშირებული. ამოცანა ხდება ვარიაციული, თუ  $v(t)$  უმნიშვნელოა, მაშინ  $\omega(t)$ -ს განსაზღვრა  $u(t)$ ,  $y(t)$  ცნობილი ფუნქციებიდან (5.3) განტოლების ამოხსნით. დისკრეტულ შემთხვევაში ვხსნით (5.4) განტოლებას. თუ  $v(t)$  მნიშვნელოვანია მაშინ (5.3) და (5.4)-ის ნაცვლად გვექნება სტატისტიკური მოდელები, ე.წ. **ვინერ-ჰოპფის** განტოლება. ისიც ინტეგრალური განტოლებაა, მასში შედის სიგნალების კორელაციური ფუნქციები. ამოხსნა  $\omega(t)$ -ს პოვნის მიზნით რთულდება. თუ ფუნქციას ცნობილ ორთოგონალურ ფუნქციათა

მწკრივის სახით:  $\omega(t, \theta) = \sum_{i=1}^p \theta_i * F_i(t)$ , მაშინ პარამეტრულ მოდელს და ამოცანა დაიყვანება  $\theta_i$  პარამეტრების სასრული სიმრავლის განსაზღვრაზე. ვინაიდან  $\theta_i$  პარამეტრები მოდელში შედიან წრფივად, ამოცანა მნიშვნელოვნად მარტივდება.

### 5.4.3 ვოლტერას ფუნქციონალური მწკრივები.

არაწრფივი სტაციონარული დინამიკური სისტემის ფართო კლასი შეიძლება აღწერილ იქნას ვოლტერას ფუნქციონალური მწკრივით:

უწყვეტი სისტემის შემთხვევაში:

$$y(t) = \omega_0(t) + \int_0^{\infty} \omega_1(\tau_1) * u(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \omega_2(\tau_1, \tau_2) * u(t - \tau_1) * u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots + v(t)$$

დისკრეტული სისტემის შემთხვევაში:

$$y(k) = \omega_0(k) + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_1(i) * u(k - i) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \omega_2(i, j) * u(k - i) * u(k - j) + \dots + v(k)$$

$\omega_i$  - ვოლტერას ბირთვებია.

არაწრფივი დინამიკური სისტემები შეიძლება აღწერილ იქნას სხვა ფუნქციონალური მწკრივებითაც. მაგალითად ვინერის მწკრივით.

2. წრფივი სტაციონარული დინამიკური სისტემების აღწერა შეიძლება ოპერატიული მიდგომით. იგი წარმოადგენს სისტემის მათემატიკურ აღწერას ლაპლასის გარდასახვათა სივრცეში. პირველ შემთხვევაში მოდელის საფუძველია გადაცემის ფუნქცია , ხოლო მეორე შემთხვევაში მოდელის საფუძველია - სისტემის სხშირული მახასიათებელი.

ა) გადაცემის ფუნქცია არის სისტემის გამოსასვლელი სიგნალის ლაპლა

სის გარდასახვის შეფარდება შესასვლელი სიგნალის ლაპლასის გარდასახვასთან ნულლოვანი საწყისი პირობების დროს. მოდელი ჩაიწერება შემდეგნაირად:  $y(t) = w(s) * x(t)$ , სადაც  $w(s)$  გადაცემის ფუნქციაა. მოდელის პარამეტრები , რომელთა შეფასება ხდება ექსპერიმენტიდან, შედის გადაცემის ფუნქციაში.

ბ) ფურიეს გარდაქმნის გამოყენებით მივიღებთ:

$$y(j\omega) = w(j\omega) * u(j\omega) + v(j\omega),$$

სადაც  $w(j\omega)$  არის სისტემის სიხშირული მახასიათებელი, იგი

წარმოადგენს იმპულსური მახასიათებლის ფურიეს გარდასახვას.  $w(j\omega)$  მიღება შეიძლება  $w(s)$ -ში  $s = j\omega$  ჩასმით

#### 5.4.4. დინამიკური სისტემის აღწერა მდგომარეობის სივრცის მეთოდით.

ამ მეთოდის გამოყენება შეიძლება რა მართო წრფივი სისტემებისათვის , არამედ არაწრფივი და არასტაციონარული დინამიკური სისტემების გამოკვლევისთვისაც , რის საშუალებასაც გადაცემის ფუნქცია არ იძლევა. ამის გარდა გადაცემის ფუნქცია ახასიათებს წრფივი სისტემის მიზეზ-შედეგობრივ დამოკიდებულებას ლაპლასის გაედასახვათა არეში, რომელიც გამორიცხავს სისტემის წარსული და აწმყო მდგომარეობის გათვალისწინებას. მდგომარეობის



სივრცის მეთოდი მდგომარეობის პარამეტრებზე დაყრდნობითიძლევა უფრო სრული ინფორმაციის მიღების საშუალებას დინამიკური სისტემის შესახებ.

მდგომარეობის სივრცე ეწოდება ისეთ მეტრიკულ სივრცეს, რომლის თითოეული ელემენტი სრულიად განსაზღვრავს სისტემის მდგომარეობას. მათემატიკური თვალსაზრისით, სისტემის დინამიკური თვისებების ფორმალიზების მიზნით, მიზანშეწონილია, დინამიკური სისტემა განისაზღვროს მდგომარეობის პარამეტრებითა და მდგომარეობის განტოლებათა სისტემით. სისტემის მდგომარეობასა და მდგომარეობის პარამეტრებს შორის არსებობს გარკვეული დამოკიდებულება. მდგომარეობის პარამეტრების არჩევას განსაზღვრავს ჩვენს წინაშე დასმული ამოცანა. ამ საკითხის გადაწყვეტა არ არის ცალსახა.

წრფივი სტაციონარული სისტემისათვის მდგომარეობის დინამიკის სტანდარტული განტოლებებია:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A * \bar{x}(t) + B * \bar{u}(t) \text{ – მდგომარეობის გან ტოლება;}$$

$$\bar{y}(t) = D * \bar{x}(t) + E * \bar{u}(t) \text{ – გამომავალი განტოლება.}$$

სადაც A,B,D,E მატრიცებია,  $\bar{x}(t)$  – მდგომარეობის ვექტორი,  $\bar{u}(t)$  –შემავალი ვექტორი,  $\bar{y}(t)$  – გამომავალი ვექტორი.

**5.5.გადაცემის ფუნქციები.**

სანამ განვიხილავთ გადაცემის ფუნქციებს მანამ განვიხილოთ სარეგულირებელი სისტემის აღმწერი დიფერენციალური განტოლების სახე ( განვიხილოთ უწყვეტი მოქმედების წრფივი სისტემის უმარტივესი მაგალითი და მისი აღწერის წრფივი დიფერენციალური განტოლება, სადაც შესავალ (x) და გამომავა (y) სიდიდეებს შორის აღიწერება მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებით ). ამ განტოლებას აქვს სახე: (5.5)

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad (5.5)$$

სადაც  $y(t)$  - ელემენტის სიდიდე გამოსასვლელზე;  $x(t)$  - ელემენტის სიდიდე შესასვლელზე.  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ ;  $b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0$  - მუდმივი კოეფიციენტებია. რომლებიც განისაზღვრებიან ელემენტების პარამეტრებითა თავისებურებებით. განტოლების მარცხენა მხარე ახასიათებს თავად სისტემას, რადგან იგი შეიცავს მმართველ სიდიდე  $y(t)$  - ს ხოლო მარჯვენა მხარე შეიცავს შეშფოთების (ხმაურის)  $x(t)$  -სიდიდეს. სისტემის ელემენტების უფრო მოხერხებული აღწერის მიზნით, არა უშუალოდ დიფერენციალური განტოლებით, არამედ კოეფიციენტების საშუალებით, რომლებიც განსაზღვრავენ კავშირს შესასვლელ და გამოსასვლელ პარამეტრებს შორის. ესენია

- გადაცემის ფუნქციები;
- გარდამავალი მახასიათებლები (ფუნქციები);
- გადაცემის კომპლექსური კოეფიციენტი (გკკ).

გადაცემის ფუნქციის განსაზღვრისათვის ყველაზე მიზანშეწონილია ლაპლასის გარდაქმნა, რომელიც ეყრდნობა შემდეგ ორ ფორმულას:

ლაპლასის პირდაპირი გარდაქმნა:

$$L[x(t)] = X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt \quad (5.6)$$

ლაპლასის შებრუნებული (უკუ) გარდაქმნა:

$$L^{-1}[X(p)] = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{b-jw}^{b+jw} X(p)e^{pt} dp \quad (5.7)$$

სადაც  $L$  და  $L^{-1}$  - შესაბამისად ლაპლასის პირდაპირი და შებრუნებული გარდაქმნებია.

ლაპლასით გარდაქმნილი შემავალ  $X(p)$  და გამომავალ  $Y(p)$  სიდიდეებს ქვიათ **გამოსახულებები**.

$p$  - ს ქვეშ იგულისხმება კომპლექსური სიხშირე  $p = \sigma + j\omega$ . თუ  $p = j\omega$  ( $\sigma = 0$ ) ლაპლასის გარდაქმნა მის კერძო შემთხვევაში - **ფურიეს გარდაქმნაში**.

**წრფივი სახის გადაცემის ფუნქცია**  $W(p)$  არის გამოსასვლელი  $Y(p)$  გამოსახულების შეფარდებას შესასვლელ  $X(p)$  სიდიდესთან ნულოვანი საწყისიპირობებისთვის, ანუ დამატებითი ენერჯის არ ქონის შემთხვევაში.

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \quad (5.8)$$

ჩვენ ვიცით, რომ სიგნალი სისტემის გამოსასვლელზე შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც სისტემის შესასვლელზე რომელიღაც ოპერატორის ზემოქმედების შედეგი. წრფივი მოდელებისათვის ასეთი ოპერატორი შეიძლება ჩაწერილ იქნას შემდეგნაირად: ვთქვათ ობიექტის მოდელი მოცემულია მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებით, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს შესასვლელს  $x(t)$  და გამოსასვლელს  $y(t)$  გამოსასვლელს ასე (5.9):

$$b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) \quad (5.9)$$

სადაც  $a_i$  ( $i = 0,1$ ) და  $b_i$  ( $i = 0,1,2$ ) მუდმივებია.

შემოვიტანოთ დიფერენცირების ოპერატორი  $p = \frac{d}{dt}$ , რომელიც მოქმედებს  $x(t)$  სიგნალზე შემდეგი წესით.  $p x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ . მივაქციოთ ყურადღება, რომ ჩანაწერი  $p x(t)$  არ ნიშნავს  $p$  და  $x(t)$  სიდიდეების ნამრავლს არამედ  $p$  ოპერატორის ზემოქმედებას, ანუ  $x(t)$  ცვლადის დიფერენცირებას. ახლა ჩავწეროთ შესასვლელს  $x(t)$  და გამოსასვლელს  $y(t)$  გამოსასვლელის დროზე დამოკიდებული (5.9) განტოლება ოპერატორული ფორმით

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = py(t), \quad \ddot{y}(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = p^2y(t), \quad \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = px(t).$$

ჩავწეროთ ამ აღნიშვნებით (5.9) მივიღებთ:

$$b_2p^2y(t) + b_1py(t) + b_0y(t) = a_1px(t) + a_0x(t) \quad (5.10)$$

(5.10) მარცხენამხარდან გავიტანოთ  $y(t)$  ხოლო, მარჯვენა მხარედან  $x(t)$

მივიღებთ

$$(b_2p^2 + b_1p + b_0)y(t) = (a_1p + a_0)x(t). \quad (5.11)$$

(5.11)-დან ჩანს, რომ  $y(t)$  გამოსასვლელ ცვლადზე ზემოქმედებს  $b_2p^2 + b_1p + b_0$  ოპერატორი, ხოლო  $x(t)$  შესასვლელ ცვლადზე  $a_1p + a_0$  ოპერატორი. (5.11)-ის ორივე მხარე გავყოთ  $b_2p^2 + b_1p + b_0$ -ოპერატორზე მივიღებთ კავშირს შესასვლელსა და გამოსასვლელს შორის (5.12)

$$y(t) = \frac{a_1p + a_0}{b_2p^2 + b_1p + b_0} x(t) = W(p)x(t) \quad (5.12)$$

სადაც  $W(p)x(t)$  ნამრავლი კი არ არის არამედ რთული  $W(p)$  ოპერატორის ზემოქმედება  $x(t)$  შესასვლელ ცვლადზე სადაც

$$W(p) = \frac{a_1p + a_0}{b_2p^2 + b_1p + b_0}. \quad (5.13)$$

სხვა სიტყვებით ჩანაწერი  $y(t) = W(p)x(t)$  არის (5.9) განტოლების სიმბოლური ჩანაწერი, რომელზეც ოპერირება გაცილებით იოლია.

$W(p)$  ფუნქციას ეწოდება (5.9) განტოლებით აღწერილი ობიექტის **გადაცემის ფუნქცია**. იგი სრულად აღწერს ობიექტის შესასვლელსა და გამოსასვლელს შორის კავშირს, ნულოვანი საწყისი პირობების შემთხვევაში, მაგრამ არ ითვალისწინებს ობიექტის შიგა აგებულებას.

ხშირად გადაცემის ფუნქციას უწოდებენ  $W(\lambda)$  ფუნქციას, რომელიც მიიღება (5.13) - დან, თუ  $p$  ოპერატორს შევცვლით დამოუკიდებელი  $\lambda$  ცვლადით. მაშინ ეს ფუნქცია წარმოადგენს ორი  $\lambda$  ცვლადზე დამოკიდებული პოლინომის (მრავალწევრის) ფარდობას. გადაცემის  $W(\lambda)$  ფუნქციას ეწოდება **წესიერი** თუ მისი მრიცხველი უფრო ნაკლები ხარისხის მრავალწევრია ვიდრე მნიშვნელი და **არაწესიერი** თუ მრიცხველი უფრო მეტი ხარისხის მრავალწევრია ვიდრე მნიშვნელი. მაგალითად ფუნქცია  $\frac{1}{\lambda+1}$

მკაცრად წესიერია; ფუნქცია  $\frac{\lambda}{\lambda+1}$  არამკაცრად წესიერია ( ბიწესიერია); ხოლო ფუნქცია  $\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+1}$  არაწესიერია.

გადაცემის ფუნქციის ნოლები ეწოდებათ მრიცხველი მრავალწევრის ფესვებს, ხოლო პოლუსები მნიშვნელში მოცემული მრავალწევრის ფესვებს. მაგალითად ფუნქციის  $W(\lambda) = \frac{\lambda-1}{\lambda^2+3\lambda+1}$  ნოლია  $\lambda = 1$ , ხოლო პოლუსები  $\lambda = -1$  და  $\lambda = -2$ .

განვიხილოთ წრფივი სახის გადაცემის ფუნქციის აგების მაგალითები.

1. ავაგოთ სისტემის გადაცემის ფუნქცია, მოცემული დიფერენციალური განტოლებით და ნულოვანი საწყისი პირობებით. ეს განტოლებაა (5.14):

$$4\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 10y(t) = 5x(t) \quad (5.14)$$

მივიყვანოთ განტოლება სტანდარტულ სახემდე (5.15)

$$0, 4\ddot{y}(t) + 0, 2\dot{y}(t) + y(t) = 0, 5x(t) \quad (5.15)$$

ჩავწეროთ (5.15) განტოლება ოპერატორული ფორმით გავიხსენოთ მეორე წარმოებილი  $\equiv p^2$ , პირველი  $\equiv p$ , მაშინ (5.15) მიიღებს სახეს (5.16)

$$0, 4p^2 y(p) + 0, 2py(p) + y(p) = 0, 5x(p) \quad (5.16)$$

გავიტანოთ მარცხენა მხარეში ფრჩხილებს გარეთ  $x_2(p)$  მივიღებთ (5.17)-ს

$$(0, 4p^2 + 0, 2p + 1)y(p) = 0, 5x(p) \quad (5.16)$$

მაშინ სისტემის გადაცემის ფუნქციას  $W(p)$ -ექნება სახე (5.17)

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{0, 5}{(0, 4p^2 + 0, 2p + 1)} \quad (5.17)$$

2. მოვძებნოთ სისტემის გადაცემის ფუნქცია ნულოვანი საწყისი პირობებით და შემდეგი დიფერენციალური განტოლებით(5.18):

$$2\dot{y}(t) + 4y(t) = 2\dot{x}(t) + 5x(t) \quad (5.18)$$

წარმოვადგინოთ სტანდარტული სახით (5.19)

$$0, 2\dot{y}(t) + 0, 4y(t) = 0, 2\dot{x}(t) + 0, 5x(t) \quad (5.19)$$

(5.19) ჩავწეროთ ოპერატორული ფორმით, მივიღებთ (5.20)-ს.

$$0, 2py(p) + 0, 4y(p) = 0, 2px(p) + 0, 5x(p) \quad (5.20)$$

გავიტანოთ  $y(p)$  და  $x(p)$  შესაბამისად მარცხენა და მარცხენა მხარიდან მივიღებთ (5.21)-ს

$$(0, 2p + 0, 4)y(p) = (0, 2p + 0, 5)x(p) \quad (5.21)$$

აქედან სისტემის გადაცემის ფუნქციას  $W(p)$ -ს ექნება სახე (5.22)

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{0, 2p + 0, 5}{0, 2p + 0, 4} \quad (5.22)$$

3. მოვებნოთ სისტემის გადაცემის ფუნქცია ნულოვანი საწყისი პირობებით და შემდეგი დიფერენციალური განტოლებით(5.23):

$$6\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 2y(t) = 8\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t)f(t) + 7x(t) \quad (5.23)$$

წარმოვადგინოთ სტანდარტული სახით (5.24)

$$0,6\ddot{y}(t) + 0,1\dot{y}(t) + 0,2y(t) = 0,8\ddot{x}(t) + 0,2\dot{x}(t)f(t) + 0,7x(t) \quad (5.24)$$

ჩავწეროთ ოპერატორული ფორმით, მივიღებთ (5.24)-ს.

$$0,6p^2y(p) + 0,1py(p) + 0,2y(p) = 0,8p^2x(p) + 0,2px(p)f(p) + 0,7x(p) \quad (5.24)$$

გავიტანოთ  $y(p)$  და  $x(p)$  შესაბამისად მარცხენა და მარცხენა მხარიდან მივიღებთ (5.25)-ს

$$(0,6p^2 + 0,1p + 0,2)y(p) = (0,8p^2 + 0,2pf(p) + 0,7)x(p) \quad (5.25)$$

აქედან სისტემის გადაცემის ფუნქციას  $W(p)$ -ს ექნება სახე

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{0,8p^2 + 0,2pf(p) + 0,7}{0,6p^2 + 0,1p + 0,2}$$

## თავი 6

მართვის სისტემების გრაფიკული წარმოდგენა.

6.1. მართვის სისტემების მოდელები სტრუქტურული სქემის სახით.

სისტემის სტრუქტურული სქემა წარმოადგენს გრაფიკულ გამოსახულებას, რომელიც აჩვენებს თუ რა ელემენტებისგან შედგება სისტემა და როგორ არიან ისინი ურთიერთდაკავშირებული. სტრუქტურული სქემა ასახავს სისტემის დინამიკურ თვისებებს და წარმოადგენს მათემატიკურ მოდელს. სტრუქტურული სქემის შესაბამისად, ყოველთვის შეგვიძლია ავაგოთ სისტემის გადაცემის ფუნქცია და მისი დიფერენციალური განტოლება. სტრუქტურირებული მეთოდის საფუძვლები სტრუქტურული სქემის ძირითადი ელემენტებია:

1. მოქმედების მიმართულების დინამიური რგოლები. წარმოდგენილია მართკუთხედებით, რომლებშიც ასახულია სიგნალის გადამყვანი ოპერატორები. მიმართულების კავშირებში სიგნალი შესასვლელიდან გადადის გამოსასვლელზე. როდესაც შესასვლელზე სიგნალი იცვლება, გამომავალი სიგნალიც იცვლება, როდესაც გამომავალი სიგნალი იცვლება, შესასვლელზე სიგნალი არ იცვლება. მოქმედების მიმართულების რგოლების შეერთებისას, მათი დინამიური თვისებები არ იცვლება.

2. რგოლები, რომლებიც მითითებულია ისრებით, მიუთითებენ სიგნალის გადაცემის მიმართულებას. განასხვავებენ პირდაპირ და უკუკავშირს.
3. ამჯამავეები („სუმატორები“) არიან რგოლები, რომლებშიც მიიღება სიგნალების ჯამი ან სხვაობა.
4. განშტოების კვანძები, მითითებულია წერტილებით, რომლებშიც სიგნალები ერთმანეთისაგან ნაწილდებიან ორი ან მეტი მიმართულებით.

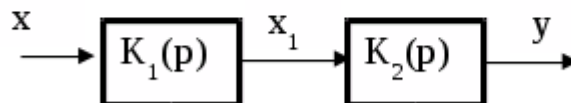
სტრუქტურულ დიაგრამებზე ყველა ტიპის ზემოქმედება აღწერილია ქვემოთ მოყვანილ ნახაზებში. სტრუქტურულ სქემებში გამოიყენება შემდეგი ტიპის კავშირები :

- მიმდევრობითი;
- პარალელური (შემხვედრი);
- შერეული (პარალელური - მიმდევრობით ან მიმდევრობით-პარალელური).

მიმდევრობითი კავშირი არის კავშირი, რომელშიც წინა რგოლიდან გამომავალი მნიშვნელობა წარმოადგენს მომდევნო რგოლის შესასვლელ მნიშვნელობას. იხილე .ნახ.6.1

$$x_1 = x \cdot K_1(p);$$

$$y = x_1 \cdot K_2(p) = x \cdot K_1(p) \cdot K_2(p).$$



ნახ. 6.1 მიმდევრობითი კავშირის სქემა

მიმდევრობითი შეერთებისას გადაცემის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

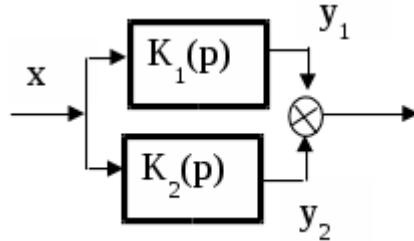
$$K(p) = \prod_{i=1}^n K_i(p) \quad (6.1)$$

პარალელური - არის შეერთება, რომელშიც მნიშვნელობა შესასვლელზე საერთოა ყველა რგოლისთვის, ხოლო გამომავალი ტოლია თითოეული რგოლის გამოსასვლელ მნიშვნელობათა ჯამისა (ნახ. 6.2).

$$y_1 = x \cdot K_1(p);$$

$$y_2 = x \cdot K_2(p);$$

$$y = y_1 + y_2 = x \cdot [K_1(p) + K_2(p)].$$

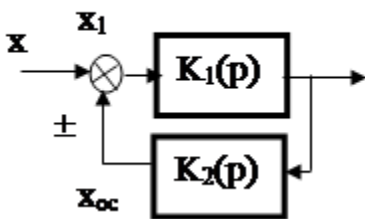


ნახ.6.2

პარალელური შეერთებისას გადაცემის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$K(p) = \sum_{i=1}^n K_i(p) \quad (6.2)$$

პარალელური (შემხვედრი) ეწოდება ასეთ კავშირს რომლის დროსაც ხორციელდება უკუკავშირი ანუ, როდესაც გამოსასვლელი სიგნალი ისევ მიეწოდება შესასვლელზე (ნახ.6.3) უკუკავშირი - უკუკავშირი შეიძლება იყოს დადებითი (თუ შეყვანის სიგნალი და უკუკავშირის სიგნალი იგივეა) და უარყოფითი (თუ ისინი ნიშნის საწინააღმდეგობაა). პრაქტიკაში უარყოფითი უკუკავშირი (NF) ფართოდ გამოიყენება სისტემის სტაბილური მუშაობისთვის.



$$y = x K_1(p); \quad x_1 = x - x_{oc} = x - x_1 K_1(p) K_2(p);$$

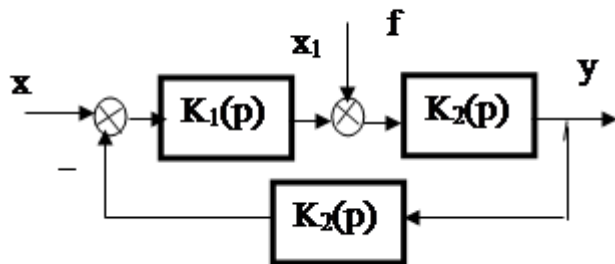
$$x_1 (1 + K_1(p) K_2(p)) = x$$

$$x_1 = \frac{x}{(1 + K_1(p) K_2(p))};$$

$$y = x \frac{K_1(p)}{1 + K_1(p) K_2(p)}$$

ნახ.6.3 ჩაკეტილი სიტემა გადაცემის ფუნქციის გამოსათვლელი ფორმულებით.

მთავარი განშტოება არის განშტოება, რომელიც მოიცავს კავშირებს შესავალსა და გამოსავლას შორის. მთავარი კონტური არის კონტური, რომელიც მოიცავს ყველა რგოლს. (ნახ.6.4)



$$K_{\beta}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_1(p)K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)};$$

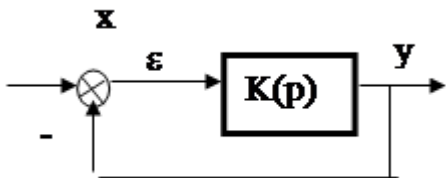
$$K(p) = \frac{Y(p)}{Z(p)} = \frac{K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)}$$

ნახ.6.4 უკუკავშირის სქემა, (გვ) გამოსათვლელი ფორმულებით.

სადაც  $K_{\beta}(p)$  - არის ჩაკეტილი სისტემის გადაცემის ფუნქცია.

გვ - გადაცემის ფუნქცია.

ახლა განვიხილოთ ჩაკეტილი სისტემის ერთეულოვანი უკუკავშირის სტრუქტურული სქემა (ნახ.6.5):



$$K_{\varrho}(p) = \frac{B(p)}{A(p)};$$

$$K_{\beta}(p) = \frac{Y(p)}{1 + K_{\varrho}(p)} = \frac{B(p)}{A(p) + B(p)};$$

$$K_{\boxplus}(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + K_{\varrho}(p)} = \frac{A(p)}{A(p) + B(p)}.$$

ნახ. 6.5 ერთეულოვანი უკუკავშირის სტრუქტურული სქემა

$K_{\varrho}(p)$  - ღია სისტემის (გვ);

$K_{\beta}(p)$  - ჩაკეტილი სისტემის (გვ);

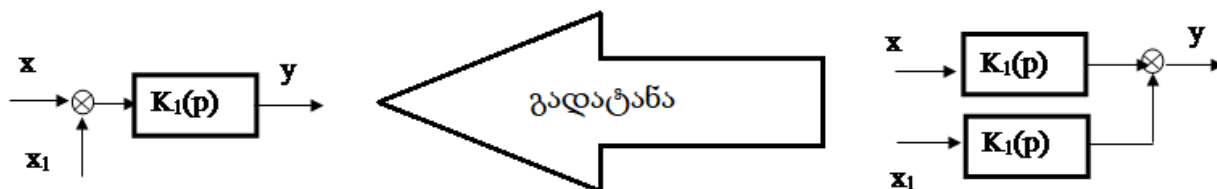
$K_{\boxplus}(p)$  - ერთეულოვანი უკუკავშირის სისტემის (გვ).



## 6.2. სტრუქტურული სქემის გარდაქმნა (გამარტივება).

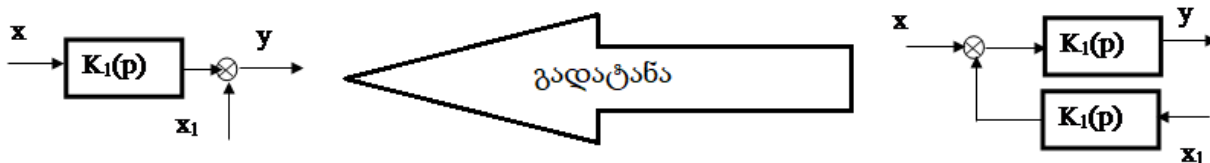
ზოგადად, სისტემა შეიძლება იყოს მრავალკონტურიანი. ნებისმიერი მრავალკონტურიანი სისტემა შეიძლება შემცირდეს და გარდაიქმნას ერთკონტურიან სისტემად სტრუქტურული გარდაქმნების განხორციელებით.

1. ამჯამავის (სუმატორი) გადატანა გამოსასვლელი რგოლიდან -შესასვლელზე (ნახ.6.6)



ნახ. 6.6

2. ამჯამავის (სუმატორი) გადატანა შესასვლელიდან გამოსასვლელზე- ნახ.6.7



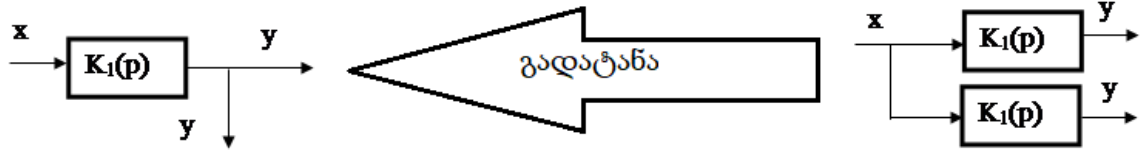
ნახ.6.7

1. რგოლის გამსასვლელიდან შესასვლელზე გადატანა ნახ.6.8



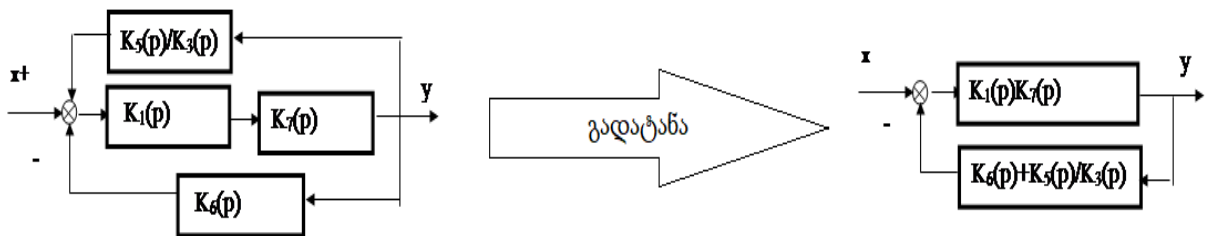
ნახ.6.8

2. რგოლის შესასვლელიდან გამსასვლელზე გადატანა ნახ.6.9



ნახ.6.9

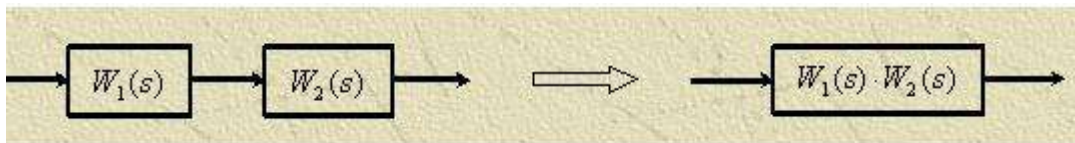
3. კიდევ ერთი გამარტივება ნახ.6.10



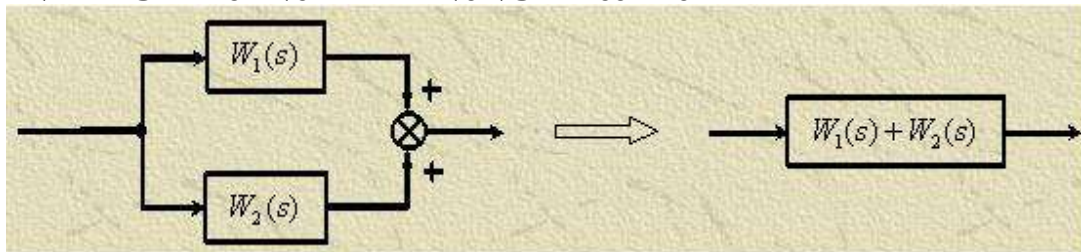
ნახ.6.10

ახლა განვიხილოთ იგივე საკითხები უფრო დაწვრილებით აქცენტი გავაკეთოთ სისტემის სქემატურ წარმოდგენაზე:

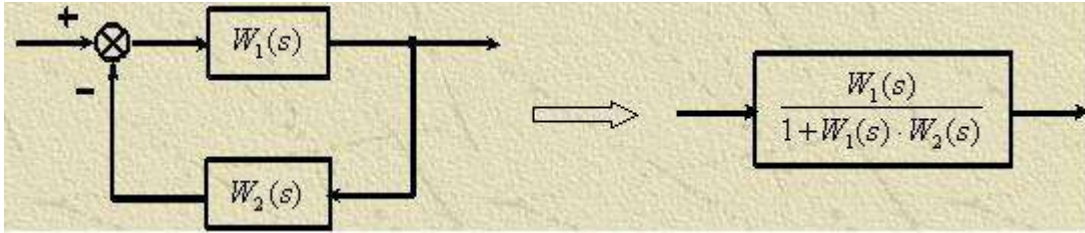
1. დინამიური რგოლების მიმდევრობითი შეერთების სქემა:



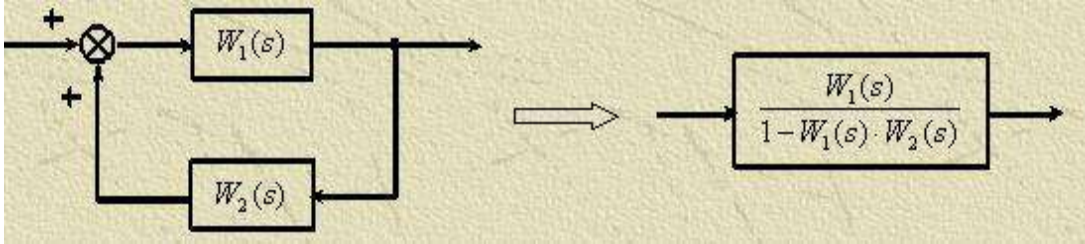
2. დინამიური რგოლების პარალელური შეერთება:



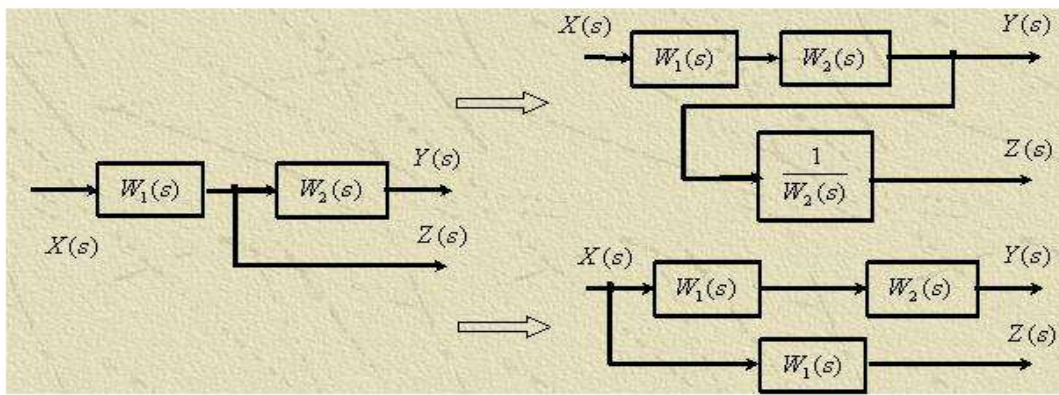
3. ჩაკეტილი კონტური უარყოფითი უკუკავშირით:



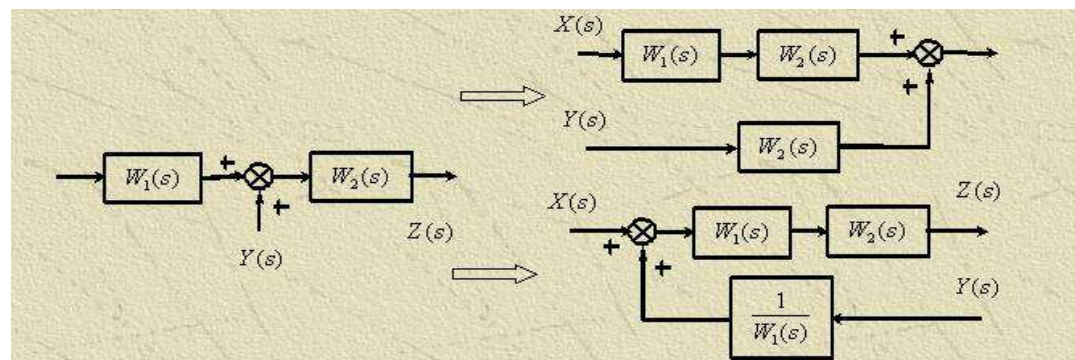
4. ჩაკეტილი კონტური დადებითი უკუკავშირით:



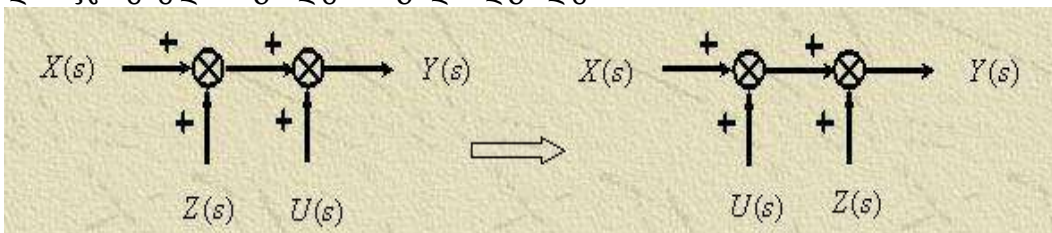
5. დინამიურ რგოლში განშტოების წერტილის გადატანა :



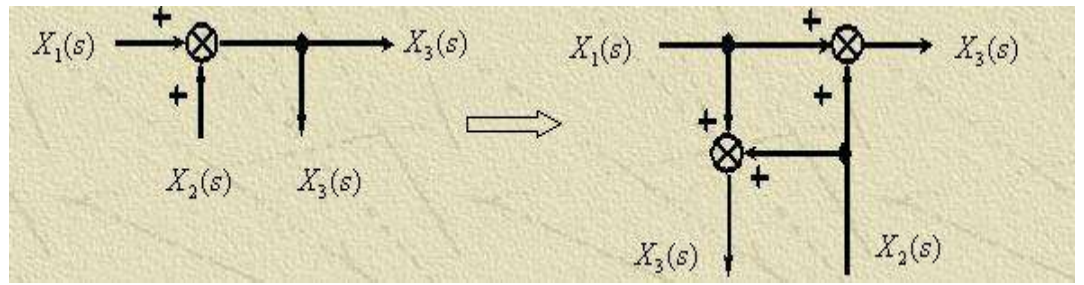
6. დინამიურ რგოლში ამჯამავის გადატანა:



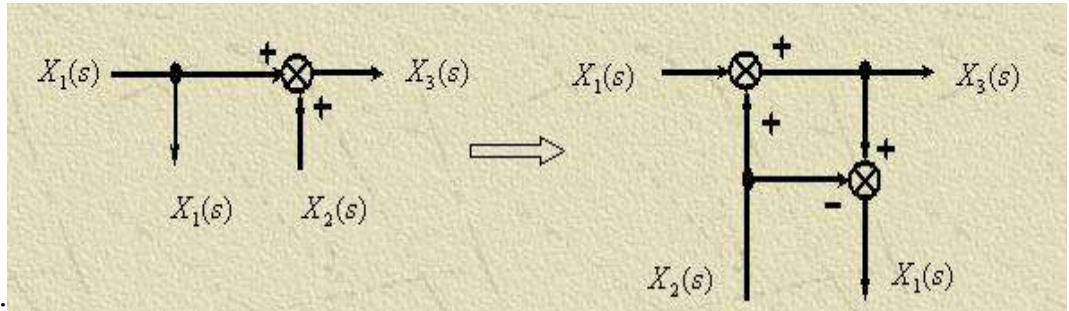
7. დასაჯამებელი რგოლების გადაადგილება:



8. განშტოების წერტილის გადატანა ამჯამავე რგოლის გამოსასვლელიდან შესასვლელზე:



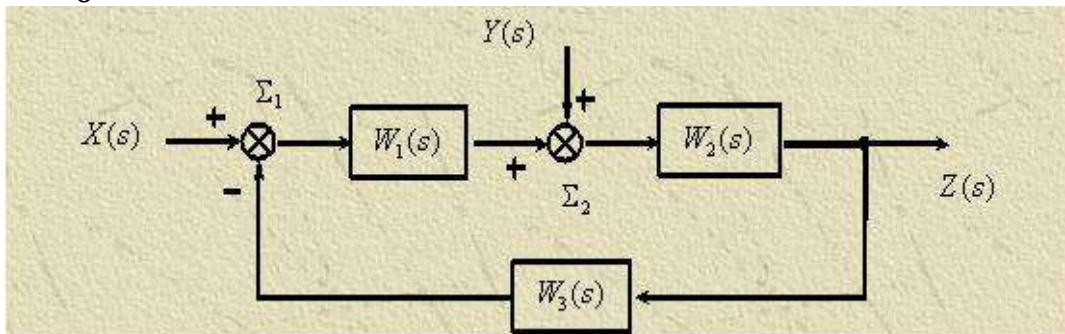
9. განშტოების წერტილის გადატანა ამჯამავე რგოლის შესასვლელიდან გამოსასვ-



ლელზე:

### 6.3. ზედღების (სუპერპოზიციის) პრინციპი

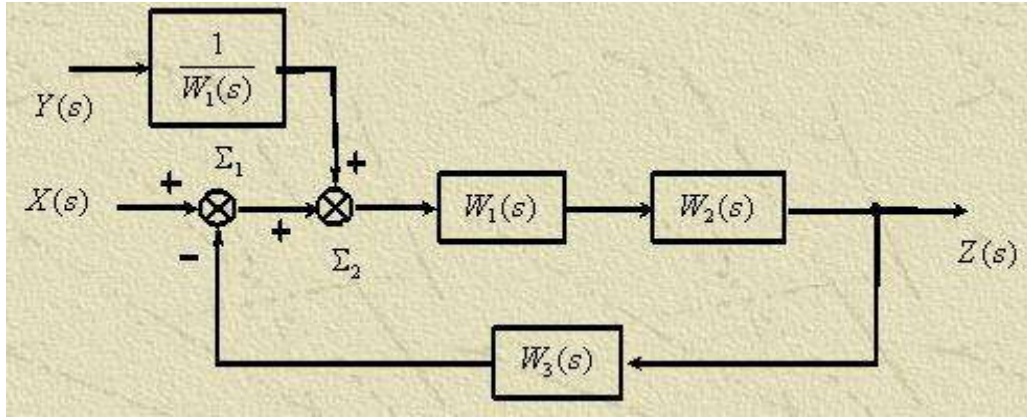
ახლა გამოვიყენოთ ზემოთ მოცემული წესები ნახ.6.11 - ზე მოცემული სტრუქტურული სქემისთვის.



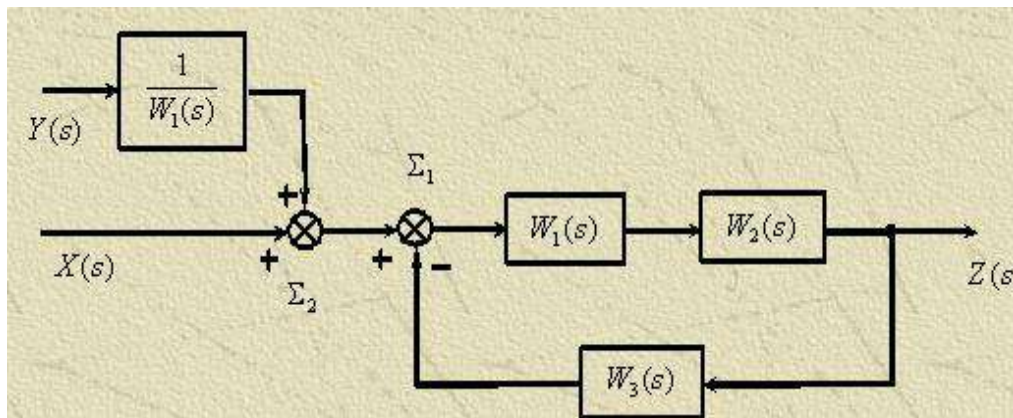
ნახ.6.11

ამ ტიპის გარდაქმნებს მოცემული სქემის შეკუმშვას უწოდებენ.

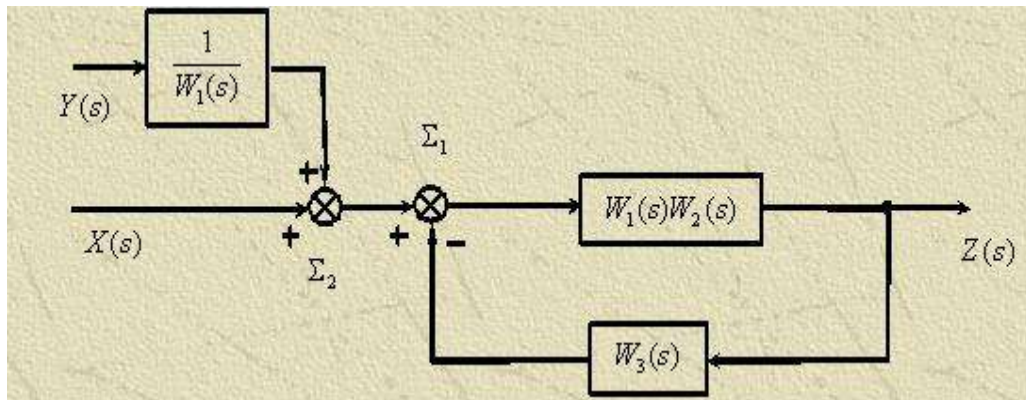
1. 6.11-ში მეორე ამჯამავე რგოლის  $\Sigma_2$ -ის გადატანა  $W_1(s)$  დინამიური რგოლის გადაღმა.



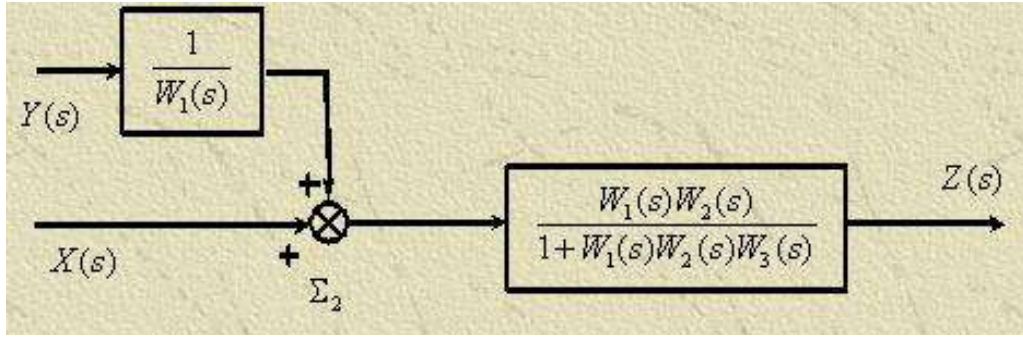
2. 6.11-ში აბჯამავ რგოლებს  $\Sigma_1$  და  $\Sigma_2$  გავუცვალოთ ადგილები:



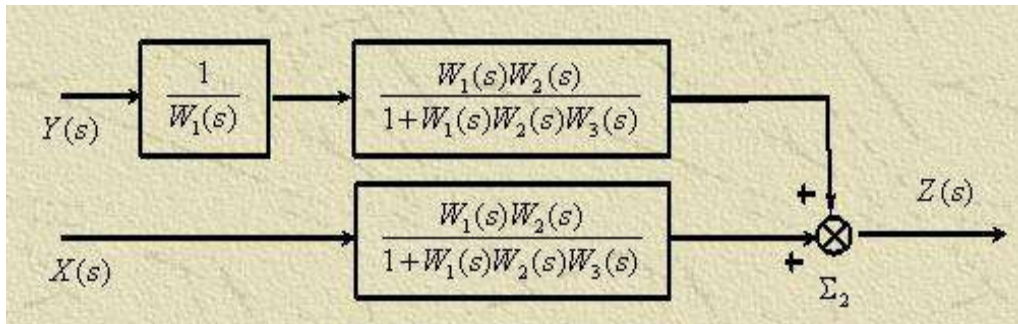
3. 6.11-ში გარდავექმნათ მიმდევრობით მოცემული დინამიური რგოლები  $W_1(s)$  და  $W_2(s)$ .



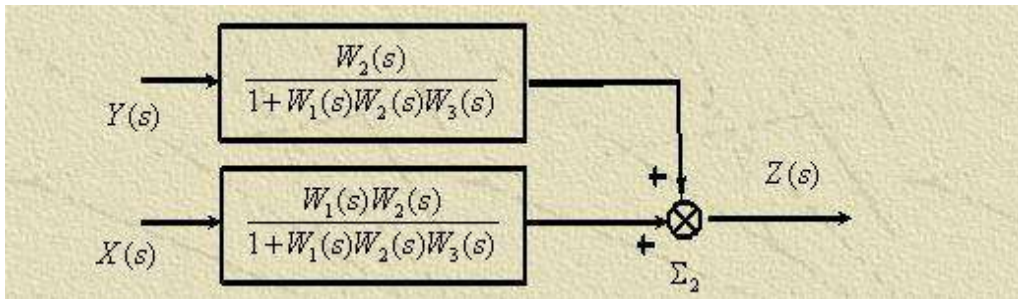
4. გარდავექმნათ ჩაკეტილი კონტური უარყოფითი უკუკავშირით ( $\Sigma_1, W_1(s)$ ,  $W_2(s)$ ,  $W_3(s)$ ).



5. ამჯამავე რგოლი  $\Sigma_2$  გადავიტანოთ მარჯვნივ:



6. გარდავექმნათ მიმდევრობით მოცემული რგოლები:



მიღებული სტრუქტურული სქემის მიხედვით ჩავწეროთ ოპერატორული განტოლება (6.3) სახით

$$Z(s) = X(s) \frac{W_1(s) W_2(s)}{1 + W_1(s) W_2(s) W_3(s)} + Y(s) \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s) W_2(s) W_3(s)} = X(s) W_{ZX}(s) + Y(s) W_{ZY}(s) \quad (6.3)$$

(6.3) განტოლებიდან ჩანს, რომ  $Z(s)$  არის  $W_{ZX}(s)$  და  $W_{ZY}(s)$ -ების წრფივი კომბინაცია. გამოვარკვით ამ კოეფიციენტების არსი  $W_{ZX}(s)$  კოეფიციენტის მაგალითზე. ამისათვის (6.3)-ში  $Y(s) = 0$ , მაშინ მივიღებთ -

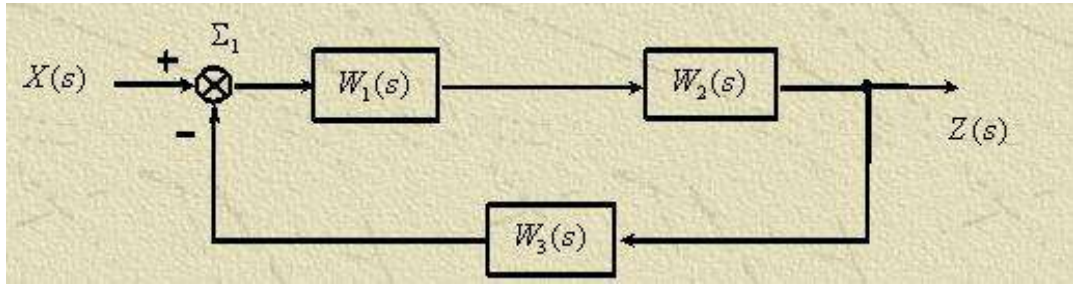
$$W_{ZX}(s) = \frac{Z(s)}{X(s)} = \frac{W_1(s) W_2(s)}{1 + W_1(s) W_2(s) W_3(s)} \quad (6.4)$$

ამგვარად, (6.4)-დან ჩანს, რომ  $W_{ZX}(s)$  არის დინამიური რგოლის გადაცემის ფუნქცია. რომლითვისაც გარდაქმნილია სტრუქტურული სქემა (ნახ. 6.11), რომელშიც ყველა შესასვლელი სიგნალი ნოლის ტოლია, გარდა  $X(s)$  - ისა.

ახლა განვიხილოთ ზედღების(სუპერპოზიციის) პრინციპის გამოყენება

(ნახ. 6.11) - ზე მოცემული სტრუქტურული სქემის მიხედვით.

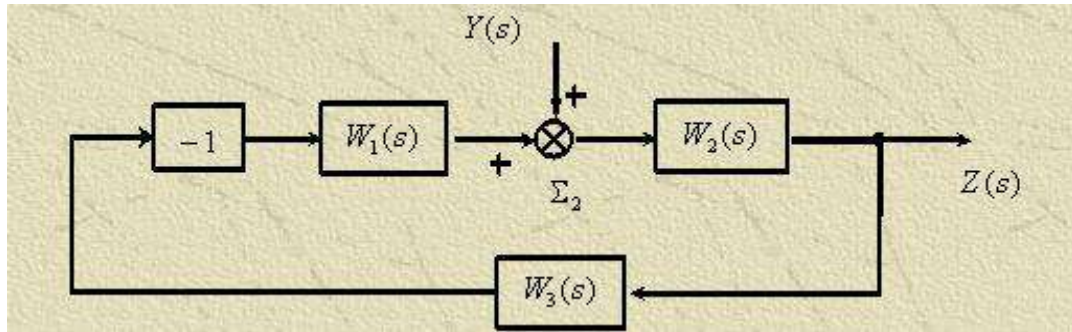
1. დავუშვათ (6.11) სქემაზე მოცემულ სისტემაში  $Y(s) = 0$  ავაგოთ ამ შემთხვევის შესაბამისი სტრუქტურული სქემა



გამოვიყენოთ ექვივალენტური გარდაქმნები, მივითღებთ გამოსახულებას (6.5):

$$W_{ZX}(s) = \frac{Z(s)}{X(s)} \Big|_{Y(s)=0} = \frac{W_1(s) W_2(s)}{1 + W_1(s) W_2(s) W_3(s)} \quad (6.5)$$

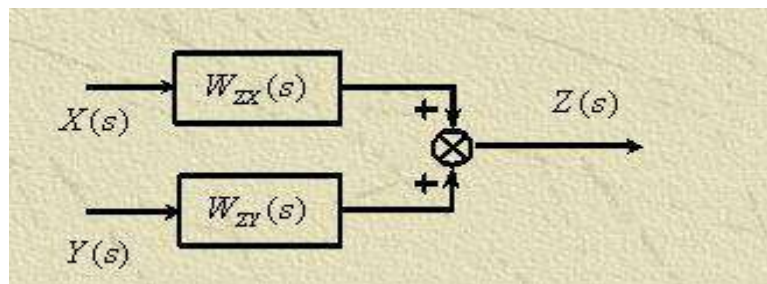
2. ახლა დავუშვათ (6.11) სქემაზე მოცემულ სისტემაში  $X(s) = 0$  და ავაგოთ ამ შემთხვევის შესაბამისი სტრუქტურული სქემა



გამოვიყენოთ ექვივალენტური გარდაქმნები, მივითღებთ გამოსახულებას (6.6):

$$W_{ZX}(s) = \frac{Z(s)}{Y(s)} \Big|_{X(s)=0} = \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s) W_2(s) W_3(s)} \quad (6.6)$$

გვაქვს რა  $W_{ZX}(s)$  და  $W_{ZY}(s)$  სიდიდეები ზედდების(სუპერპოზიციის) პრინციპის გამოყენებით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ (ნახ.6.11)-ზე მოცემული (მას) - ის სტრუქტურული სქემის გარდაქმნილი ვარიანტი



<http://drive.ispu.ru/elib/lebedev/7.html>

## თავი 7

თემა. მართვის სისტემების მათემატიკური აღწერის თანამედროვე ფორმა.

### 7.1. მართვის სისტემების მათემატიკური აღწერა მდგომარეობის სივრცის მეთოდით.

მდგომარეობის სივრცეს, ჩვეულებრივად, დინამიური სისტემის ფაზურ სივრცეს უწოდებენ, ხოლო ამ სივრცეში მოცემული წერტილის მოძრაობის ტრაექტორიას - ფაზურ ტრაექტორიას. მდგომარეობის სივრცეში იქმნება დინამიური სისტემის მოდელი, რომელიც მოიცავს შემავალ, გამომავალ და მდგომარეობის ცვლადებს, რომლებიც ერთმანეთთან არიან დაკავშირებული პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებებით, რომლებიც მოცემულნი არიან მატრიცული ფორმით. გადაცემის ფუნქციისა და სხვა სიხშირული მეთოდებისგან განსხვავებით, მდგომარეობათა სივრცული მეთოდი საშუალებას გვაძლევს ვიმუშაოთ არა მხოლოდ წრფივ სისტემებთან და ნულოვან საწყის პირობებთან. გარდა ამისა, შედარებით მარტივია მდგომარეობის სივრცეში MIMO სისტემებთან მუშაობა.

წრფივი უწყვეტი სისტემები წრფივი სისტემა, რომელსაც გააჩნია  $p$  შესასვლელი ცვლადი,  $q$  გამოსასვლელი ცვლადი და  $n$  მდგომარეობის ცვლადი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად (7.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (7.1)$$

სადაც  $x(t) \in \mathbb{R}^n; y(t) \in \mathbb{R}^q; u(t) \in \mathbb{R}^p;$

$$\dim[A(\cdot)] = n \times n, \dim[B(\cdot)] = n \times p, \dim[C(\cdot)] = q \times n, \dim[D(\cdot)] = q \times p,$$

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt};$$

$x(\cdot)$  - მდგომარეობის ვექტორი, რომლის ელემენტებს ეწოდებათ სისტემის მდგომარეობა,

$y(\cdot)$  - გამოსასვლელი ვექტორი,

$u(\cdot)$  - მართვის ვექტორი,

$A(\cdot)$  - სისტემის მატრიცა,

$B(\cdot)$  - მართვის მატრიცა,

$C(\cdot)$  - გამოსასვლელი მატრიცა,

$D(\cdot)$  - პირდაპირი კავშირის მატრიცა. ხშირად მატრიცა  $D(\cdot)$ -ს არის ნულოვანი, რაც

ნიშნავს, რომ სისტემაში არ არის პირდაპირი კავშირი.

დისკრეტული სისტემები მდგომარეობათა სივრცეში განტოლებები ჩაიწერებიან არა დიფერენციალური არამედ სხვაობიანი განტოლებების სახით (7.2):

$$\begin{aligned} x(nT + T) &= A(nT)x(nT) + B(nT)u(nT) \\ y(nT) &= C(nT)x(nT) + D(nT)u(nT) \end{aligned} \quad (7.2)$$



არაწრფივი სისტემები  $n$  - ური რიგის არაწრფივი დინამიური სისტემა შეიძლება აღიწეროს პირველი რიგის  $n$  დიფერენციალური განტოლებით ასე (7.3):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{aligned} \quad (7.3)$$

ან უფრო კომპაქტური ფორმით შეიძლება ჩაიწეროს (7.4) სახით:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{aligned} \quad (7.4)$$

პირველი განტოლება არის მდგომარეობის განტოლება, მეორე გამოსასვლელი განტოლება. გაწრფივება ზოგიერთ შემთხვევებში ( $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}$ ) მუშა წერტილის მიდამოში დინამიური სისტემის აღწერის გაწრფივება. მოცემულ რეჟიმში ( $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{const}$ ) მუშა ( $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{const}$ ) ადგილი აქვს შემდეგ გამოსახულებას:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$ .

თუ შემოვიფარგლებით  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  მდგომარეობის განტოლების პირველი ორი წევრით ტეილორის მწკრივად მისი გაშლა მიიღებს სახეს (7.5):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \approx \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t)) + \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \quad (7.5)$$

თუ ავიღებთ  $\mathbf{f}$  ვექტორ-ფუნქციის კერძო წარმოებულებს მდგომარეობის  $\mathbf{x}$  ვექტორის და მართვის  $\mathbf{u}$  ვექტორის მიხედვით მივიღებთ იაკობის მატრიცას შესაბამისი ფუნქციის სისტემისათვის (7.6)

$$\frac{\delta \mathbf{h}}{\delta \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta h_1}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta h_1}{\delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta h_q}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta h_q}{\delta x_n} \end{bmatrix} \quad \frac{\delta \mathbf{h}}{\delta \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta h_1}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta h_1}{\delta u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta h_q}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta h_q}{\delta u_p} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

ანალოგიური იაკობის მატრიცა აიგება გამოსასვლელი  $\mathbf{h}$  ფუნქციისათვისაც (7.7)

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n} \end{bmatrix} \quad \frac{\delta f}{\delta u} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta u_p} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში სამუშაო ცვლადის მიდამოში  $\delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = \dot{x}$  ამ ტოლობას, მაშინ დინამიური სისტემის გაწრფივებული აღწერა მიიღებს სახეს (7.8)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\delta x + B\delta u \\ \delta y &= C\delta x + D\delta u \end{aligned} \quad (7.8)$$

სადაც  $A = \frac{\delta f}{\delta x}$   $B = \frac{\delta f}{\delta u}$   $C = \frac{\delta h}{\delta x}$   $D = \frac{\delta h}{\delta u}$

## 7.2. მდგომარეობის ცვლადები და სივრცე.

თუ სისტემა დამოკიდებულია დროზე ( $t$  პარამეტრი) და არაწრფივია, ამ შემთხვევაში სიხშირული მეთოდების გამოყენება (სისტემის შესაბამისი ტრანსფორმაციის შემდეგ) გარკვეულ წილად რთულდება. საჭირო ხდება სხვადასხვა რიცხვითი მეთოდების გამოყენება, რომლებიც კომპიუტერზე ადვილად რეალიზებადია. ამ შემთხვევაში მოხერხებულია სისტემის წარმოდგენა მდგომარეობათა სივრცეში მდომარეობის ცვლადების გამოყენებით.

სისტემის მდგომარეობათა სისტემაში მდგომარეობის ცვლადებით წარმოდგენისათვის და მათი ამოხსნისათვის გავიხსენოთ უმაღლესი მათემატიკიდან ზოგიერთი საკითხები:

1. **მატრიცა** - ეს არის ცხრილური სახით წარმოდგენილი რიცხვები ან ობიექტები მატრიცა(მართკუთხოვანი  $m \neq n$ ) ჩაიწერება ასე (7.9):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

თუ  $m=n$  მაშინ ეს არის **კვადრატული მატრიცა** იგი წარმოდგენილია (7.10)-ზე: სვეტ-ვექტორი კი წარმოდგენილია (7.11)-ზე:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & D_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & D_n \end{pmatrix} \quad \text{ეს არის დიაგონალური მატრიცა}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ეს არის ერთეულოვანი მატრიცა}$$

ახლა გავიხსენოთ ძირითადი ოპერაციები მატრიცებზე:

1. მატრიცების შეკრება:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A+B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

2. მატრიცების გამოკლება:

$$A-B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{bmatrix}$$

3. მატრიცების გამრავლება:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}, a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}, a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}, a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}, a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}, a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}, a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

4. მატრიცის დეტერმინანტი:

რადგან (3x3) დეტერმინანტის გამოთვლის ფორმულა შედარებით ადვილია მოვიყვანოთ (4x4) დეტერმინანტის გამოთვლის ფორმულა:

ავილოთ მატრიცა A(4x4)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

A მატრიცის დეტერმინანტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\text{Det}(A) = (-1)^{1+1}a_{11} * A_1 + (-1)^{2+1}a_{21} * A_2 + (-1)^{3+1}a_{31} * A_3 + (-1)^{4+1}a_{41} * A_4.$$

სადაც

$$A_1 = \det \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad A_2 = \det \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \det \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad A_4 = \det \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

5. მატრიცის შებრუნება: რადგან მატრიცის შებრუნება მოიცავს ოთხ რთულ პროცედურას (დეტერმინანტის გამოთვლას, მიკავშირებული მატრიცის მოძებნას, მიკავშირებული მატრიცის ტრანსპონირებას და ბოლო მათგანის ყოველი ელემენტის დეტერმინანტის მნიშვნელობაზე გაყოფას), ამიტომ ავილოთ მატრიცა (3x3) განზომილებისა.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

მიკავშირებული მატრიცა აღვნიშნოთ B ასოთი:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

სადაც თითოეული  $b_{ij}$  გამოითვლება ასე:

$$b_{11} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, b_{12} = (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, b_{13} = (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$b_{21} = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, b_{22} = (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, b_{23} = (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$b_{31} = (-1)^{3+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, b_{32} = (-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, b_{33} = (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

მიკავშირებული B მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა  $B^T$  მიიღებს სახეს:

$$B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$$

საბოლოოდ A მატრიცის შებრუნებული  $A^{-1}$  მატრიცა გამოითვლება ასე:

$$A^{-1} = \frac{1}{|\det A|} B^T$$

ზემოთ მოცემული მატრიცებზე მოქმედებების განხორციელება, როგორც ვხედავთ საკმაოდ რთულია ახლა განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი

სიმარტივისთვის ავიღოთ მე-3-ე რიგის მატრიცა  $\mathbf{M}$  შემდეგი სახით:

ვთქვათ მოცემულია მატრიცა:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ჯერ მოვძებნოთ M მატრიცის დეტერმინანტი}$$

ამ დეტერმინანტის გამოთვლა იოლია ამიტომ მის გამოთვლას აქ არ დავიწყებთ ანუ პირდაპირ მივუთითებთ დეტერმინანტის მნიშვნელობას.

$$|\mathbf{M}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0. \quad \text{რადგან } \mathbf{M} \text{ მატრიცა გადაუგვარებელია, ამიტომ არსებობს } \mathbf{M}^{-1}$$

მატრიცა. მის ასაგებად საჭიროა გამოვთვალოთ მიკავშირებული  $\mathbf{M}^*$  მატრიცა. ამისათვის გამოვთვალოთ  $\mathbf{M}$  მატრიცის ელემენტების შესაბამისი ალგებრული დამატებები. სულ 9 ცალი.

მიკავშირებული მატრიცის ელემენტები შესაბამისად აღვნიშნოთ  $\mathbf{M}_{ij}$  სიმბოლოებით.

ანუ საბოლოოდ მიკავშირებულ  $\mathbf{M}^*$  მატრიცის ტრანსპონირებულ მატრიცას ექნება სახე:

$$\mathbf{M}^* = \begin{vmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} \end{vmatrix}$$

ხოლო მიკავშირებული მატრიცის ტრანსპონირებულ მატრიცას აქვს სახე:

$$(\mathbf{M}^*)^T = \begin{vmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{31} \\ \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{32} \\ \mathbf{M}_{13} & \mathbf{M}_{23} & \mathbf{M}_{33} \end{vmatrix}$$

ამ მატრიცის ელემენტები გამოვთვალოთ ქვემოთ  $\mathbf{M}$  მატრიცის მინორებით:

$$\mathbf{M}_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad \mathbf{M}_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\mathbf{M}_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \mathbf{M}_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10,$$

$$\mathbf{M}_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad \mathbf{M}_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\mathbf{M}_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \mathbf{M}_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathbf{M}_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$(\mathbf{M}^*)^T = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad . \text{ ანუ } \mathbf{M} \text{ მატრიცის შებრუნებული მატრიცა } \mathbf{M}^{-1} \text{ ს ექნება}$$

სახე:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} .$$

ახლა ეს ყველაფერი გავაკეთოთ პროგრამა **Maple**-ს საშუალებით. ჯერ გავაკეთოთ **M** მატრიცისთვის და შემდეგ მე-5-ე რიგის მატრიცა **A**-თვის. იხილე ნახ.7.1 და ნახ.7.2

```

Maple 14 - [matrica5X5 1.mws - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
[Icons]
[Icons]
[Icons]
> restart;
> M:=array(1..3,1..3,[[3,-1,0],[-2,1,1],[2,-1,4]]);

      M :=
      [
      3  -1  0
      -2  1  1
      2  -1  4
      ]

> with(linalg);
[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow,
adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky,
col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols,
delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix,
equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord,
genegns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc,
innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs,
linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace,
orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace,
rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, subbasis, swapcol,
swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]

>
> evalm(M^(-1));

      [
      1  4/5  -1/5
      2  12/5  -3/5
      0  1/5  1/5
      ]

>
Time: 0.0s Bytes: 768K Available: 398M

```

6sb.7.1



```

Maple 14 - [Shebrunebuli.mws - [Server1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
[ > restart;
  > with(linalg);
  [BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow,
    adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky,
    col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols,
    delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix,
    equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord,
    geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc,
    innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs,
    linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace,
    orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace,
    rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, subbasis, swapcol,
    swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]
  > A:=array(1..5,1..5,[[1,1,2,-3,2],[2,5,5,5,5],[3,2,5,5,1],[4,-1,2,0,3],[5,3,8,-1,4]]);
    A =
      [ 1  1  2 -3  2
        2  5  5  5  5
        3  2  5  5  1
        4 -1  2  0  3
        5  3  8 -1  4 ]
  > evalm(A^(-1));
    [ -119  5  -17  -1  67
      16  8  4  4  16
      -589 31  -87  -11 337
      80  40  20  20  80
      57  -3  17  1  -31
      10  5  5  5  10
      39  -1  7  1  -27
      40  20  10  10  40
      293  -7  39  7  -169
      80  40  20  20  80 ]
  > |

```

ნახ.7.2

იგივე მატრიცების შებრუნება **Matlab** -ში მიიღებს სახეს:

```
>> A=[3 -1 0; -2 1 1; 2 -1 4]
```

A =

```
3 -1 0
-2 1 1
2 -1 4
```

>> A^(-1)

ans =

```
1.0000 0.8000 -0.2000
2.0000 2.4000 -0.6000
0 0.2000 0.2000
```

>> B=[1 1 2 -3 2; 2 5 5 5 5; 3 2 5 5 1; 4 -1 2 0 3; 5 3 8 -1 4]

B =

```
1 1 2 -3 2
2 5 5 5 5
3 2 5 5 1
4 -1 2 0 3
5 3 8 -1 4
```

>> B^(-1)

ans =

```
-7.4375  0.6250 -4.2500 -0.2500  4.1875
-7.3625  0.7750 -4.3500 -0.5500  4.2125
 5.7000 -0.6000  3.4000  0.2000 -3.1000
 0.9750 -0.0500  0.7000  0.1000 -0.6750
 3.6625 -0.1750  1.9500  0.3500 -2.1125
```

როგორც გამოთვლებიდან ჩანს ამ პროცედურას **Maple** ასრულებს უფრო ზუსტად ვიდრე **Matlab-ი**.

### 7.3. მდგომარეობის განტოლებები.

#### 7.3.1. ნორმალური ერთგვაროვანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა.

ასეთი ტიპის განტოლებათა სისტემა წარმოვადგინოთ მატრიცული ფორმით ასე:

$$\frac{dx}{dt} = Ax . \quad (7.12)$$

ანუ გაშლილად

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n; \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n; \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n; \end{array} \right.$$

(7.12) - ში  $A$  არის კვადრატული მატრიცა ( $n \times n$ )

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(7.12)-ის ამოხსნა მოვძებნოთ  $\mathbf{x} = \mathbf{h}e^{\lambda t}$  სახით, სადაც  $\mathbf{h}$  არის თავისუფალ მუდმივიათა სვეტ-ვექტორი. თუ ჩავსვავთ  $\mathbf{x} = \mathbf{h}e^{\lambda t}$  მნიშვნელობას (7.12)-ში, მივიღებთ  $\mathbf{h}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{h}e^{\lambda t}$ .  $e^{\lambda t}$  სკალარზე განტოლების ორივე მხარის შეკვეცის შემდეგ და  $\lambda \mathbf{h}$  ერთეულოვან  $E$  მატრიცაზე გამრავლების შემდეგ გვექნება  $\mathbf{h}\lambda E = \mathbf{A}\mathbf{h}$  ანუ  $\mathbf{h}\lambda E - \mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{0}$  და საბოლოოდ  $(\lambda E - \mathbf{A})\mathbf{h} = \mathbf{0}$ . ამ მიღებულ განტოლებას ექნება ამონახსენი თუ  $(\lambda E - \mathbf{A})$  მატრიცის დეტერმინანტი ნოლის ტოლია. ანუ  $|\lambda E - \mathbf{A}| = 0$  სრულად ასე:

იმის გამო, რომ  $\mathbf{A}$  მატრიცა  $n$  განზომილებიანია, ამიტომ

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

იმის გამო, რომ  $\mathbf{A}$  მატრიცა არის  $n$  რიგის, ამიტომ  $\Delta(\lambda)$  არის  $n$ -ური რიგის მრავალწევრი  $\lambda$ -ს მიმართ, ანუ  $\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ .  $\Delta(\lambda) = 0$  განტოლების ამოხსნა გვაძლევს  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , ამ მნიშვნელობებისათვის სისტემას აქვს არატრივიალური ამოხსნა, ხოლო ამოხსნას  $(0, 0, \dots, 0)$  უწოდებენ ტრივიალურ ამონახსნს.

### 7.3.2. ფუნდამენტური მატრიცის განსაზღვრა

ნორმალური წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნს შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით  $\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{0}$  -თვის  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})$  მატრიცა წარმოადგენს ერთეულოვან მატრიცას, შესაბამისად საწყისი მნიშვნელობა  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{H}\mathbf{c}$  საიდანაც  $\mathbf{c} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{x}_0$ . ჩავსვავთ ეს მნიშვნელობა ზოგად ამონახსნის მნიშვნელობაში მივიღებთ  $\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})\mathbf{H}^{-1}$ ,  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})\mathbf{x}_0$ .  $n$  რიგის,  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t}) = \mathbf{H}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})\mathbf{H}^{-1}$  მატრიცას ეწოდება **ფუნდამენტური**.  $\mathbf{H}$  მატრიცა მიიღება  $n$  ცალი  $\mathbf{h}^{(i)}$  სვეტების გაერთიანებით, რომელიც წარმოადგენს  $(\lambda_i E - \mathbf{A})\mathbf{h}^{(i)} = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  განტოლების ამონახსნს.  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})$  მატრიცის დიაგონალური ელემენტებია ექსპონენციალური ფუნქციები  $e^{\lambda_i t}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). ახლა გამვიხილოთ მაგალითი ნორმალური წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 8x_2 + x_3; \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 - 9x_2 + x_3; \\ \frac{dx_3}{dt} = 4x_1 - 6x_2 + x_3; \end{array} \right.$$

ამ სისტემისათვის

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix}; \quad \lambda \cdot E - A = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 8 & -1 \\ -5 & \lambda + 9 & -1 \\ -4 & 6 & \lambda + 1 \end{bmatrix}.$$

ანუ დაწვრილებით ეს პროცედურა გამოიყურება ასე:

$$\lambda \cdot E - A = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 8 & -1 \\ -5 & \lambda + 9 & -1 \\ -4 & 6 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

მიღებული მატრიცის პირველი სტრიქონის ალგებრულ დამატებებს ექნებათ სახე:

$$\Delta_{11}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 9 & -1 \\ 6 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 10 \cdot \lambda + 15;$$

$$\Delta_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -4 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = 5 \cdot \lambda + 9;$$

$$\Delta_{13}(\lambda) = \begin{bmatrix} -5 & \lambda + 9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = 4 \cdot \lambda + 6.$$

მახასიათებელ განტოლებას და საკუთრივ მნიშვნელობებს ექნებათ სახე:

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= (\lambda - 4) \cdot (\lambda^2 + 10 \cdot \lambda + 15) + 8 \cdot (5 \cdot \lambda + 9) - 1 \cdot (4 \cdot \lambda + 6) = \\ &= \lambda^3 + 6 \cdot \lambda^2 + 11 \cdot \lambda + 6 = (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 2) \cdot (\lambda + 3) \\ \lambda_1 &= -1; \quad \lambda_2 = -2; \quad \lambda_3 = -3.\end{aligned}$$

Maple-ზე ამოხსნა ასე ჩაიწერება

$$\begin{aligned}\text{solve}(x^3+6*x^2+11*x+6 = 0); \\ -3, -2, -1\end{aligned}$$

საკუთრივი ვექტორების მოსაძებნად ვიქცევით ასე:

$$h^{(i)} = k_i \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_i) \\ \Delta_{12}(\lambda_i) \\ \Delta_{13}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 = -1 \text{ თვის} \\ h^{(1)} = k_1 \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) \\ \Delta_{13}(\lambda_1) \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} \lambda_1^2 + 10\lambda_1 + 15 \\ 5\lambda_1 + 9 \\ 4\lambda_1 + 6 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} (-1)^2 + 10(-1) + 15 \\ 5(-1) + 9 \\ 4(-1) + 6 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix};\end{aligned}$$

ანალოგიურად გამოითვლებიან

$$\lambda_2 = -2 \text{ თვის } h^{(2)} = k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = -3 \text{ თვის } h^{(3)} = k_3 \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

კოეფიციენტები  $k_1, k_2, k_3$  შეიძლება შევარჩიოთ ნებისმიერად, ავიღოთ მაგალი თად  $k_1 = \frac{1}{2}; k_2 = -1; k_3 = -\frac{1}{6};$

მივიღებთ :

$$h^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad h^{(2)} = -1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad h^{(3)} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ამის შემდეგ  $\mathbf{H}$  მატრიცა მიიღებს სახეს:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

შებრუნებული  $H^{-1}$  მატრიცის მისაღებად გამოვიყენოთ Maple

`H := array(1..3, 1..3, [[3, 1, 1], [2, 1, 1], [1, 2, 1]])`

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

`with(linalg) :`  
`evalm(H-1)`

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

ფუნდამენტურ მატრიცას ექნება სახე:

$$\Phi(t) = H \cdot \varphi(t) \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

ამ სამი მატრიცის გადამრავლება მოვახდინოთ Maple-ით.

$$H := \text{array}(1..3, 1..3, [[3, 1, 1], [2, 1, 1], [1, 2, 1]])$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H1 := \text{array}(1..3, 1..3, [[1, -1, 0], [1, -2, 1], [-3, 5, -1]])$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Ft := \text{array}(1..3, 1..3, [[\exp(-t), 0, 0], [0, \exp(-2t), 0], [0, 0, \exp(-3t)]])$$

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\text{evalm}(H * Ft * H1)$$

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} + e^{-2t} - 3e^{-3t} & -3e^{-t} - 2e^{-2t} + 5e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 2e^{-t} + e^{-2t} - 3e^{-3t} & -2e^{-t} - 2e^{-2t} + 5e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t} & -e^{-t} - 4e^{-2t} + 5e^{-3t} & 2e^{-2t} - e^{-3t} \end{bmatrix}$$

მოცემული ერთგვაროვანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ზოგად ამონახსნებს ექნებათ შემდეგი სახე

$$\begin{aligned} x_1 &= (3 \cdot e^{-t} + e^{-2t} - 3 \cdot e^{-3t}) \cdot x_{10} + (-3 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-2t} + 5 \cdot e^{-3t}) \cdot x_{20} + (e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot x_{30}; \\ x_2 &= (2 \cdot e^{-t} + e^{-2t} - 3 \cdot e^{-3t}) \cdot x_{10} + (-2 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-2t} + 5 \cdot e^{-3t}) \cdot x_{20} + (e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot x_{30}; \\ x_3 &= (e^{-t} + 2 \cdot e^{-2t} - 3 \cdot e^{-3t}) \cdot x_{10} + (-e^{-t} - 4 \cdot e^{-2t} + 5 \cdot e^{-3t}) \cdot x_{20} + (2 \cdot e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot x_{30}; \end{aligned}$$

სადაც  $x_{10}$ ,  $x_{20}$ ,  $x_{30}$  არიან  $x_0$  ვექტორის ელემენტები, რომლებიც შეესაბამებიან შესაბამისი ცვლადების მნიშვნელობებს





*restart*

$Q := \text{array}(1..3, 1..3, [[1, 1, 2], [3, 2, 4], [5, 3, 8]])$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$Q1 := \text{evalm}(Q^{-1})$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$W := \text{array}(1..3, 1..3, [[1, -2, 0], [0, 1, 2], [-1, -6, 4]])$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$U := \text{array}(1..3, 1..2, [[0, -1], [4, 0], [-2, 1]])$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$A = \text{evalm}(Q1 * W)$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$B = \text{evalm}(Q1 * U)$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \text{evalm}(Q \cdot Q1)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ანუ საბოლოოდ (7.13) სისტემის ნორმალური სახე  $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bv(t)$

მატრიცულად ჩაწერილი იქნება ასე:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} v(t).$$

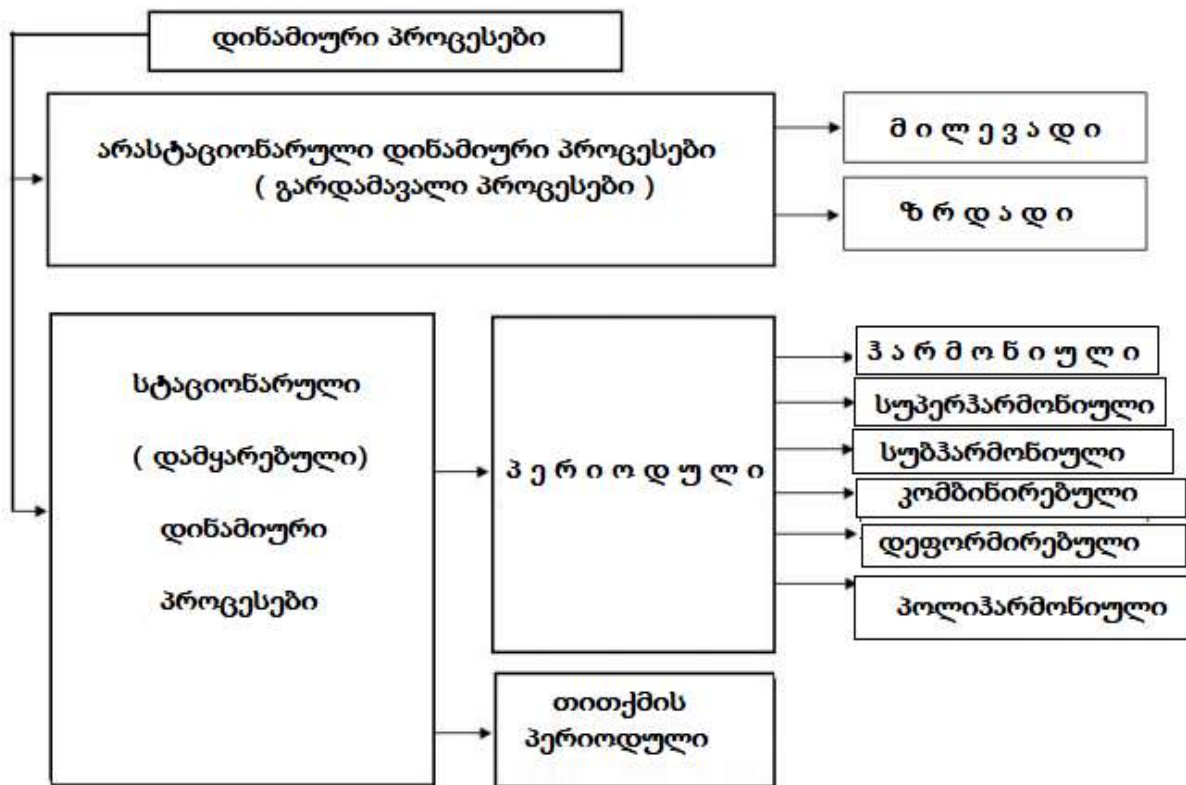
## თავი 8

### მათემატიკური მოდელები.

#### 8.1. დინამიკური სისტემების მათემატიკური მოდელები.

წინა ლექციებში ჩვენ უკვე გავეცანით დინამიკური სისტემების ზოგად მიმოხილვას. **დინამიური სისტემა** ეს არის ნებისმიერი ობიექტი ან პროცესი, რომლისთვისაც ცალსახად არის განსაზღვრული **მდგომარეობის** ცნება, როგორც გარკვეული სიდიდეების ერთობლიობა დროის გარკვეულ მომენტებში და აგრეთვე მოცემულია მათი საწყისი მდგომარეობიდან დროში ევოლუციის (განვითარების) კანონი. **დინამიური სისტემები** თავისი ხასიათის მიხედვით შეიძლება იყვნენ - ფიზიკური, ბიოლოგიური, ქიმიური, გამოთვლითი ან ინფორმაციის გარდაქმნის პროცესები. **ევოლუციის კანონი** - ეს არის დიფერენციალური განტოლებები, დისკრეტული ასახვები და სხვა.

განვიხილოთ სხვადასხვა ტიპის დინამიკური სისტემები და მათი შესაბამისი მათემატიკური მოდელები ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების გამოყენებით. არსებობს დინამიურ სისტემებში მიმდინარე პროცესების კლასიფიკაცია. განვიხილოთ ამ კლასიფიკაციის ერთ-ერთი სქემა.



**დეტერმინირებული** (განსაზღვრული) არიან ის მოდელები, რომლებშიც ყველა ცვლადები და ფუნქციები დეტერმინირებულია (განსაზღვრულია). ზოგიერთ არაწრფივ სისტემებში გვიხდება შემთხვევითი ცვლადებისა და ფუნქციების გამოყენება.

**სტოქასტური** ეწოდებათ მოდელებს, რომლებშიც გარე ზემოქმედებებიც და პარამეტრებიც წარმოადგენენ შემთხვევით ფუნქციებს.

მოვახდინოთ დინამიკური მოდელების კლასიფიკაცია:

1. წრფივობის მიხედვით:
  - წრფივები;
  - კვაზიწრფივები(ნაწილობრივ წრფივი);
  - არსებითად არაწრფივი.
2. მოდელირების პროცესების მიხედვით:
  - გარდამავალი;
  - ციკლური;
  - იძულებით რხევითი;
  - ავტორხევითი;
  - პარამეტრულ-რხევითი;
  - შერეულ-რხევითი.
3. თავისუფლების ხარისხების მიხედვით:
  - ერთი თავისუფლების ხარისხით;
  - თავისუფლების ხარისხთა სასრული რაოდენობით;
  - თავისუფლების ხარისხების უსასრულო (კონტინიალური ) დაოდენობით.

4. სისტემაში ენერჯის შენახვის მიხედვით:

- კონსერვატული;
- არაკონსერვატული;
- ავტორხევითი;
- დისიპატიური(უნივერსალური).

5. სტოქასტური ნიშნის მიხედვით:

- დეტერმინირებული(განსაზღვრული);
- სტოქასტური.

6. გარემოს ზემოქმედების მიხედვით:

- ავტონომიურები;
- არაავტონომიურები.

ახლა განვიხილოთ ზოგიერთ მათგანი დაწვრილებით:

**ავტონომიური და არაავტონომიური წრფივი და არაწრფივი დინამიკური პროცესების** მათემატიკური მოდელები იყოფიან ავტონომიურ და არაავტონომიურებად. ავტონომიურ სისტემებში გარე ზემოქმედების ფაქტორი დამოკიდებულია მხოლოდ თვით ამ სისტემის მდგომარეობაზე და დიფ. განტოლებებში დრო (t) ცხადად არ არის მოცემული **არაავტონომიური სისტემებში** კი მოცემულია ცხადად ამ განტოლებებში ფიგურირებს (t)-ის ფუნქცია. ავტონომიურობა არ ნიშნავს სისტემის ჩაკეტილობას.

ავტონომიური სისტემები შეიძლება იყვნენ **კონსერვატიული და არაკონსერვატიული** არაკონსერვატიულია - დისიპატიური და ავტორხევითი სისტემები კონსერვატიულ ავტონომიურსისტემებში სრული ენერჯია ( მექანიკურ სისტემებში) და მისი ანალოგები დროში მუდმივია.

**დისიპატიური** ეწოდება ავტონომიურ სისტემას სადაც მოცემული არიან დისიპატიური ძალები ( უნივერსალური ძალები ) , ანუ ძალები რომლებიც ეწინააღმდეგებიან მოძრაობას.

არაავტონომიური სისტემები ხასიათდებიან იმით, რომ მათში მოცემულია დროზე (t) დამოკიდებული შესაკრებები. უმეტეს შემთხვევაში ეს შესაკრებები შეესატყვისებიან გარე ზემოქმედებებს.

## **8.2.დინამიკური სისტემების წრფივი და არაწრფივი მოდელები.**

დინამიური სისტემების პირველი მათემატიკური მოდელები ეფუძნებოდა წრფივ დიფერენციალური განტოლებებს . წრფივი მოდელები გამოყენებით შესაძლებელი გახდა პირველი ფუნდამენტური შედეგების (ეფექტების) მიღება. რეზონანსი იძულებითი ვიბრაციის დროს, სხვადასხვა რეჟიმის ურთიერთქმედება რხევები მრავალგანზომილებიან დინამიკურ სისტემებში და ა.შ., მაგრამ ამ მოდელებმა საკმაოდ სწრაფად მიაღწიეს მათი გამოყენების ზღვარს. ამ დროს მიიღებოდა ფუნდამენტური შეუსაბამობა ზოგიერთ მიღებულ შედეგს შორის წრფივი მოდელების გამოყენებით, იყო შეუსაბამობა სავსე ექსპერიმენტების შედეგებში, თუნდაც უმარტივესი მექანიკური და ელექტრომექანიკური სისტემებისთვის (მაგალითად, მათემატიკური მოდელებში უსაზღვროდ მზარდი გადაწყვეტილებების არსებობის შესაძლებლობა).

დინამიური სისტემების მათემატიკური მოდელირების შემდგომ ეტაპად ითვლება მათემატიკურ მოდელებში არაწრფივი დამოკიდებულებების გათვალისწინება. პირველ ხანებში

არაწრფივი ელემენტები განიხილებოდნენ, როგორც შედარებით მცირე სიდიდეებს, მათემატიკურ მოდელებში, წრფივ მდგენელებთან შედარებით. ასეთმა სისტემებმა მიიღეს სახელწოდება **კვაზიწრფივი** მოდელებისა. მათი ანალიზის მიზნით განვითარებულ იქნა **ასიმპტოტური** მეთოდები. ამ მეთოდების გამოყენებამ მოგვცა საშუალება აღმოგვეჩინა ისეთი ახალ-ახალი ეფექტები, რომლებსაც ვერ ანალიზებდნენ წრფივი მოდელები. ამ შედეგებს შეიძლება მივაკუთვნოთ დინამიური სისტემის რამოდენიმე მდგრადი და არამდგრადი რეჟიმების არსებობა, დინამიური სისტემის ერთი და იგივე პარამეტრებისა და გარე ზემოქმედებების დროს. არეთვე საკუთრივი რხევების **არაიზოქრონულობა** ანუ საკუთრივი რხევების სიხშირის ამპლიტუდაზე დამოკიდებულება, **სუბჰარმონიული** და **ულტრაჰარმონიული** ამონახსნების არსებობა, ამონახსნთა **ბიფურკაცია**, **მდგრადი ავტორხევების** არსებობა შემოსაზღვრული ამპლიტუდით. დინამიურ სისტემებში **სინქრონიზებისა** და **გაერთიანების** ეფექტები.

შემდგომში კომპიუტერული ტექნოლოგიების განვითარებამ მოგვცა შესაძლებლობა აგვეგო არსებითად არაწრფივი დინამიური სისტემები. ახლა განვიხილოთ დინამიური სისტემების მათემატიკური მოდელების კლასიფიკაცია მათი არაწრფივობის ხარისხის მიხედვით. მოდელს ეწოდება **არაწრფივი** თუ მოდელში მონაწილე ერთ-ერთი ფუნქცია(ნებისმიერი მისი არგუმენტის მიმართ) არის არაწრფივი. მაგალითად ქანქარას წონასწორობის ქვედა მდგომარეობისთვის იძულებითი რხევების პირობებში განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(x(t)) + D \left( x(t), \frac{dx(t)}{dt} \right) = W(t),$$

სადაც,  $x(t)$  - არის წონასწორობის მდგომარეობიდან გადახრის კუთხე,  $t$ - დრო,  $\omega_0$  - მცირე საკუთარი რხევების სიხშირე,  $W(t)$  - გარე ზემოქმედება, რომლებიც არის პერიოდული ცნობილი  $T$  პერიოდით, ანუ  $W(t) = W(t + T)$ ,  $D \left( x(t), \frac{dx(t)}{dt} \right)$  - მდგენელია, რომელიც ენერჯის დისიპატიურობას გამოხატავს. ეს განტოლება წარმოადგენს არსებითად არაწრფივს, რადგან ,უცნობი  $x(t)$  ფუნქცია, შედის, როგორც არგუმენტი  $\sin(x(t))$  ფუნქციაში. ეს ფუნქცია შეიძლება გამოყენებულ იქნას რხევების, როგორც მცირე ისე საშუალო სიდიდისა და დიდი ამპლიტუდის მქონე რხევების, აგრეთვე ღერძის გარშემო ბრუნვის სიზუსტის დადგენის ანალიზისათვის. წონასწორობის მდგომარეობიდან გადახრის  $x(t)$  კუთხის მიხედვით აგებული ეს მოდელი (განტოლება ) საკმარისად ზუსტია აქ ყველა უგულებელყოფილი ფაქტორები უკვე ჩანს ამოცანის დასმის დროს. მაგალითად შესაძლებელია თავისუფალი ვარდნის აჩქარების გათვალისწინება  $x(t)$  კუთხის მიმართ. ამ შემთხვევაში  $\omega_0$  იქნება არა მუდმივი(კონსტანტა) , არამედ დამოკიდებული იქნება  $x(t)$  - ზე, რითაც მოდელის საგრძნობი გართულება არ მოხდება. ენერჯის დისიპატია ჩაწერილია ზოგადი სახით  $D \left( x(t), \frac{dx(t)}{dt} \right)$ . ტრადიციულად ეს ფუნქცია მოიცემა  $D \left( x(t), \frac{dx(t)}{dt} \right) = b \frac{dx(t)}{dt}$  სახით, სადაც როგორც წესი პარამეტრი  $b$  არის მუდმივი და ეწოდება **დისიპატიურობის კოეფიციენტი**. პერიოდული გარე ზემოქმედება  $W(t)$  ხშირად მოიცემა  $W \sin(\omega t)$  სახით (  $\omega$  - ზემოქმედების სიხშირეა,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  პერიოდით). შევნიშნოთ, რომ ჩვენ განვიხილავთ

არაწრფივ მოდელს, სადაც არ აქვს ადგილი ამოხსნების აჯამვის პრინციპს, რომლების შეესაბამებთან განტოლებათა მარჯვენა მხარეებს. შემდგომში ჩვენ განვიხილოთ არაწრფივობა გამოწვეული  $\sin(x(t))$  მდგენელებით. სხვა აქრაწრფივობებიც შეიძლება გამოკვლეულნი იქნან იგივე სქემით. განსახილველი მოდელის პერიოდული ამონახსნების მოსაძებნად, დისიპატიურობის გათვალისწინებით აქვს რა ადგილი გარდავავალ პროცესებს აქვთ მიღებადი ხასიათი და ამიტომ გარკვეული დროის შემდეგ მათი გავლენა ხდება უმნიშვნელო. ამ მოდელის ანალიზური ამოხსნა უცნობია. კომის მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდი დროის მოცემულ მონაკვეთზე, მოცემული საწყისი პირობებით, იძებნება რიცხვითი (მიახლოებითი) ამოხსნები.

თუ რხევებს არ აქვთ ძალიან დიდი ამპლიტუდა მოდელის გამარტივების მიზნით გამოიყენება შემდეგი მეთოდი:  $\sin(x(t))$  ფუნქციის ხარისხოვან მწკრივად გაშლის ფორმულიდან

$$\sin(x(t)) \approx x(t) + \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{x^{2i+1}(t)}{(2i+1)!} = \varphi(t) - \frac{x^3(t)}{3!} + \frac{x^5(t)}{5!} - \frac{x^7(t)}{7!} + \dots$$

შემოვიფარგლოთ პირველი ორი შესაკრებით

$$\sin(x(t)) \approx x(t) - \frac{x^3(t)}{3!}$$

ამის გათვალისწინებით შემდეგი სახის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \left( x(t) - \frac{1}{6} x^3(t) \right) + b \frac{dx(t)}{dt} = W \sin \omega t$$

ეს განტოლება, როდესაც ერთზე ნაკლები რხევის ამპლიტუდის დროს არის კვაზიწრფივი და მისი კვლევისათვის შეიძლება გამოყენებულ იქნას ასიმპტოტური მეთოდები ამ დროს არსებითი არაწრფივობის (ქაოსი, უცნაური ატრაქტორი) მიღება შეუძლებელია. ასეთ სისტემებში არის შესაძლებლობა მდგრადი და არამდგრადი სხვადასხვა პერიოდებში ამოხსნების არსებობის შესაძლებლობა და აგრეთვე სისტემის პარამეტრების ცვლილების ხარჯზე ამოხსნების ბიფურკაციის განხორციელება. მცირე რხევების დროს მწკრივად გაშლის ფორმულაში თუ შევინარჩუნებთ ერთ წევრს მიიღება წრფივი დიფ. განტოლება, რომელიც შეტანილია კლასიკურ სახელმძღვანელოებში:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) + b \frac{dx(t)}{dt} = W \sin \omega t$$

ამ წრფივ განტოლებას აქვს ანალიზური ამოხსნა ეს ამოხსნა Maple-ზე შეიძლება მოიძებნოს ასე:

*restart*

$$ode := diff(x(t), t, t) + w^2 x(t) + diff(x(t), t) = W sin(wt)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + w^2 x(t) + \frac{d}{dt} x(t) = W sin(wt)$$

*dsolve(ode, x(t))*

$$x(t) = e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-4w^2+1}\right)t} C_2 + e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-4w^2+1}\right)t} C_1 + \frac{W sin(wt)}{w^2}$$

წრფივი მოდელი რატომ უნდა არ შეიცავს არანაირ არაწრფივ ეფექტს და მისიუ გამოყენების სფერო საკმარისად ვიწროა. ამით ჩვენ მათემატიკური ქანქარის უმარტივესი დინამიური მოდელის საფუძველზე ჩვენ შევადგინეთ ქანქარის მოძრაობის სამი მოდელი:

1. არაწრფივი მოდელი; 2. კვაზიწრფივი მოდელი; 3. წრფივი მოდელი.

**არაწრფივი მოდელი** ამათგან ყველაზე სრულყოფილია ის შეიცავს, როგორც კვაზიწრფივ ასევე წრფივ მოდელებს თავის თავში. იგი გამოსაკვლევად საკმაოდ რთულია, მაგრამ იმდენად სრულყოფილია, რომ შესაძლებელი ხდება მოძრაობების , როგორც უბრალო ასევე რთული სახეობების აღმოჩენა.

**კვაზიწრფივი მოდელი** გვადლევს ასიმპტოტური მეთოდების გამოყენებით დინამიური სისტემის მიახლოებით კვლევას და მისი საშუალებით იძებნება სისტემის დინამიკის ზოგიერთი თვისებები.

**წრფივი მოდელები** ყველაზე მარტივი ტიპის მოდელებია ისინი გვადლევენ ანალიზური ამონახსნების მოძებნის საშუალებას, მაგრამ ამ ტიპის მოდელებს არ შეუძლიათ მრავალი არაწრფივი ეფექტები, რითაც ხასიათდებიან რეალური დინამიური სისტემები.

ამ სამივე ტიპის მოდელების გამოყენება შესაძლებელია როგორც გარდამავალი პროცესების მათემატიკური მოდელების ასევე ეკონომიკაში ციკლური პროცესების მათემატიკური მოდელების აგების დროს.

ჯერ კიდევ გასული საუკუნის 30 - იან წლებში აკადემიკოსმა მანდელშტამმა შეიმუშავა კონცეფცია არაწრფივი მოდელირების საკითხების შემდგომი სრულყოფის შესახებ. არაწრფივი მოდელირების მეთოდები დაიხვეწა და დაინერგა მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვადასხვა სფეროებში. არაწრფივი მოდელი აპრობირებული და დანერგილი რომელიღაც სფეროში ხშირ შემთხვევაში გამოყენებადია იყო სხვა სფეროშიც. ეკონომიკაში ასეთი მოდელების გამოყენება რთულდებოდა იმის გამო რომ ეკონომიკა, როგორც სოციალური ფუნქციონირების სფერო მწელად მოდელირებადი იყო მისი რთული ბუნების გამო, არ იყო განსაზღვრული ძირითადი



პარამეტრები რომელთა საშუალებითაც აიგებოდა მათემატიკური მოდელები. ამ შემთხვევაში განსაკუთრებული გავრცელება ჰპოვა რეალური სისტემის დინამიკაზე დაკვირვებამ, რის შედეგადაც გროვდებოდა მონაცემები. ამ მონაცემების დამუშავება წრფივი მოდელებით არ იძლეოდა სასურველ შედეგებს. საჭირო გახდა დაგროვილი მონაცემების აპროქსიმაცია სასურველი ფუნქციონალური დამოკიდებულების მისაღებად, ხშირად გამოიყენებოდნენ სხვადასხვა აპროქსიმაციის მეთოდები, მაგრამ ბოლო ხანებში პოპულარული გახდა ამ ემპირიული მონაცემების სპლაინებით და მაღალი ხარისხის პოლინომებით აპროქსიმაციის მეთოდებმა. მიღებულმა შედეგებმა მოგვცა საშუალება შეგვედარებინა ერთმანეთისადმი სხვადასხვა მეთოდებით მიღებული მათემატიკური მოდელების სიზუსტე დინამიური სისტემების მართვის საკითხებში.

### 8.3. კოშის ამოცანა და პერიოდული ამოხსნები

არსებობს ორი ტიპის დინამიური პროცესები და შესაბამისი მოდელები. პირველი ტიპი შეესაბამება სისტემის ერთი მდგომარეობიდან სხვა მდგომარეობაში გადასვლის პროცესს. ჩვეულებრივ, ასეთ გადასვლებს გარკვეული დროითი ინტერვალი ჭირდება და იგი იცვლება ა დროში. ასეთ გადასვლას ეწოდება **გარდამავალი პროცესია**.

მეცნიერების სხვადასხვა სფეროებში გარდამავალი პროცესი შეინიშნება დაახლოებით ერთნაირი დინამიკით. ყველა სიტუაციაში შეინიშნება მთავარი მსგავსება დინამიური სისტემებისა, ანუ ყველგან ხდება გადასვლა სისტემის ერთი მდგომარეობიდან მეორე მდგომარეობაში. მაგალითად:

- ელექტრო მოწყობილობის ჩართვა;
- ავტომობილის დაძვრა ადგილიდან;
- თვითმფრინავის აფრენა;
- თვითმფრინავის დაფრენა;
- წყალმოვარდნისას კაშხალის ჩამკეტების გახსნა;
- ყინული დნობის პროცესი;
- ვულკანის ამოფრქვევა;
- მიწისძვრა;
- ჭექა-ქუხილი და სხვა მრავალი დინამიური სისტემები.

გარდამავალი პროცესების მათემატიკური მოდელების ერთ-ერთ მეთოდს წარმოადგენს **ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის კოშის ამოცანა**. ეს ამოცანა ყალიბდება შემდეგნაირად:

მოიცემა  $n$  არაწრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სიმრავლე შემდეგი სახით:

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k([t], x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$x_k(t_0) = \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

გამლილი სახით ასე ჩაიწერება:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1([t], x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_1(t_0) = \xi_1 \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2([t], x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_2(t_0) = \xi_2 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = f_n([t], x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_n(t_0) = \xi_n \end{array} \right.$$

მოიცემიან აგრეთვე  $n$  საწყისი პირობების შესაბამისი ტოლობები დროის მოცემულ  $t_0$  მომენტში. დრო  $t$  თითოეული განტოლები მარჯვენა მხარეში ჩასმულია კვადრატულ ფრჩხილებში რაც იმას უსვანს ხაზს, რომ ისინი (მარჯვენა მხარეები) შეიძლება ცხადი სახით იყვნენ დამოკიდებულნი  $t$  დროზე (არაავტონომიურ სისტემებში) და შეიძლება არ იყვნენ ცხადად დამოკიდებულნი დროზე (ავტონომიურ სისტემებში). ბუნებრივია განტოლებათა მარჯვენა მხარეში მოცემული ცვლადებიდან კონკრეტულ განტოლების მაჯვენა მხარეებში  $f_k([t], x_1, x_2, \dots, x_n)$  ზოგიერთები ფიგურირებდნენ ზოგიერთები კი არა.

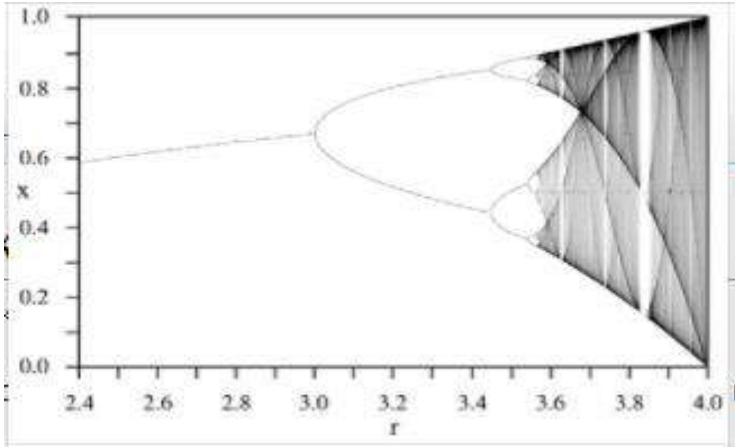
მაღალი რრიგის დიფ განტოლებები შეიძლება მიყვანილ იქნან წარმოდგენილი წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე. უნდა ითქვას, რომ საწყისი პირობების რაოდენობა  $t = t_0$  მომენტში, ემთხვევა განტოლებათა სისტემის რიგს. გარკვეულ შემთხვევებში შესაძლებელია ამ განტოლებათა სისტემის ანალიზური (ზუსტი ფუნქციონალური) ამონახსნის მოძებნა. იმ შემთხვევაში კი, როდესაც ანალიზური ამოხსნა არ არსებობს, გამოიყენება კომპიუტერული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის რომელიმე მეთოდი ( ეილერის, სხვადასხვა რიგის რუნგე-კუტას, ბულიმ-შტერნის და სხვა). ეს მეთოდები თანამედროვე კომპიუტერზე მოცემულია მათემატიკური მოდელირების პროგრამებში ისეთებში, როგორებიცაა Matlab , Maple და სხვები. ასე რომ ასეთი ამოცანების გადაწყვეტა თანამედროვე კომპიუტერული პროგრამების გამოყენებით სიძნელეს აღარ წარმოადგენს.

დინამიურ სისტემებში მიმდინარე პროცესების მეორე ტიპი შეესაბამება ჩვეულებრივი დიფ განტოლებების სისტემის პერიოდული ამოხსნის საკითხს. ამ დროს უნდა გავითვალისწინოთ ის გარემოება, რომ რთული დინამიური სისტემების ციკლურობას მაგალითად ეკონომიკაში შეიძლება არ ჰქონდეს მკაცრად განსაზღვრული პერიოდი ანუ არ მეორდებოდეს მკაცრად განსაზღვრული პერიოდით, მაგალითად ეკონომიკური კრიზისის შემთხვევაში. დინამიური სისტემების მათემატიკური მოდელირების საკითხში პერიოდულობა განიხილება, როგორც ფუნქციის პერიოდულობა კლასიკური მათემატიკური განსაზღვრებით.

ამ შემთხვევაში მოიცემა ჩვეულებრივად დიფ განტოლებათა სისტემა

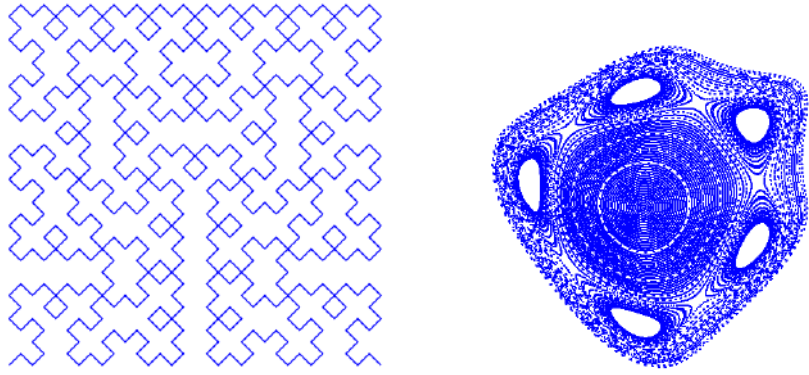
$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k([t], x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

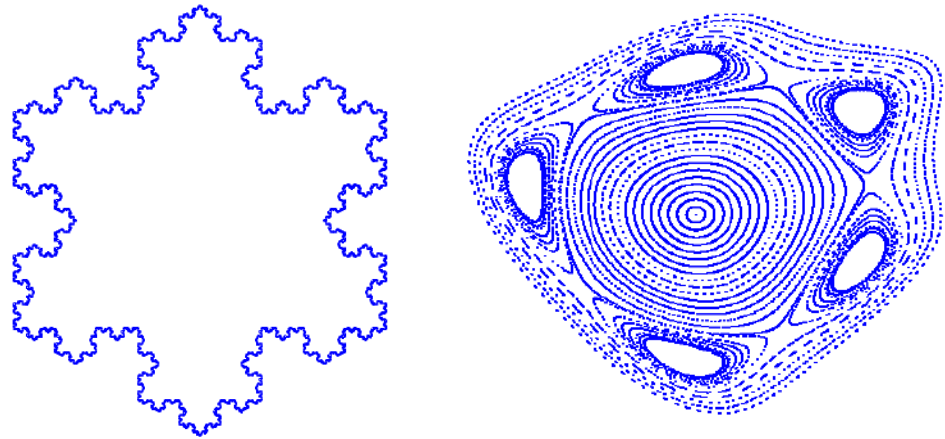
და ამ ამოცანისთვის ისმება პერიოდული ამონახსნის მოძებნის ამოცანა. ამასთან პერიოდი ან წინასწარ არის მოცემული, ან ექვემდებარება შემდგომ განსაზღვრას. ამ ამოცანის ისეთივე ეფექტური ამოხსნის ალგორითმები არ არსებობს, როგორც კომის კლასიკური ამოცანებისას. ეს აიხსნება ამოცანის სირთულით. არსებობენ არაწრფივი სისტემები, რომლებსაც გააჩნიათ რამოდენიმე მდგრადი პერიოდული ამოხსნა, შესაძლებელია ამოხსნათა ბიფურკაცია



**ნახ. 8.1 ბიფურკაციაში გადასვლა**

ეს არის გადასვლა მოწესრიგებული ცვლილებებიდან **ქაოსზე** ანუ გადასვლა უბრალო პერიოდული რეჟიმიდან რთულ **აპერიოდულ** რეჟიმზე, როდესაც ხდება პერიოდის უსასრულო „გაორება“ მოიცემა ფეიგენბაუმის მიმდევრობა რომელსაც აქვს ფრაქტალური სტრუქტურა. მაგალითად იანოს მრუდი , ატრაქტორი, კოხის ფიფქები და სხვა





## 8.2 ფრაქტალური გამოსახულებების ძირითადი ნიშანია უსასრულოდ გამეორებადი ერთნაირი სტრუქტურები.

### 8.4. ციკლური პროცესები.

ციკლური პროცესი ეწოდება პროცესს თუ ამ პროცესის შიგნით გამოთვლები ხორციელდება მრავალჯერ ერთი და იგივე ფორმულებით გამოთვებში მონაწილე ცვლადების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის. ალგორითმული და პროგრამული სტრუქტურა ციკლი გულისხმობს მოქმედებათა გარკვეული ოპერატორების მრავალჯერად წინასწარ მოცემულ ან წინასწარ განუსაზღვრელ რაოდენობაჯერ შესრულებას. ამ მრავალჯერ შესრულებად ერთი და იგივე ოპერატორთა თანმიმდევრობას ეწოდება ციკლის ტანი.

ეკონომიკურ სისტემების მოდელირებისას მაგალითად, ციკლური პროცესი ეწოდება პროცესს, რომელიც ასე თუ ისე მეორდება დროის გარკვეული პერიოდის შემდეგ. საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში უფრო მიღებული ტერმინი ციკლის ნაცვლად რხევები (vibration, oscillation) უკვე დიდი ხანია არსებობს დისციპლინარშორისი სამეცნიერო მიმდინარეობა რხევათა თეორიის სახელწოდებით. განსხვავება მხოლოდ მდგომარეობს იმაში, რომ ეკონომიკურ სისტემებში მათემატიკურად მკაცრად განსაზღვრული ციკლურობა და პერიოდულობა პრაქტიკულად არ გვხვდება. ხოლო საბუნებისმეტყველო სფეროში ასეთი პროცესები წარმოადგენენ კვლევის ჩვეულებრივ ობიექტებს. საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში არსებითად არაწრფივი ობიექტების მათემატიკური მოდელირების კვლევისას მოძებნილია ისეთი ამოხსნები, რომლებიც თითქმის ანალოგიურია ეკონომიკაში მიმდინარე პროცესებისა. ლაპარაკია მიახლოებით პერიოდულ ამოხსნებზე, ამოხსნების ქაოსურ ბუნებაზე დეტერმინირებულ სისტემებში, ამონახსნთა ბიფურკაციაზე, არაწრფივ მოდელეებში პოლიჰარმონიული და სხვა გარკვეული ეფექტები, რომელთა არსებობა მოსალოდნელია არსებითად არაწრფივ სისტემებში. თუ გამოვალთ იქიდან, რომ საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში დინამიური მოდელეების აგება დაიწყო უფრო ადრე ვიდრე ეკონომიკაში და ტერმინოლოგია უკვე საკმაოდ ჩამოყალიბებული იყო, ამიტომ ეკონომიკაში მიმდინარე ციკლური პროცესების აღსანიშნავად ხშირად გამოიყენებიან ისეთი ტერმინები, როგორც არის მაგალითად რხევები, რხევათა თეორიიდან.

რეალურ ეკონომიკურ სისტემებში ხშირად გამოიყენება ტერმინი **იძულებითი რხევები**, რომლებიც დაკავშირებული არიან გარე ფაქტორებზე და პერიოდული ხასითისანი არიან. ეკონომიკაში ასეთ რხევებს მიეკუთვნება სამეურნეო სფეროს ფუნქციონირების მექანიზმზე პერიოდული გარე ზემოქმედებები. კლიმატის სეზონური ცვლილებები, პერიოდული საინვესტიციო აქციები. ტექნიკაში ასეთი ზემოქმედებების მაგალითებია სატრანსპორტო საშუალებების ვიბრირება, რომელიც უმეტეს წილად გადმოეცემა ძრავიდან, ბუნებაში ასეთებია ზღვის მოქცევა-უკუქცევები, რომლებიც გამოწვეულია მთვარის მიზიდულობისაგან. მოდელის ერთ-ერთი მაგალითია მათემატიკური ქანქარას იძულებითი რხევების განტოლება ან მისი გაწრფივებული ვარიანტი. **ავტორხევებს** (Self-excited vibration) ტიპის რხევები, როგორც წესი მდგრადია და მათი გამომწვევი წყაროები არ არიან ციკლურები. ავტორხევების ერთერთ მაგალითია მექანიკური საათის (სადაც ენერჯის წყაროა „გირის“ პოტენციალური ენერჯია, ან ზამბარის ან „ბატარეის“ ელ.ენერჯია კვარცულ საათებში). თვითმფრინავის ფრთების რხევები გამოწვეული ჰაერის აერო-დინამიკური ნაკადებით, სიმებიან ინსტრუმენტებზე დასაკრავი მშვილდის (violin bow) ენერჯია არის ავტორხევითი, ადამიანის ხმა დაკავშირებული ხმის გარდამქმნელი იოგების ავტორხევებთან. ამას გარდა არის კიდევ უამრავი სახეობის რხევები, რომლებიც ჩვენს გარემომცველ სივრცეში უხვად მოიპოვებიან. ეკონომიკაში გარე ზემოქმედებით გამოწვეული ავტორხევითი მოვლენების გაცალკეება სხვა რხევებისაგან ძნელია. ასეთ რხევებს მიეკუთვნება ფასების ციკლური ცვლილება, ვალუტის კურსის ცვლილება სტაბილურ ეკონომიკურ სიტუაციაში. ავტორხევითი პროცესები ყველაზე ხშირად ვითარდება დისიპატიურ სისტემებში, მაგალითად განტოლება:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx + \gamma x^3 = 0$$

როცა  $b < 0$  მაშინ ადგილი აქვს ზრდადი ამპლიტუდის ავტორხევას (ანუ ამ დროს ხდება სისტემაში ენერჯის შემოდინება), როცა  $b > 0$  სისტემაში წარმოიქმნებიან მილევადი რხევები (ამ დროს ხდება სისტემაში ენერჯის დისიპაცია) ხოლო როცა  $b = 0$  სისტემა არის კონსერვატიული ხდება ენერჯის შენახვა რხევა მიმდინარეობს საწყისი პირობებით განსაზღვრული მუდმივი ამპლიტუდით. **პარამეტრული რხევები** (Parametric vibration) არიან რხევები, რომლების პერიოდული მხარდაჭერა ანუ გაძლიერება ხდება. მაგალითად ადამიანის საქანელაზე ჩამუხვლით საქანელის რხევის ამპლიტუდის შენარჩუნება ან გაზრდა. ეკონომიკაშიც შესაძლებელია ასეთი ტიპის რხევების გამოწვევა. პარამეტრული რხევების შემცველია მათემატიკური ქანქარის განტოლებით მოცემულ მოდელში, სადაც ქანქარის დაკიდვის წერტილი ახდენს რხევას სიმძიმის  $g$  ძალის მიმართულებით  $\xi(t)$  წესით (მათემატიკური კანონით). ასეთი მოძრაობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \left( 1 + \frac{1}{g} \frac{d^2\xi(t)}{dt^2} \right) \sin(x(t)) = 0$$

ჩამოვთვალეთ დამატებითი ცნებები და ზოგიერთი უფრო რთული ტიპის რხევები, რომლებიც შეიძლება არსებობდეს არაწრფივ დინამიურ სისტემებში.

**ჰარმონიული რხევები (Harmonic vibration)** - ეს არის რხევები ცვლადი სიდიდე და (ან) მისი წარმოებული დროში პროპორციულია არგუმენტის სინუსისა და დროზე არის წრფივად დამოკიდებული.

**ჰარმონიულ-პერიოდული რხევები (Harmonic)**-ეს არის რხევები როდესაც პერიოდული რხევების თითოეული შესაკრებები წარმოადგენენ ჰარმონიული რხევების ჯამს (ფურიეს მწკრივი)

**პოლიჰარმონიული რხევები (Polyharmonic)** - ეს არის რხევები, როდესაც შესაკრებები შეიცავენ სხვადასხვა ჰარმონიულ რხევებს (ფურიეს მწკრივების რამოდენიმე შესაკრებს).

T პერიოდის მქონე  $x(t)$  პერიოდული ფუნქციებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ დირიხლეს პირობას ( შემოსაზღვრულობა, ექსტრემუმების სასრული რიცხვი და ექსტრემუმის წერტილთა სასრული რაოდენობა ნებისმიერ სასრულ ინტერვალზე) შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ფურიეს მწკრივის სახით:

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

ეს წარმოდგენა გვაძლევს საშუალებას პერიოდული რხევები წარმოვადგინოთ სიხშირული ჰარმონიული რხევების ჯამის სახით, რომლებიც ჯერადია ძირითადი  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . ხოლო  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  კოეფიციენტებს ეწოდებათ **ფურიეს კოეფიციენტები**.  $\frac{a_0}{2}$  კოეფიციენტი შეესაბამება პერიოდულად ცვლადი სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობას.  $a_1, b_1$  კოეფიციენტები შეესაბამებიან ძირითადი  $\omega$  სიხშირის მქონე მოძრაობებს. ეს შემადგენლები იწოდებიან პირველ ანუ **ძირითად ჰარმონიკად** პერიოდული მოძრაობებისა (რხევებისა). კომპონენტები რომელთათვისაც  $k > 1$  ახასიათებენ შესაბამის პერიოდულ  $k\omega$  სიხშირის მქონე რხევებს. ფურიეს მწკრივები პერიოდული პროცესებისათვის შეიძლება იყვნენ, როგორც სასრული ასევე უსასრულო სახის.

პერიოდული პროცესების **სპექტრალური ანალიზი** T პერიოდის მქონე  $x(t)$  პერიოდული ფუნქციებისათვის, ფურიეს კოეფიციენტების განსასაზღვრავად ვიყენებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt, (k = 0, 1, \dots); \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt, (k = 0, 1, \dots);$$

ცალკეული ჰარმონიული რხევების ამპლიტუდა (Amplitude) გამოითვლება ასე:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

ცალკეული ჰარმონიკების საწყისი ფაზა გამპოტვლება ასე:  $tg(\varphi_k) = \frac{b_k}{a_k}$

პერიოდული პროცესის **სიხშირული სპექტრი** (Frequency spectrum) - ჰარმონიული ტიპის სიხშირეების ზრდადობის მიხედვით დალაგებული ერთობლიობა.

პერიოდული პროცესის **ამპლიტუდური სპექტრი** (Amplitude spectrum) - ცალკეული ჰარმონიკების ზრდადობით დალაგებული ამპლიტუდების ერთობლიობა.

**მილევადი რხევები** (Decaying vibration) – დროში მილევადი ამპლიტუდიანი რხევები.

**ზრდადი რხევები** (Increasing vibration) – დროში ზრდადი ამპლიტუდიანი რხევები.

**ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლები** (Amplitude frequency characteristic) - რხევათა ამპლიტუდის სიხშირეზე დამოკიდებულება.

**თავისუფალი რხევები** (Free vibration) - რხევები, რომლებიც დამოკიდებულნი არიან დინამიური სისტემის საწყის მდგომარეობაზე გარე ზემოქმედებების გარეშე.

**თავისუფალი სიხშირე** (Natural frequency) - წრფივი კონსერვატიული დინამიური სისტემის ყველა არამილევადი რხევების ერთობლიობა.

**თავისუფალი რხევების სიხშირე** (Free vibration frequency) - წრფივი დისიპატიური სისტემების ყველა თავისუფალი მილევადი რხევების ერთობლიობა.

**საკუთრივ სიხშირეთა სპექტრი** (Natural frequency spectrum) - საკუთრივ სიხშირეთა ერთობლიობა.

**რეზონანსი** (Resonance) - დინამიური სისტემის მახასიათებლების მკვეთრი ცვლილება სისტემის საკუთარი სიხშირის გარე ზემოქმედებლის სიხშირესთან ზუსტი ან მიახლოებითი თანხვედრისას.

**რეზონანსული სიხშირე** (Resonance frequency) - ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლების ერთერთი მაქსიმალური მნიშვნელობის ტოლი სიხშირე.

**ანტირეზონანსული სიხშირე** (Antiresonance frequency) - ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლების ერთერთი მინიმალური მნიშვნელობის ტოლი სიხშირე.

**დინამიური სიხისტე** (Dynamic stiffness) - ფარდობა გარე ჰარმონიული ამპლიტუდისა გარე იძულებითი რხევების ამპლიტუდასთან.

**წინალობის კრიტიკული კოეფიციენტი** (Critical damping coefficient) - წინალობის (დისიპატიის) კოეფიციენტის ის მნიშვნელობა, რომლის დროსაც დინამიური სისტემა წყვეტს რხევას.

**თითქმის პერიოდული რხევები (კვაზიპერიოდული)** (Almost-periodic vibration, quasiperiodic vibration) - თითქმის ანუ პერიოდულ რხევებთან მიახლოებული რხევები, რომლებიც შედგებიან არათანაზომადი ჰარმონიკებისაგან.

**შემთხვევითი რხევები** (Random vibration) - ეს არის რხევები, როცა გარე ზემოქმედება ან სისტემის პარამეტრები წარმოადგენენ შემთხვევით ფუნქციებს, შემთხვევითი რხევები სრულად რეალიზებულ შეიძლება იქნან სრულად დეტერმინირებულ არსებითად არაწრფივ სისტემებში.

**სინქრონული რხევები** (Synchronous vibration) - ორი ან მეტი სისტემების ტვის ერთნაირი ერთნაირი სიხშირეების არსებობა.

**სინფაზური გეომეტრიული რხევები** (In-phase vibration) - ფაზების ნებისმიერ მომენტში სინქრონული ჰარმონიული რხევები.

**პულსირებადი რხევები** (Beat) - მახლობელი სიხშირეების მქონე ერთზე მეტი ჰარმონიული რხევების აჯამვის შედეგი.

**სუპერჰარმონიული (ულტრაჰარმონიული) რხევები** (Superharmonic vibration) - იძულებითი პერიოდული ჰარმონიკის რხევები, რომლებიც მთელ რიცხვჯერ აღემატება გარე ზემოქმედე-

ბის რხევების სიხშირეს.

**სუბჰარმონიული რხევები** (Subharmonic vibration) - იძულებითი პერიოდული ჰარმონიკის რხევები, რომლებიც მთელ რიცხვჯერ ნაკლებია გარე ზემოქმედების რხევების სიხშირეზე.
















**რხევები რამოდენიმე (სასრული რაოდენობის) თავისუფლების ხარისხით** (Oscillations with several degrees of freedom (oscillations of systems with finite number of degrees of freedom)) – ერთმანეთზე დამოკიდებული რამოდენიმე დინამიური სისტემის რხევები.

**უსასრულო თავისუფლების ხარისხების მქონე რხევები** (Oscillations with an infinite number of degrees of freedom) - ხრევები განაწილებულ (კონტინუალურ) სისტემებში.

**შერეული ხასიათის რხევები** (Mixed oscillations) - ზემოთ ჩამოთვლილი რხევების ურთიერთშერევა.

## 8.5. ელექტრული სისტემები.

მოვიყვანოთ ელექტრო სისტემების მაგალითები

 ბრუნვათა რეგულატორი	 სიხშირული გარდამსახები	 გადამწოდები (გამზომები)
 კონტროლერები	 სარქველების რეგულატორი	 ცირკულარული ტუმბოები
 ელექტრო ძრავების დამცველი ავტომატები	 დისტანციური მართვის პულტი	 ელექტროამმრავი
 წნევის ვარდნის რელე	 გაყინვის საწინააღმდეგო კაპილარული თერმოსტატი	
 CO2 - ის გამზომი გადამწოდი	 ტენიანობის მზომი გადამწოდი	
 ტემპერატურის გამზომი გადამწოდი	 დისტანციური მართვის (მობილური დისფლეი) პულტი	



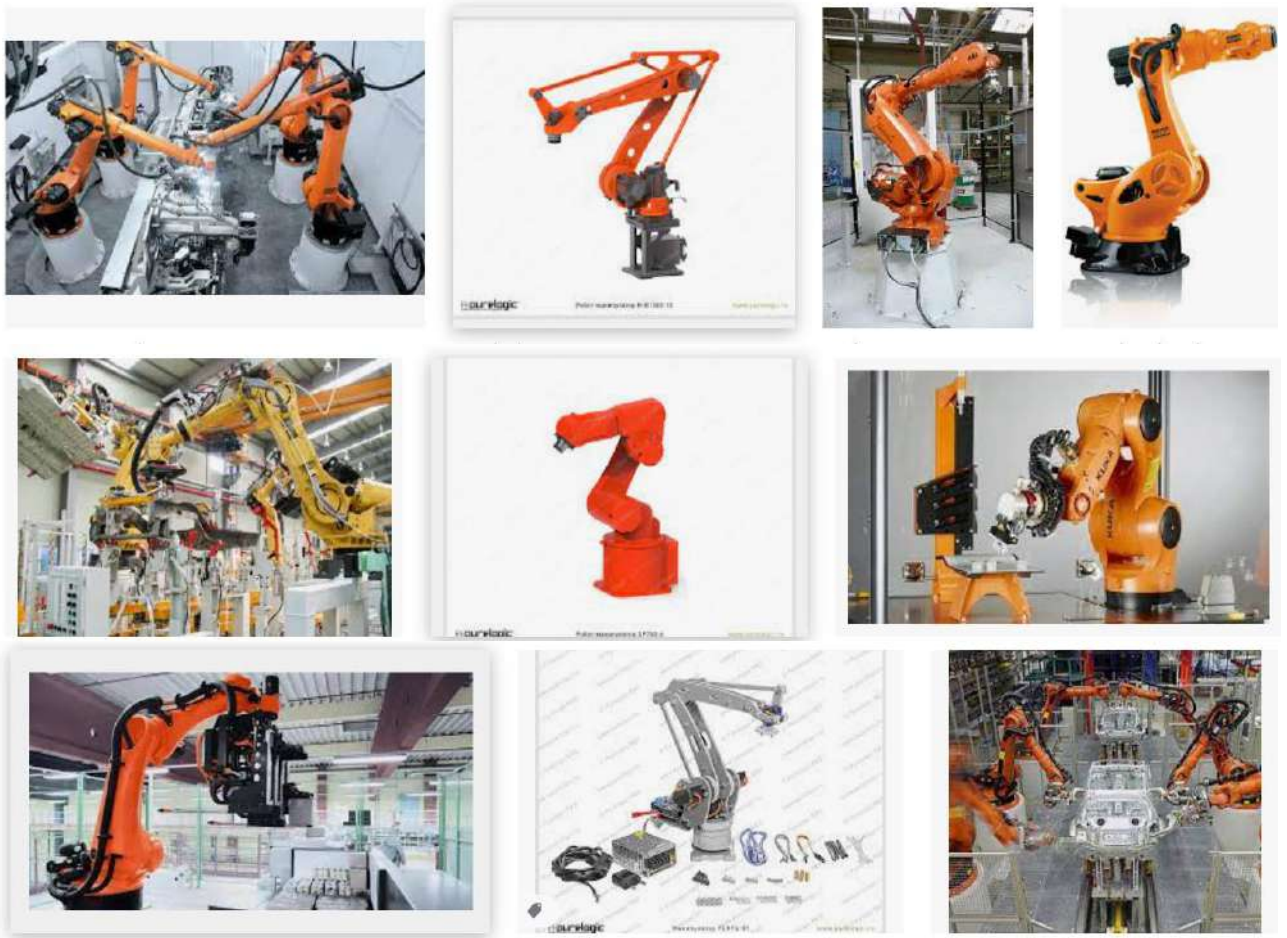


ჩვენ მოვიყვანეთ ელექტრული, ელექტრო-მექანიკური, თერმული, ჰიდრავლიკური ავტომატური მართვის სისტემების მცირე მაგალითები, რეალურად შექმნილი და წარმატებით ექსპლოატირებული ელ. სისტემები უამრავია და გამოიყენებიან მეცნიერების, ტექნიკის და ყოფაცხოვრების მრავალ სფეროებში.

### 8.6. რობოტი-მანიპულატორები;

სამრეწველო რობოტი მანიპულატორები





რობოტი კარისკაცი



სრულად რობოტიზებული საამქრო



ინტელექტუალური საწარმოო რობოტები.



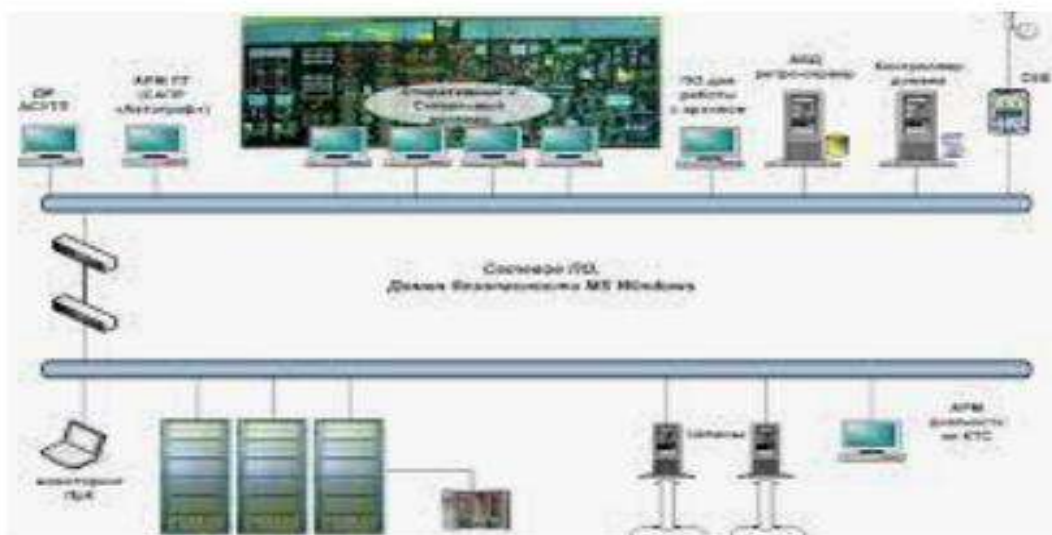
## 8.7. ენერგეტიკული სისტემები.



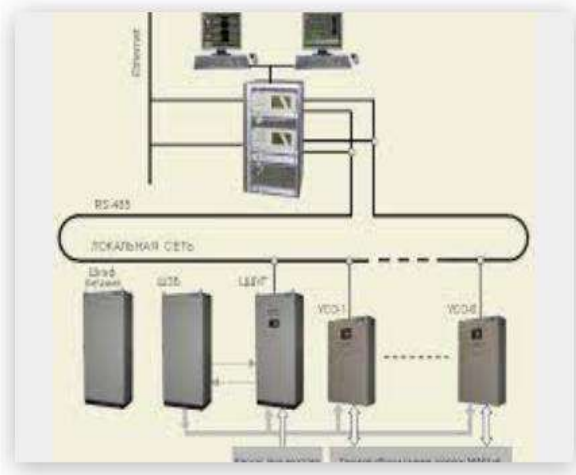
გაზ-ტურბინული დანადგარი მ.ა.ს-ი



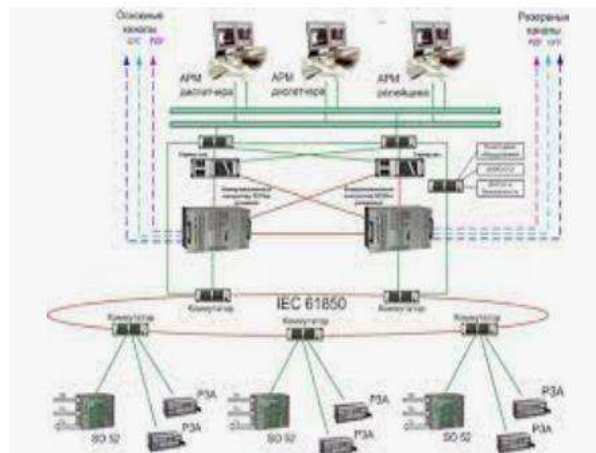
ნავთობგადამამუშავებელი ქარხნის მ.ა.ს-ი



ელექტრო სადგურის მ.ა.ს-ი

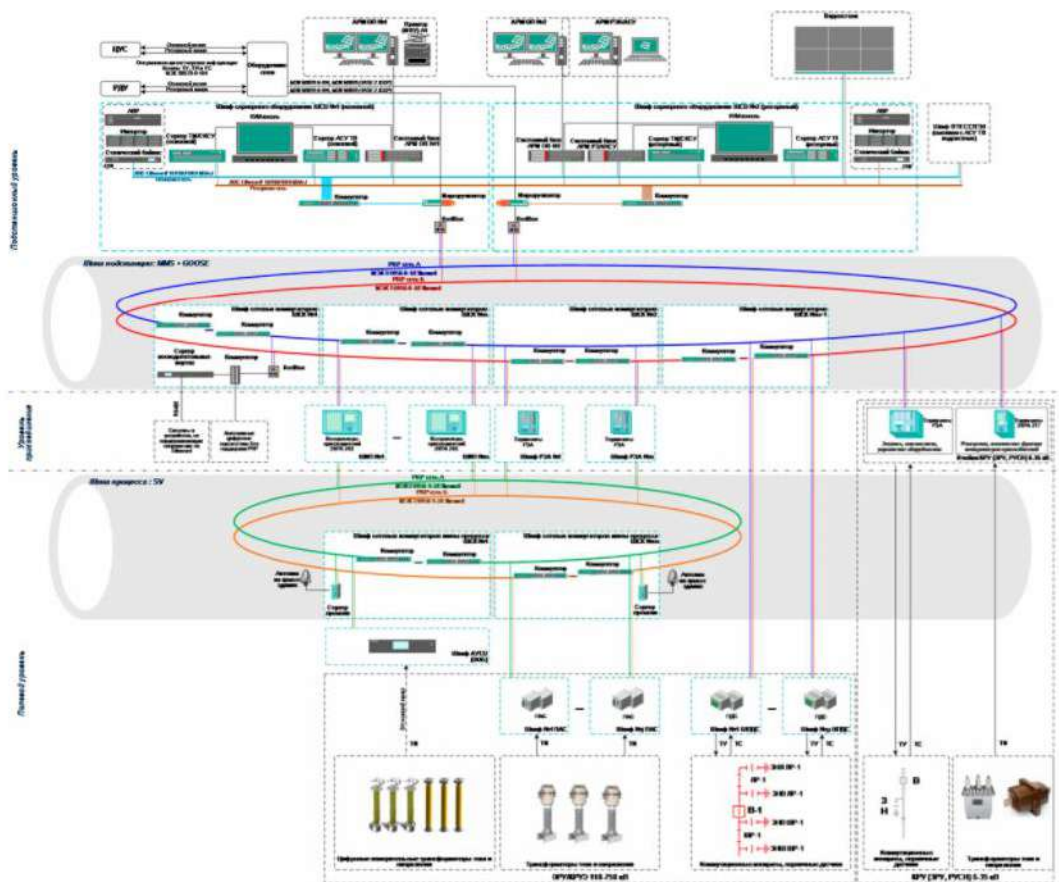


ცხელის წყლის საქვების ლოკალური სქემა



ცხელი წყლის საქვების გლობალური სქემა

ქვემოთ მოვიყვანოთ ენერგეტიკული ობიექტების გლობალური მართვის ავტომატიზებული სისტემის მაკროსქემა.



ენერგეტიკული ობიექტების გლობალური მართვის ავტომატიზებული სისტემის მაკროსქემა.

## თავი 9

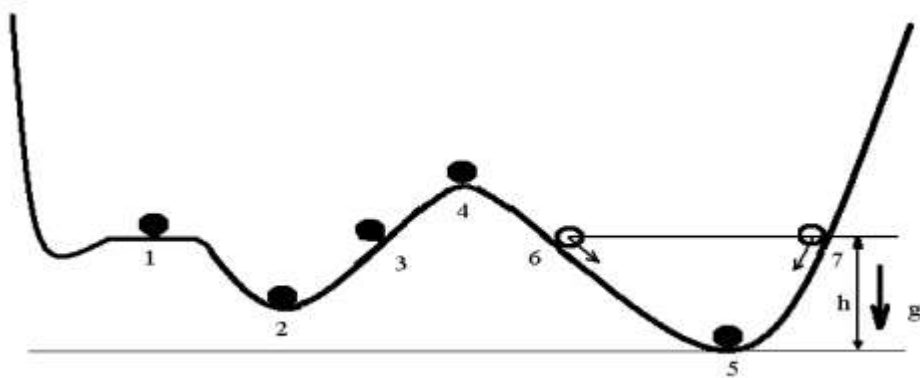
მართვის სისტემების მდგრადობა.

### 9.1 მართვის სისტემების მდგრადობის ცნება.

მდგრადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები.

მართვი დინამიური სისტემების ანალიზის დროს პირველ რიში ხაზი უნდა გაესვას გარკვეულ ტერმინოლოგიურ თანაკვეთებს. კერძოდ ერთიდაიგივე ტერმინი მდგრადობის ქვეშ ხშირად ხვდება არათანმხვედრი მოვლენები.

განვიხილოთ მარტივი მაგალითი - წონასწორობის სტატიკური ( უძრავი) მდგომარეობა. განვიხილოთ უმარტივესი ფიზიკური მაგალითი ნახ 9.1:

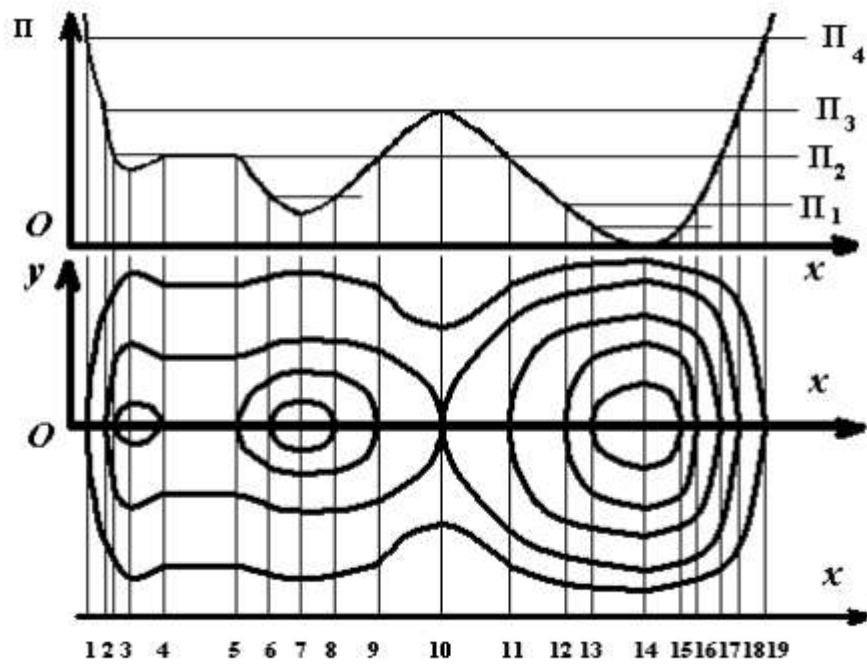


ნახ. 9.1 სტატიკური და დინამიკური მდგრადობა

სიმძიმის ძალის მოქმედების არეალში თავისუფალი ვარდნის  $g$  აჩქარებით მოძრაობა წარმოდგენილია (8.1) ნახაზზე. ამ ნახაზზე მოცემულია 1. მინიმუმები (წერტილები 2 და 5). 2. ზედაპირის ჰორიზონტალური მონაკვეთი ( წერტილი 1-ის მიდამო). 3. მაქსიმუმი (წერტილი 4).  $m$  მასის ბურთულა მოთავსებულია ამ გარემოში. ინტუიტიურად ადვილი მისახვედრია რომ, ბურთულისათვის სტატიკურად მდგრადი მდგომარეობა იქნება ის მდგომარეობა, როდესაც ბურთულის სხვადასხვა (გარე ) ძალის ზემოქმედების შედეგ ბურთულა უბრუნდება გადახრამდელ მდგომარეობას სიმძიმის ძალის ზემოქმედების შედეგად. ბურთულის მდგრად მდგომარეობად შეიძლება ჩაითვალოს პოტენციალური ენერჯის ლოკალური მინიმუმების 2 და 5 წერტილები. პოტენციალური ენერჯის თავისებურებებიდან გამომდინარე არამდგრად მდგომარეობად ითვლება წონასწორობის მდგომარეობა ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი 4. წერტილი 3 არ წარმოადგენს წონასწორობის მდგომარეობას. წერტილი 1 წარმოადგენს „გულგრილი „ (ანუ თითქმის ) წონასწორობის მდგომარეობას, მის ახლო მიდამოში პოტენციალური ენერჯია მუდმივია.

კონსერვატიული სისტემებისთვის ადგილი აქვს წონასწორობის მდგომარეობის მდგრადობის განმსაზღვრელ თეორემას. გოლონომური და სტაციონარული სისტემების იზოლირებული წონასწორობის მდგომარეობისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა ის, რომ სისტემის პოტენციალურმა ენერგიამ ამ მდგომარეობაში მიაღწიოს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ამ უმარტივეს მაგალითში ჩვენ ვიხილავთ კონსერვატიულ სისტემას, რომელში ხდება საერთო ენერგიის შენახვა. ჩვენ თუ ბურთულას გადავხრით  $h$  სიმაღლეზე წერტილ 6-ში იგი განახორციელებს რხევებს წერტილი 5-ის გარშემო წერტილი 6-დან წერტილ 7-მდე, რომლებშიც ბურთულა ერთნაირ  $h$  სიმაღლეზე გადაიხრება. გამომდინარე აქედან შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ეს უკვე აღარ იქნება სტატიკური პროცესი, არამედ იქნება ინტუიტიური მოსაზრებიდან გამომდინარე დინამიური პროცესი, რომლისთვისაც საერთო ენერგია და ამპლიტუდა მუდმივებია. შევნიშნოთ, რომ თუ გადაადგილები წერტილებში (5,6,7) გადაადგილების მათემატიკური მრუდის პროფილი შეესაბამება კვადრატულ პარაბოლას, მაშინ რხევების მოდელირება ხდება წრფივი ოსცილატორის განტოლებით. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოძრაობის განტოლება არაწრფივია. აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ პოტენციალური ენერგია განისაზღვრება მუდმივი სიზუსტით. **პოტენციალური ენერგიის ნულოვანი მნიშვნელობა მიიღწევა გლობალური მინიმუმის წერტილში.** უნდა აღინიშნოს, რომ არაწრფივი დინამიკური სისტემების ასეთი უბრალო ინტერპრეტაცია შესაძლებელია არა მართო მექანიკური ტიპის ამოცანებისათვის არამედ გამოყენებითი სფეროს სხვა მრავალფეროვანი ამოცანებისთვისაც. განვიხილოთ ნახ.9.2.



**ნახ. 9.2** სხვადასხვა განსაკუთრებული წერტილების შესაბამისი ფაზური ტრაექტორიები

კონსერვატიული დინამიური სისტემების ცვლილების(მოძრაობის) ამსახველი ფაზური ტრაექტორიების ყოფაქცევა, რომელთათვისაც პოტენციალური ენერჯის ან მისი ანალოგის ცვლილებას შეესაბამება გამოსახულია ნახ.8.2 - ზე . პროფილის შესაბამისი განსაკუთრებული წერტილების მიდამოში სიმეტრია არ შეინიშნება, მაგრამ მიიჩნევა, რომ ეს მრუდები არიან გლუვები და დიფერენცირებადი. ეს ყველაფერი კი შეესაბამება დინამიური სისტემების არაწრფივობის საკმარისად ზოგად სახეს.  $\chi$  ღერძზე მახასიათებელი წერტილები აღნიშნულნი არიან რიცხვებით - ანუ მახასიათებელი წერტილების ნომრებით. გამოყოფილია ენერჯის 4 მახასიათებელი დონე ასე:  $\Pi_1 < \Pi_2 < \Pi_3 < \Pi_4$ . განსაკუთრებულ წერტილებად ნახ.8.2-ზე არიან წერტილი 3, წერტილები 4-5 მონაკვეთზე, წერტილები 7,10,14.  $\Pi(\chi)$  ფუნქციის სახის გათვალისწინებით შეგვიძლია ვიმსჯელოთ სისტემის მოზრაობის (დინამიკის) შესახებ. წერტილები 3,7,14 წარმოადგენენ ცენტრული ტიპის წერტილებს. ასეთი წერტილების მახლობლობაში ფაზური ტრაექტორიების შესაბამისი მრუდები წარმოადგენენ ჩაკეტილი სახის მრუდებს, რომლებიც შეესაბამებიან ზღვრულ ციკლებს, რომელთათვისაც დინამიური სისტემის რხევის ამპლიტუდა არ აღემატება მოცემული განსაკუთრებული წერტილის პოტენციალური ბარიერის ზღვრულ მნიშვნელობას. მე - 14 წერტილისათვის საზღვარი განისაზღვრება  $\Pi_3$  დონით . მე-3 და მე-7 წერტილებისათვის  $\Pi_2$  დონით. წერტილები 4-5 მონაკვეთზე , რომლებიც შეესაბამებიან  $\Pi_2$  დონეს წარმოადგენენ განურჩეველი სტატიკური წონასწორობის წერტილებს.

წერტილი 10 არის განსაკუთრებული (უნაგირა) ტიპის წერტილი. ამ უნაგირა წერილზე გამავალი ინტეგრირებული წირები იწოდებიან **სეპარატრისებად**. განხილულ მაგალითში ეს წრფე შეესაბამება  $\Pi_3$  დონეს. ის გაივლის 2,10,18 წერტილებზე და ფაზურ სიბრტყეზე გამოყოფს სხვადასხვა ტიპის ტრაექტორიებს. ამას გარდა ამ სისტემაში არის კიდევ ერთი სეპარატრისა იგი გამოყოფს ორ (3 და 7 წერილებს) ცენტრს გადის 2 და 4 წერტილებზე, შემდგომ იგი შეესაბამება 4-5 მიდამოს წრფეს, შემდეგ გადის მე-5 და მე-9 წერტილებზე. დიდი ენერჯის შემცველი რხევები  $\Pi_4$  დონეს შეესაბამება შეკრული მრუდი(წირი) რომელიც გადის წერტილებზე 1 და 19. მცირე ენერჯის შემცველი რხევები, რომლებიც ნაკლები არიან  $\Pi_1$ -ზე მოთავსებულნი არიან 3,7 და 14 ცენტრული წერტილების ირგვლივ.

ზემოთ განხილული მაგალითი აგებულია კონსერვატიული დინამიური სისტემისათვის (ბურთულის ხვრელებს(ორმოებს) შორის გადაადგილების მაგალითზე) რამაც მოგვცა საშუალება გაგვეანალიზებინა რხევები ცენტრულ და უნაგირულ წერტილებში. ეს ანალიზი შეიძლება გადატანილ იქნას უფრო რთულ დინამიურ სისტემებზე. არაკონსერვატიული სისტემებისთვის, რომლებიც აგრეთვე შეიცავენ გარდა ამ ტიპისა სხვა ტიპის განსაკუთრებულ წერტილებს გამოსაკვლევად უფრო რთული არიან, მაგრამ გარკვეულ წილად შესაძლებელია უბრალო ინტერპრეტაციები.

გადავიდეთ არაწრფივი დინამიური სისტემების ცვლილების (მოძრაობის) მდგრადობის საკითხების განხილვაზე. დინამიური სისტემის პარამეტრები შეიძლება დროში იცვლებოდეს. თუ სისტემის ზოგადი თვისებები მცირედი ცვლილებისას პარამეტრები მცირედ შეიცვლება მასინ ეს ცვლილებები მხოლოდ რაოდენობრივი, მაგრამ არა თვისებრივი ხასიათისაა, მაშინ ასეთ სისტემას სტრუქტურულად **სტაბილურს (მდგრადს) ან უხეშს**

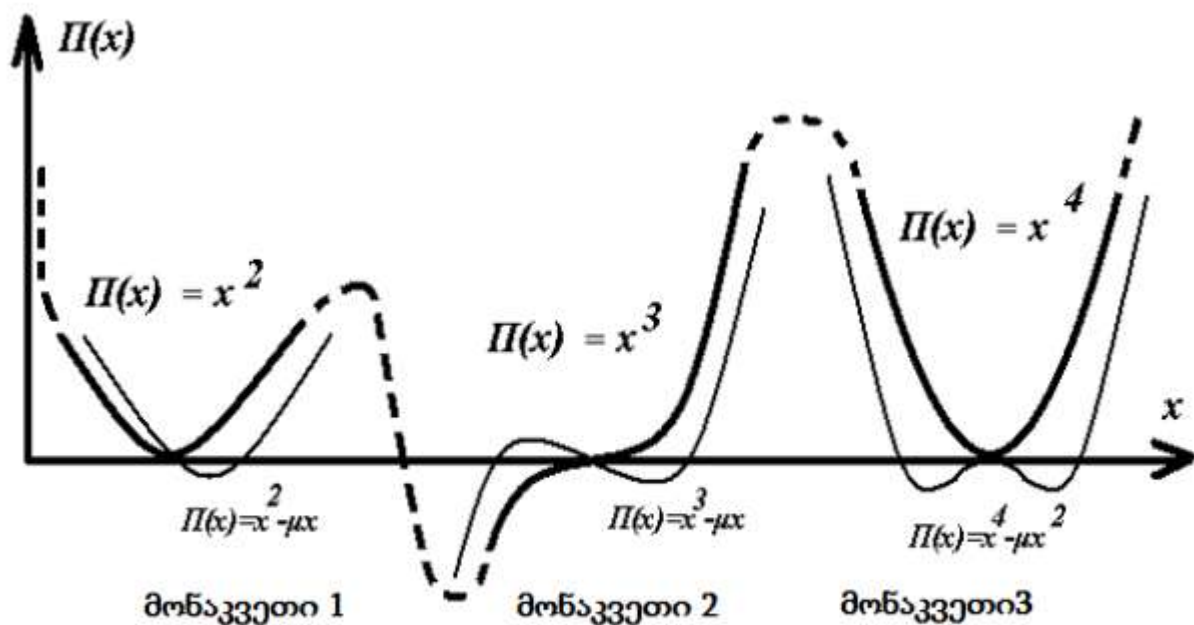


უწოდებენ. ხოლო თუ რაიმე პარამეტრის მცირედი ცვლილება იწვევს სისტემის მდგომარეობის ხარისხობრივი ცვლილებას, მაშინ ასეთ სისტემას უწოდებენ სტრუქტურულად არასტაბილური ან არაუხეში. ასეთი თვისებრივი ცვლილებები აქ შეესაბამება ფაზის პორტრეტის ფუნდამენტურ ცვლილებას - გარეგნობას. წარმოიქმნებიან ახალი წონასწორობის მდგომარეობები განსაკუთრებული (სინგულარული) წერტილები, ახალი ზღვრული ციკლები, იცვლება გადაწყვეტილებების მდგრადობის ტიპის ცვლილება. უხეშ დინამიურ სისტემაში პარამეტრები ცვლილება იწვევს მისი ცვლილების რაოდენობრივი მახასიათებლების ცვლილებას. ხარისხობრივად, მოძრაობა არ იცვლება.

რაოდენობრივი მახასიათებლების შეცვლის სიჩქარე უხეშ მექანიკურ სისტემაში ს მისი პარამეტრების ცვლილების გზით განსაზღვრავს სისტემის მგრძობელობას. არაუხეში სისტემებისთვის მგრძობელობის ფუნქცია ზოგიერთ სიტუაციაში უსასრულოობისკენ მიისწრაფიან. განვიხილოთ სისტემის სტრუქტურული მდგრადობის საკითხები ნახ.9.3-ზე მოცემული ტიპის პროფილის შემცველ მაგალითზე.  $\Pi(x)$  ფუნქციას ნახ.8.3-ზე აქვს სამი მონაკვეთი:

1. მონაკვეთი 1, სადა პროფილი მოიცემა  $\Pi(x) = x^2$  ფუნქციით;
2. მონაკვეთი 1, სადა პროფილი მოიცემა  $\Pi(x) = x^3$  ფუნქციით;
3. მონაკვეთი 1, სადა პროფილი მოიცემა  $\Pi(x) = x^4$  ფუნქციით.

ყველა ამ მონაკვეთებისათვის წერტილი  $x = 0$  წარმოადგენს კრიტიკულ წერტილს რადგან  $\frac{d\Pi(x)}{dx} = 0$  ყოველი მონაკვეთისათვის. (აქ გათვალისწინებულია ზემოთ განხილული ჩასმა  $\zeta = x - x_i$  და ყოველი მონაკვეთისთვის წერტილი  $x = 0$  სხვადასხვაა.



ნახ. 9.3 სტრუქტურული მდგრადობის განსასაზღვრავი მაგალითი

პირველ და მესამე მონაკვეთებს კრიტიკულ წერტილში აქვთ მინიმუმები, ხოლო მეორე მონაკვეთზე კრიტიკულ წერტილში აქვს გაღუნვა. წყვეტილი ხაზებით მონიშნულია პროფილის არასაინტერესო მონაკვეთები. შემოვიტანოთ სისტემაში სუსტი შეშფოთებები მონაკვეთ 1-ზე  $\Pi(x) = x^2 - \mu x$ , მონაკვეთ 2-ზე  $\Pi(x) = x^3 - \mu x$  მონაკვეთ 3-ზე  $\Pi(x) = x^4 - \mu x^2$ . პარამეტრი  $0 < \mu \ll 1$  უნდა იყოს რაც შეიძლება მცირე სიდიდე. ამ გარე ზემოქმედების პირობებში მონაკვეთ 1-ზე არსებითი ცვლილებები არ მომხდარა, ცენტრული წერტილი გადანაცვლდა  $\frac{\mu}{2}$  მნიშვნელობით. მონაკვეთ 2-ზე ამ ზემოქმედების შედეგად მოხდა კარდინალური ცვლილებები, კერძოდ წარმოიქმნა ორი განსაკუთრებული წერტილი არამდგრადი უნაგირა წერილი და  $\Pi(x)$  ფუნქციის მინიმუმის შესაბამისი ცენტრული წერტილი. მონაკვეთ 3-ზე ამ ზემოქმედების შედეგად მოხდა აგრეთვე კარდინალური ცვლილებები, კერძოდ მდგრადი განსაკუთრებული წერტილის ადგილზე წარმოიქმნა არამდგრადი უნაგირა ტიპის წერტილი, ხოლო მის ახლობლობაში ორი მდგრადი ცენტრული ტიპის წერტილი. მივიღეთ რომ მეორე და მესამე მონაკვეთზე სისტემა აღმოჩნდა არამდგრადი ხოლო პირველ მონაკვეთზე - მდგრადი.

## თავი 10

მართვის სისტემების მდგრადობის კვლევა. მართვის წრფივი სისტემების

მდგრადობის კვლევის მეთოდები. მდგრადობის ალგებრული კრიტერიუმები.

განვიხილოთ სისტემის მდგრადობის ალგებრული კრიტერიუმები (გურვიცის და რაუსის)

### 10.1. მდგრადობის გურვიცის კრიტერიუმი.

წრფივი სტაციონარული სისტემის მდგრადობის ანალიზისა და შეფასების ერთერთ-მეთოდს წარმოადგენს გერმანელი მათემატიკოსის ადოლფ გურვიცის კრიტერიუმი. იგი რაუსის კრიტერიუმის შესაბამისად მიეკუთვნება კრიტერიუმების ალგებრულ ტიპს. ნაიკვისტი-მიხაილოვის კერძო მეთოდებთან შედარებით გურვიცის კრიტერიუმის უპირატესობა მდგომარეობს მეთოდის პრინციპიალურ სიმარტივეში. უარყოფითი მხარე კი არის ის რომ მეთოდი საჭიროებს დიდი რაოდენობით რთული მათემატიკური გამოთვლების ჩატარებას მატრიცებზე რას განსაკუთრებით შესამჩნევია დიდი განზომილების მატრიცებისთვის, მაგრამ დღევანდელი კომპიუტერული სისტემების დაპროგრამების პირობებში ეს სირთულე დაყვანილია მინიმუმამდე.

გურვიცის მეთოდი მუშაობს სისტემის მახასიათებელი განტოლების კოეფიციენტებთან. ვთქვათ  $W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$  არის სისტემის გადაცემის ფუნქცია, ხოლო  $U(s) = 0$  სისტემის მახასიათებელი განტოლება. წარმოვადგინოთ სისტემის მახასიათებელი განტოლება ალგებრული პოლინომის სახით  $U(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$  სადაც  $s$  კომპლექსური არგუმენტია. მახასიათებელი განტოლებისგან დგება გურვიცის მატრიცა  $\Delta$  შემდეგი ალგორითმით.

1. მთავარ დიაგონალზე მარცხნიდან მარჯვნივ თავსდება მახასიათებელი განტოლების ყველა კოეფიციენტები  $a_1$  დან  $a_n$  მდე.
2. დიაგონალის თითოეული ელემენტი ქვემოთ და ზემოთ დეტერმინანტის სტრიქონები ისე რომ, დაცული იყოს კოეფიციენტების ინდექსები ისე რომ დაცული იყოს სვეტებში ინდექსების კლება ზემოდან ქვემოთ.
3. 0 ოვან ინდექსზე ნაკლები და  $n$  - ურ ინდექსზე მეტი ნომრის კოეფიციენტის ადგილზე იწერება 0-ები.

$$U(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$$

ამ მახასიათებელი განტოლების შესაბამის გურვიცის მატრიცას ექნება სახე

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

$\Delta$  მატრიცის მიხედვით სისტემის მდგრადობისათვის დასადგენად უნდა სრულდებოდეს შემდეგი პირობები:

1.  $a_0 > 0$ ;
2. ყველა ე.წ. გურვიცის  $n$  მინორი (დიაგონალის გარშემო არსებული) უნდა იყოს  $> 0$ ;

ეს მინორებია:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

$$\dots \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

განვიხილოთ მაგალითი:

ვთქვათ მოცემულია გადაცემის შემდეგი ფუნქცია

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5s + 4}{s^5 + 16s^4 + 95s^3 + 260s^2 + 324s + 144}$$

გურვიცის კოეფიციენტები ფორმირდება მნიშვნელის პოლინომის შესაბამისი კოეფიციენტებით ასე:

$$a_0 = 1, a_1 = 16, a_2 = 95, a_3 = 260, a_4 = 324, a_5 = 144$$

გურვიცის სრულ მატრიცას ექნება ზოგადი სახე:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix}$$

რიცხვითი მნიშვნელობების შეტანის შემდეგ მატრიცა მიიღებს სახეს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & 260 & 144 & 0 & 0 \\ 1 & 95 & 324 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 260 & 144 & 0 \\ 0 & 1 & 95 & 324 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 260 & 144 \end{vmatrix}$$

სისტემის მდგრადობის დასადგენად უნდა შესრულდეს ზემოთ განსაზღვრული ორი პირობა 1.  $a_0 = 1 > 0$  2.  $\Delta$  მატრიცის ყველა დიაგონალური მინორი უნდა იყოს დადებითი.

ეს მინორებია:  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 260 \\ 1 & 95 \end{vmatrix}$ ,  $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 260 & 144 \\ 1 & 95 & 324 \\ 0 & 16 & 260 \end{vmatrix}$ ,

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 260 & 144 & 0 \\ 1 & 95 & 324 & 0 \\ 0 & 16 & 260 & 144 \\ 0 & 1 & 95 & 324 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 260 & 144 & 0 & 0 \\ 1 & 95 & 324 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 260 & 144 & 0 \\ 0 & 1 & 95 & 324 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 260 & 144 \end{vmatrix}$$

$\Delta_2$   $\Delta_3$   $\Delta_4$   $\Delta_5$  დეტერმინანტების გამოთვლა შეიძლება კომპიუტერზე (ხელით გამოთვლაზე, რომ დრო არ ვკარგოთ) როგორც პროგრამა Matlab-ზე ასევე პროგრამა Maple - ზე. ეს საკითხები ჩვენ შევისწავლეთ მე-7 ლექციაში.  $\Delta_2$   $\Delta_3$   $\Delta_4$  დეტერმინანტების გამოთვლა მკითხველისთვის მიმინდვია, ხოლო აქ ქვემოთ მომყავს  $\Delta_5$  დეტერმინანტების გამოთვლა Matlab-ზე ნაჩვენებია ნახ.9.4-ზე

```

Command Window
>> det5=[16 260 144 0 0;1 95 324 0 0;0 16 260 144 0;0 1 95 324 0;0 0 16 260 144]

det5 =

    16    260    144     0     0
     1     95    324     0     0
     0     16    260    144     0
     0     1     95    324     0
     0     0     16    260    144

>> mdgr=det(det5)

mdgr =

    9.1446e+09

```

ნახ. 10.1

ნახ. 10.1 -დან ჩანს რომ ამ  $\Delta_5$  მატრიცის დეტერმინანტი დადებითია, ასევე დანარჩენი დეტერმინანტების გამოთვლის შემდეგ დარწმუნდებით, რომ მათი დეტერმინანტებიც დადებითებია ანუ სისტემა მდგრადია.

იგივე შედეგს მივიღებთ პროგრამა Maple-ს საშუალებით:

restart

$\text{delta5} := \text{array}(1..5, 1..5, [[16, 260, 144, 0, 0], [1, 95, 324, 0, 0], [0, 16, 260, 144, 0], [0, 1, 95, 324, 0], [0, 0, 16, 260, 144]])$

$$\begin{bmatrix} 16 & 260 & 144 & 0 & 0 \\ 1 & 95 & 324 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 260 & 144 & 0 \\ 0 & 1 & 95 & 324 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 260 & 144 \end{bmatrix}$$

with(linalg) :

$\text{mdgr} = \text{det}(\text{delta5})$

$\text{mdgr} = 9144576000$

## 10.2. მდგრადობის რაუსის კრიტერიუმი.

რაუსის კრიტერიუმიც გურვიცის კრიტერიუმის მსგავსად წარმოადგენს წრფივი სტაციონარული დინამიური სისტემების მდგრადობაზე ანალიზის მეთოდს (ამ მეთოდს ხშირად რაუსი-გურვიცის მეთოდსაც უწოდებენ). ისიც მიეკუთვნება მდგრადობის ალგებრული ანალიზის მეთოდთა კლასს. ეს მეთოდი შემოგვთავაზა ე.ჯ. რაუსმა 1875 წელს. მიუხედავად იმისა, რომ ის გურვიცის კრიტერიუმზე უფრო ადრინდელია, მაინც მისი გამოყენება უფრო მოხერხებულია, განსაკუთრებით დიდი განზომილების სისტემებისთვის. მეთოდის ღირსებად უნდა ჩაითვალოს მისი კომპიუტერზე რალიზების სიოილე.

რაუსის მეთოდი აგრეთვე მუშაობს მახასიათებელი განტოლების კოეფიციენტებთან. ვთქვათ  $W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$  არის სისტემის გადაცემის ფუნქცია, ხოლო  $U(s) = 0$  სისტემის მახასიათებელი განტოლება. წარმოვიდგინოთ მახასიათებელი პოლინომი შემდეგი სახით :

$$U(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$

რაუსის კრიტერიუმის შესაბამისი ალგორითმი მდგომარეობს შემდეგში:

დგება სპეციალური ცხრილი (ნახ.9.5), რომელშიც მახასიათებელი პოლინომის კოეფიციენტები ჩაიწერებიან ისეთნაირად, რომ:

$ri$	$\Downarrow i \Rightarrow k$	1	2	3	4
-	1	$c_{1,1} = a_0$	$c_{2,1} = a_2$	$c_{3,1} = a_4$	...
-	2	$c_{1,2} = a_1$	$c_{2,2} = a_3$	$c_{3,2} = a_5$	...
$r_3 = \frac{c_{1,1}}{c_{1,2}}$	3	$c_{1,3} = c_{2,1} - r_3 c_{2,2}$	$c_{2,3} = c_{3,1} - r_3 c_{3,2}$	$c_{3,3} = c_{4,1} - r_3 c_{4,2}$	...
$r_4 = \frac{c_{1,2}}{c_{1,3}}$	4	$c_{1,4} = c_{2,2} - r_4 c_{2,3}$	$c_{2,4} = c_{3,2} - r_4 c_{3,3}$	$c_{3,4} = c_{4,2} - r_4 c_{4,3}$	...
....	...	...	...	...	...

ნახ. 10.2 რაუსის კრიტერიუმის ცხრილი

- პირველ სტრიქონში ჩაიწერებინ განტოლების ლუწნომრიანი კოეფიციენტები მათი ზრდადობის მიხედვით;
- მორე სტრიქონში კენტნომრიანი კოეფიციენტები;
- ცხრილის დანარჩენი ელემენტები განისაზღვრებინ შემდეგი ფორმულებით:

$$c_{k,i} = c_{k+1,i-2} - r_i c_{k+1,i-1}, \text{ სადაც } r_i = \frac{c_{1,i-2}}{c_{1,i-1}}, i \geq 3 - \text{სტრიქონის}$$

ნომერი, k - სვეტის ნომერი.

- რაუსის ცხრილში სტრიქონების რიცხვი ერთით მეტია მახასიათებელი განტოლების რიგზე ანუ უდრის  $n+1$ -ს. რაუსის ცხრილი მოცემულია ნახ. 9.5-ზე  
რაუსის კრიტერიუმის მიხედვით სისტემა **მდგრადია** (აუცილებელი და საკმარისი პირობა) თუ რაუსის ცხრილის პირველი სვეტის ელემენტებს  $c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}, \dots$  აქვთ ერთნაირი ნიშანი. წინააღმდეგ შემთხვევაში სისტემა **არამდგრადია**.

განვიხილოთ მაგალითი რაუსის კრიტერიუმით სისტემის მდგრადობის ანალიზზე. განვიხილოთ იგივე მაგალითი რაც განვიხილეთ გურვიცის კრიტერიუმზე.

ვთქვათ მოცემულია გადაცემის შემდეგი ფუნქცია

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5s + 4}{s^5 + 16s^4 + 95s^3 + 260s^2 + 324s + 144}$$

რაუსის კოეფიციენტები ფორმირდება მნიშვნელის პოლინომის შესაბამისი კოეფიციენტებით ასე:



$$a_0 = 1, a_1 = 16, a_2 = 95, a_3 = 260, a_4 = 324, a_5 = 144$$

რაუსის ცხრილის პირველი ორი სტრიქონი ფორმირება შეიძლება პირდაპირ მოცემული კოეფიციენტებით

მესამე სტრიქონის ელემენტებია:

$$r_3 = \frac{c_{1,1}}{c_{1,2}} = \frac{1}{16}, c_{1,3} = c_{2,1} - r_3 c_{2,2} = 95 - \frac{1}{16} 260 = \frac{315}{4} = 78,75$$

$$c_{2,3} = c_{3,1} - r_3 c_{3,2} = 324 - \frac{1}{16} 144 = 315$$

$$c_{3,3} = c_{4,1} - r_3 c_{4,2} = 0 - \frac{1}{16} 0 = 0$$

მეოთხე სტრიქონის ელემენტებია:

$$r_4 = \frac{c_{1,2}}{c_{1,3}} = \frac{16}{78,75} = 0,2031746032 \approx 0,2032$$

$$c_{1,4} = c_{2,2} - r_4 c_{2,3} = 260 - 0,2032 * 315 = 195,992$$

$$c_{2,4} = c_{3,2} - r_4 c_{3,3} = 144 - 0,2032 * 0 = 144$$

$$c_{3,4} = 0 - 0,2032 * 0 = 0$$

საბოლოოდ რაუსის ცხრილს აქვს შემდეგი სახე ნახ.9.6

$r_i$	$\downarrow i \Rightarrow k$	1	2	3	4
-	1	$c_{1,1} = 1$	$c_{2,1} = 95$	$c_{3,1} = 324$	...
-	2	$c_{1,2} = 16$	$c_{2,2} = 260$	$c_{3,2} = 144$	...
$r_3 = \frac{1}{16}$	3	$c_{1,3} = \frac{315}{4} = 78,75$	$c_{2,3} = 315$	$c_{3,3} = 0$	...
$r_4 = 0,2032$	4	$c_{1,4} = 195,992$	$c_{2,4} = 144$	$c_{3,4} = 0$	...
....	...	...	...	...	...

ნახ.10.3 რაუსის ცხრილის საბოლოო სახე

მდგრადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა რაუსის კრიტერიუმისათვის არის პირველი სვეტის ყველა ელემენტის ერთნაირი ნიშნების ქონა, რაც ჩვენს მაგალითზე სრულდება ანუ  $c_{1,1} = 1 > 0$ ,  $c_{1,2} = 16 > 0$ ,  $c_{1,3} = 78,75 > 0$ ,  $c_{1,4} = 195,992 > 0$

პირველი სვეტის ყველა ელემენტი დადებითია (ე.ი. ერთნაირნიშნაანებია) რაც ნიშნავს, აღნიშნული სისტემა მდგრადია რაუსის კრიტერიუმით (იგივე დადასტურდა გურვიცის კრიტერიუმითაც).

## თავი 11

**არაწრფივი სისტემების კვლევის მეთოდები. ფაზური სივრცის მეთოდი.**

ფაზური სივრცე. ფაზური კოორდინატები. ფაზური ტრაექტორიები. განსაკუთრებული წერტილები. (მიხაილოვის და ნაიკვისტის კრიტერიუმები)

### 11.1. არგუმენტების პრინციპი. მდგრადობის მიხაილოვის კრიტერიუმი.

სანამ მიხაილოვის კრიტერიუმს განვიხილავთ გავაკეთოთ მოკლე მიმოხილვა ე.წ. არგუმენტის პრინციპისა.

ამ ტიპის სიხშირული კრიტერიუმები უმეტეს შემთხვევებში გამოიყენებიან გრაფიკული კრიტერიუმების რანგში. მართვის სისტემების სიხშირული კრიტერიუმების საფუძველში, როგორც წესი დევს არგუმენტის პრინციპი, რომელიც არის კომის ცნობილი თეორემისა (ანალიზური ფუნქციის ნოლებსა და პოლუსებს შესახებ).

**არგუმენტების პრინციპი** . ვთქვათ მოცემულია ნამდვილკოეფიციენტებიანი  $n$ -ური რიგის ალგებრული განტოლება (11.1)

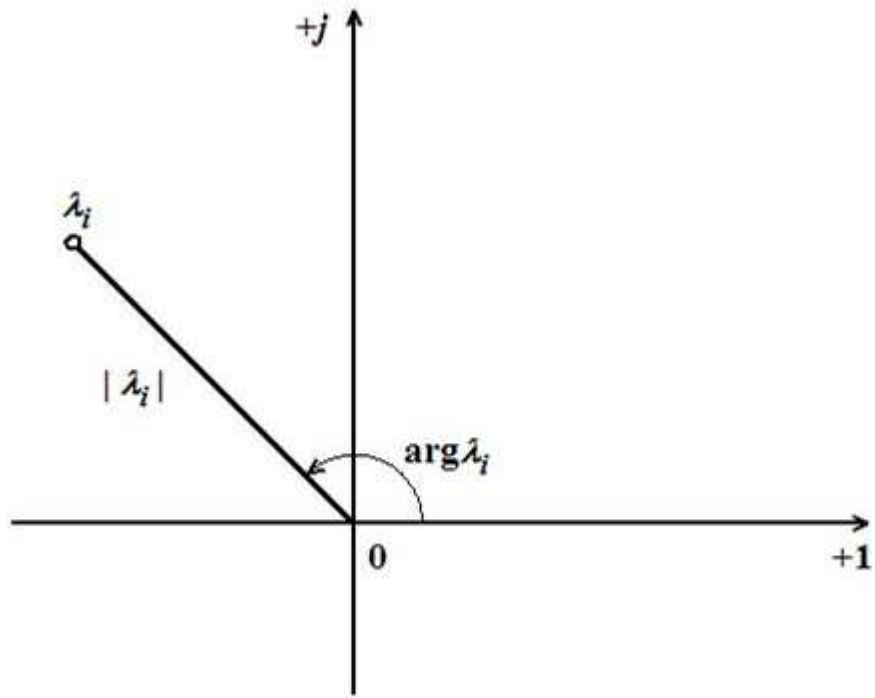
$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (11.1)$$

თუ  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  არიან (11.1) განტოლების ფესვები მაშინ  $D(\lambda)$  შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით (11.2)

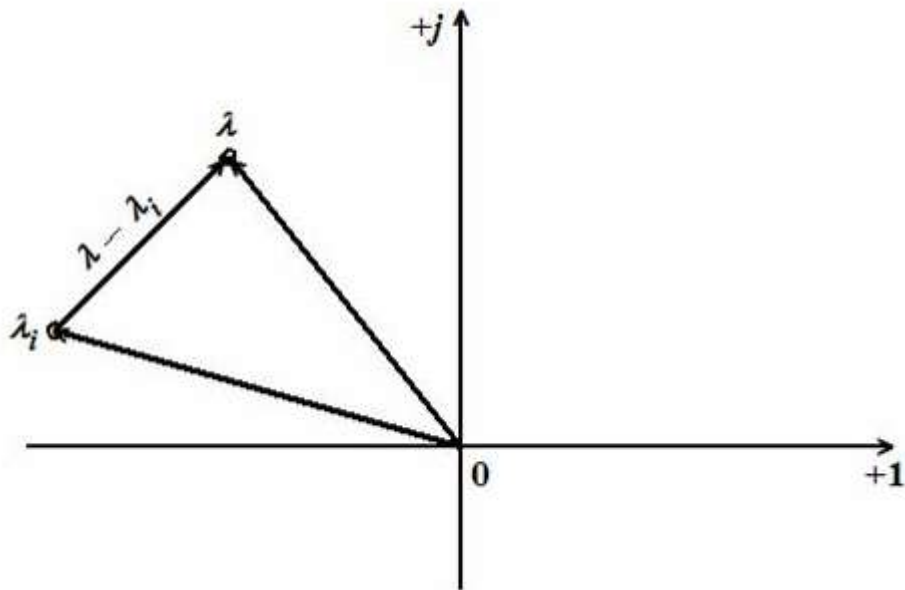
$$D(\lambda) = a_n (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n). \quad (11.2)$$

კომპლექსურ სიბრტყეზე თითოეულ ფესვს შეესაბამება კონკრეტული წერტილი.

გეომეტრიულად თითოეული  $\lambda_i$  ფესვი გამოისახება ვექტორის სახით. ეს ვექტორი კომპლექსურ სიბრტყეზე იწყება კოორდინატთა სათავიდან და მთავრდება  $\lambda_i$  წერტილში. ამ ვექტორის სიგრძეა არის კომპლექსური რიცხვის მოდულის ტოლი ანუ  $|\lambda_i|$ , ხოლო კუთხე ვექტორსა და ღრძის დადებით მიმართულებას შორის არის  $\arg \lambda_i$  - ის ტოლი. (ნახ. 11.1)



ნახ.11.1  $\lambda_i$  ვექტორის მოდული და ფაზა

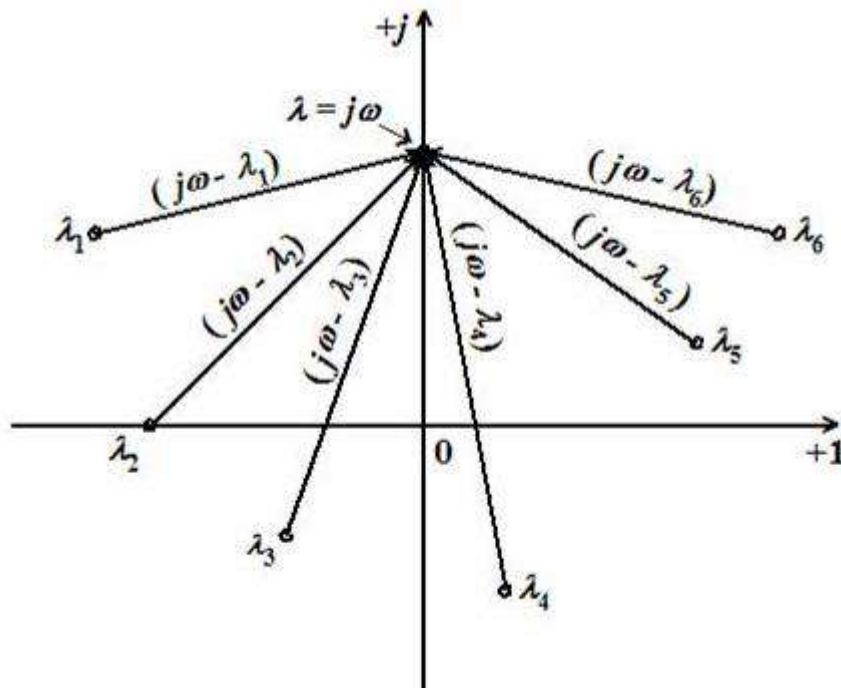


ნახ.11.2  $\lambda - \lambda_i$  ვექტორის მაგალითი

თუ ნახ.11.8 - ზე შემოვიღებთ აღნიშვნას  $\lambda = j\omega$  მაშინ გვექნება

$$D(j\omega) = a_n(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_n). \quad (11.3)$$

$j\omega - \lambda_i$  ვექტორი ბოლოები წარმოსახვით ღერძზე  $\lambda = j\omega$  წერტილში. ( $\omega$  წრიული სიხშირეა (ნახ.11.3))



ნახ.11.3 ელემენტარული  $j\omega - \lambda_i$  ვექტორების განლაგების მაგალითი

$D(j\omega)$  - ის მოდული არის ელემენტარული  $j\omega - \lambda_i$  ვექტორებისა და  $a_n$  -ის ნამრავლი:

$$|D(j\omega)| = a_n |j\omega - \lambda_1| |j\omega - \lambda_2| \dots |j\omega - \lambda_n|.$$

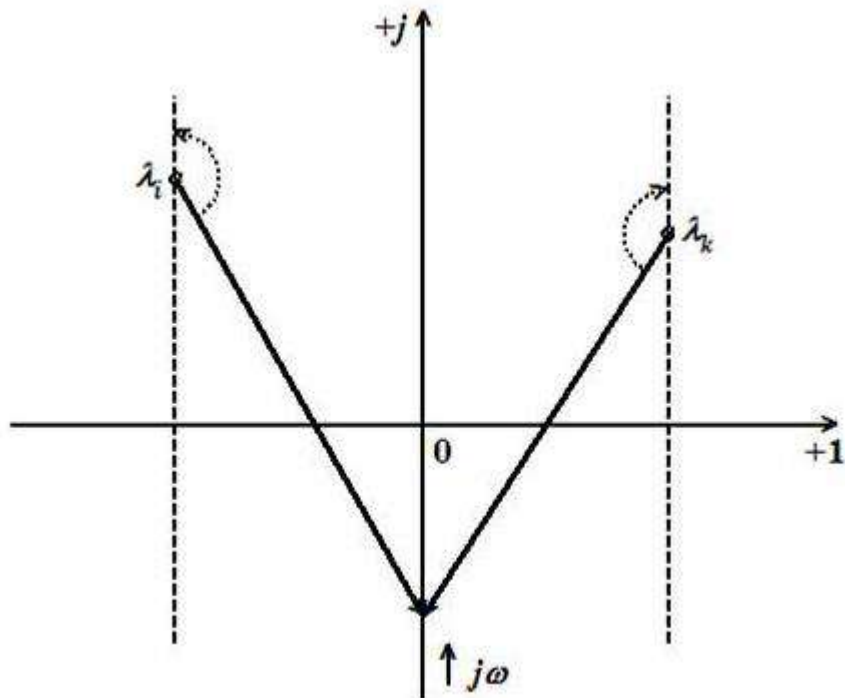
$D(j\omega)$  - ის არგუმენტი ანუ ფაზა ტოლია ელემენტარულ ვექტორთა არგუმენტების ჯამისა:

$$\arg D(j\omega) = \arg(j\omega - \lambda_1) + \arg(j\omega - \lambda_2) + \dots + \arg(j\omega - \lambda_n).$$

კომპლექსურ სიბრტყეზე ვექტორის საათის საწინააღმდეგო მიმართულებით ბრუნვა მივიღოთ დადებით მიმართულებად. ამის გათვალისწინებით  $\omega$  კუთხური სიხშირის  $-\infty$  დან  $+\infty$  მდე ცვლილებისას ელემენტარული  $j\omega - \lambda_i$  ვექტორი მობრუნდება  $+\pi$  კუხით, თუ მისი მისი სათავე ( $\lambda_i$  ფესვი) ძევს კომპლექსური სიბრტყის მარცხენა მხარეში და  $-\pi$  - თუ მარჯვენაში (ნახ.11.4).

თუ (11.1)  $D(\lambda) = 0$  განტოლებას აქვს  $p$  ფესვი კომპლექსური სიბრტყის მარჯვენა მხარეში და  $n-p$  ფესვი მარცხენა მხარეში და  $\omega$  სიხშირე იცვლება  $-\infty$  დან  $+\infty$ , მაშინ  $D(j\omega)$  ვექტორის მობრუნების კუთხე გამოითვლება ფორმულით:

$$\Delta \arg D(j\omega) = (n - p)\pi - p\pi = (n - 2p)\pi, -\infty \leq \omega \leq \infty$$



ნახ. 11.4  $j\omega - \lambda_i$  და  $j\omega - \lambda_k$  ვექტორების არგუმენტების ცვლილება  $\omega$  სიხშირის  $-\infty$  დან  $+\infty$  მდე ცვლილებისას

ახლა კი შევუდგეთ უშუალოდ მიხალოვის მდგრადობის კრიტერიუმის განსაზღვრას ეს კრიტერიუმი ჩამოყალიბებულ იქნა 1938 წელს საბჭოთა მეცნიერის მიხაილოვის მიერ. ეს კრიტერიუმი უშუალოდ არგუმენტა პრინციპიდან გამომდინარეობს და წამოადგენს გეომეტრიული ტიპის კრიტერიუმს. ვთქვათ მართვის სისტემის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

თუ ამ განტოლების ყველა ფესვი მოთავსებულია კომპლექსური სიბრტყის მარცხენა მხარეში (რაც სისტემის მდგრადობას მიანიშნებს), ხოლო კომპლექსური სიბრტყის მარჯვენა მხარეში ფესვები არ გვაქვს ანუ  $p=0$  მაშინ არგუმენტის ცვლილება ტოლი იქნება:

$$\Delta \arg D(j\omega) = n\pi, \quad -\infty \leq \omega \leq \infty \quad (11.4)$$

(11.4) ფორმულიდან გამომდინარეობს ავტომატური მართვის (რეგულირებულ) სისტემა მდგრადია თუ კუთხური სიხშირის  $\omega$  -ს ცვლილებისას  $(-\infty, \infty)$  შუალედში  $D(j\omega)$  არგუმენტი  $n\pi$  - ის ტოლი იქნება. სიხშირის  $\omega$  -ს ცვლილებისას  $(-\infty, \infty)$  შუალედში  $D(j\omega)$  ვექტორი ბოლო კომპლექსურ სიბრტყეზე აღწერს მრუდს, რომელსაც ეწოდება  $D(j\omega)$  ვექტორის მახასიათებელი მრუდი ანუ გოდოგრაფი (მიხაილოვის მრუდი).

მახასიათებელი მრუდის ასაგებად მახასიათებელ პოლინომში

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

ვახორციელებთ ჩასმას  $\lambda = j\omega$  რის შემდეგაც მოვახდენთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების გამოყოფას. ჩასმის შემდეგ მივიღებთ:

$$D(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0$$

ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები სიმბოლურად ასე გამოისახებიან

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (11.5)$$

რომელთა გამოსათვლელი ფორმულები მოცემულია ქვემოთ:

$$\begin{cases} U(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots \\ V(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots \end{cases} \quad (11.6)$$

(11.6)-ში  $U(\omega)$  და  $V(\omega)$ -ს ეწოდებათ მიხაილოვის შესაბამისად ნამდვილი და წარმოსახვითი ფუნქციები.  $D(j\omega)$ -ს გრაფიკი გამოსახება (11.5) განტოლებით.  $D(j\omega)$ -ს ნამდვილი ნაწილი  $U(\omega)$  წარმოადგენს  $\omega$  სიხშირის მიმართ ლუწ ფუნქციას, ხოლო  $D(j\omega)$ -ს წარმოსახვითი ნაწილი  $V(\omega)$ -ს წარმოადგენს  $\omega$  სიხშირის მიმართ კენტ ფუნქციას. ამიტომაც  $\omega$  სიხშირის უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის გვაქვს:

$$D(j\omega) = U(\omega) - jV(\omega)$$

$U(\omega)$  და  $V(\omega)$  ფუნქციების კენტობისა და ლუწობის გათვალისწინებით მიხაილოვის გოდოგრაფი სიმეტრიულია ნამდვილ რიცხვთა ღერძის მიმართ  $-\omega$  და  $+\omega$  დროს. ამ გოდოგრაფის აგებისას შეიძლება შემოვიფარგლოთ  $\omega$  სიხშირის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობებით  $[0, \infty)$  ინტერვალზე. ამასთან  $D(j\omega)$  ვექტორის მობრუნების კუთხე მცირდება ორჯერ

$$\Delta \arg D(j\omega) = \frac{\pi}{2} (n - 2p), \quad 0 \leq \omega \leq \infty \quad (11.7)$$

(11.7) - დან განისაზღვრება  $D(\lambda) = 0$  განტოლების ფესვთა რაოდენობა  $0 \leq \omega \leq \infty$  - თვის.

$$p = \frac{\frac{n\pi}{2} - \Delta \arg D(j\omega)}{2} \quad (11.8)$$

(11.8) - დან ჩანს, რომ მარჯვენა ფესვთა რაოდენობა ნული ტოლია, როცა

$$\Delta \arg D(j\omega) = \frac{n\pi}{2}, \quad 0 \leq \omega \leq \infty \quad (11.9)$$

(11.9) პირობა არის აუცილებელი, მაგრამ არასაკმარისი. სისტემის მდგრადობისათვის

აუცილებელი და საკმარისია ის, რომ მახასიათებელი განტოლების ყველა  $n$  ფესვი იყოს მარცხენა (ანუ ნამდვილი), მათ შორის არ უნდა იყოს ის ფესვები, რომლებიც მოთავსებული არიან წარმოსახვით ღერძზე და  $D(j\omega)$  კომპლექსურ პოლინომს ანულებენ, ანუ

$$D(j\omega) \neq 0 \quad (11.10)$$

(11.9) და (11.10) ფორმულები მდგრადობის მიხაილოვის კრიტერიუმის მათემატიკურ ფორმულირებას წარმოადგენს.  $D(j\omega)$

### მართვის სისტემის მდგრადობის მიხაილოვის კრიტერიუმის I ფორმულირება

იმისთვის რომ ავტომატური მართვის სისტემა იყოს მდგრადი აუცილებელი და საკმარისია, რომ სიხშირის  $0 \leq \omega \leq \infty$  დიაპაზონში ცვლილებისას  $D(j\omega)$  ვექტორი საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით მობრუნდეს  $\frac{n\pi}{2}$  კუთხით, სადაც  $n$  არის მახასიათებელი განტოლების რიგი.

### მართვის სისტემის მდგრადობის მიხაილოვის კრიტერიუმის II ფორმულირება

მართვის სისტემის მდგრადობისათვის, საჭიროა მდგრადობის მრუდს ჰქონდეს გლუვი სპირალური ფორმა მისი ბოლო მიმართული უნდა იყოს უსასრულობისკენ და თანმიმდევრობით გადიოდეს კორდინატთა სისტემის კვადრანტებს.

განვიხილოთ მაგალითი 1:

შევაფასოთ მიხაილოვის კრიტერიუმის მიხედვით იმ სისტემის მდგრადობა, რომლის მახასიათებელ განტოლებასაც აქვს შემდეგი სახე:

$$p^3 + 0,5p^2 + p + 2 = 0$$

მიხაილოვის მრუდს ექნება სახე:

$$D(j\omega) = (j\omega)^3 + 0,5(j\omega)^2 + j\omega + 2$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $j = \sqrt{-1}$  და განვახორციელებთ გარდაქმნებს მივიღებთ

$$D(j\omega) = (\sqrt{-1} \omega)^3 + 0,5(\sqrt{-1} \omega)^2 + \sqrt{-1} \omega + 2$$

$$D(j\omega) = -j \omega^3 - 0,5 \omega^2 + j\omega + 2$$

$$D(j\omega) = 2 - 0,5 \omega^2 + j(\omega - \omega^3)$$

გოდოგრაფის რეალური ნაწილი  $\text{Re}(\omega) = 2 - 0,5 \omega^2$ ;

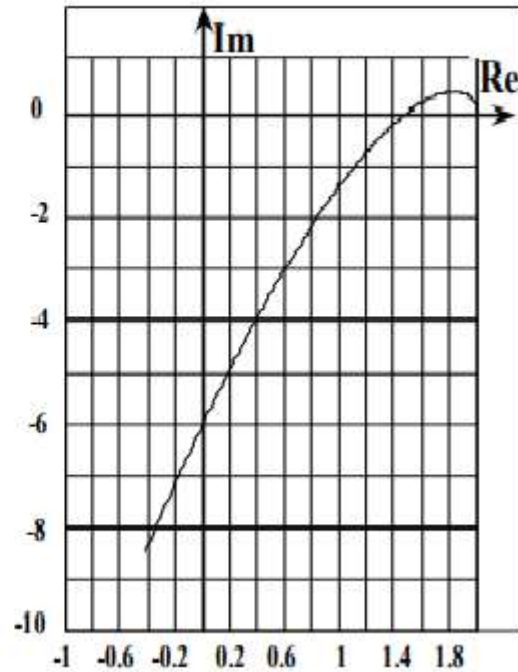
გოდოგრაფის წარმოსახვითი ნაწილი  $\text{Im}(\omega) = \omega - \omega^3$ .

ავაგოთ ცხრილი  $\text{Re}(\omega)$  და  $\text{Im}(\omega)$  თვის  $\omega$ -ს ზოგიერთი მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ სურათს (ნახ.11.5)

ნახაზის მარცხენა ნაწილში მოცემულია  $\text{Re}(\omega)$  და  $\text{Im}(\omega)$  თვის  $\omega$ -ს იმ მნიშვნელობებისთვის (ეს მნიშვნელობები აღებულია ნებისმიერად), რომლებიც მოთავსებულია  $[0;2,2]$  შუალედში ბიჯით 0,2. მარჯვენა მხარეში კი ამ ცხრილური მონაცემებით აგებულია გოდოგრაფი. ნახ.11.5-დან ჩანს, რომ დარღვეულია გოდოგრაფის მიერ კვადრანტების გავლის თანმიმდევრობა. აქედან დასკვნა **სისტემა არამდგრადია**.

გოდოგრაფის ცხრილური მონაცემები

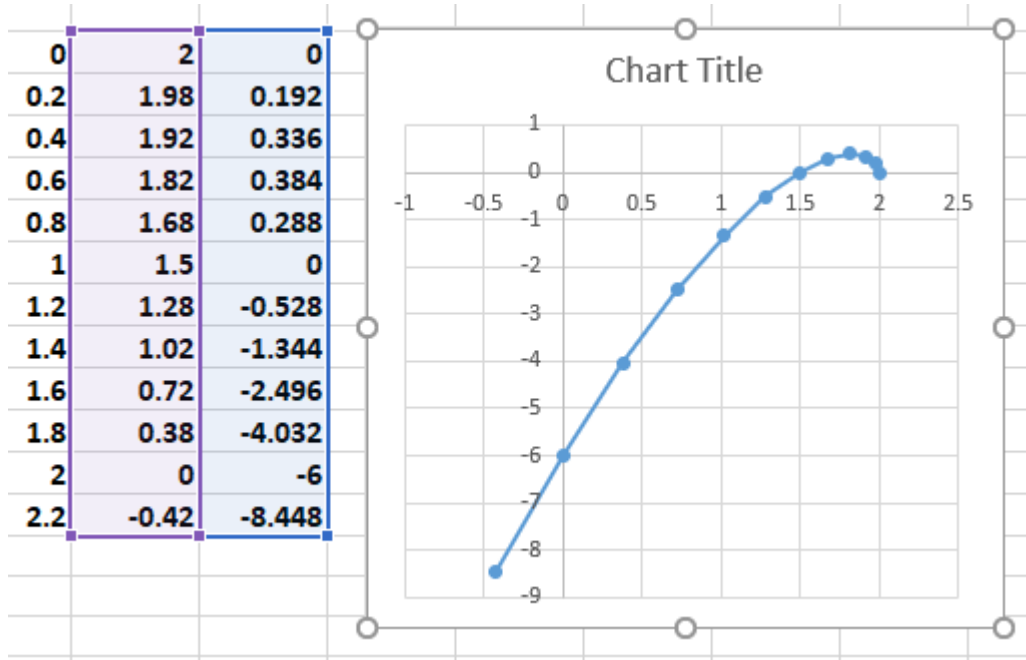
$\omega$	Re	Im
0.0	2.00	0.00
0.2	1.98	0.19
0.4	1.92	0.336
0.6	1.82	0.384
0.8	1.68	0.288
1.0	1.50	0.00
1.2	1.28	-0.53
1.4	1.02	-1.34
1.6	0.72	-2.50
1.8	0.38	-4.00
2.0	0.00	-6.00
2.2	-0.42	-8.40



ნახ.11.5 მიხაილოვის გოდოგრაფი ცხრილთან ერთად

იგივე გამოთვლები შეიძლება სულ მარტივად განხორციელდეს Excel - ში





განვიხილოთ მაგალითი 2.

მიხაილოვის კრიტერიუმით შევადგასოთ იმ სისტემის მდგრადობა რომელიც მოცემულია განტოლებით

$$0,5 \cdot p^4 + 5 \cdot p^3 + 16 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 7,5 = 0.$$

მიხაილოვის მრუდს ექნება სახე:

$$M(i\omega) = 0,5 \cdot (i\omega)^4 + 5 \cdot (i\omega^3) + 16 \cdot (i\omega)^2 + 19 \cdot (i\omega) + 7,5 =$$

$$= 0,5 \cdot \omega^4 - 16 \cdot \omega^2 + 7,5 + i \cdot (19 \cdot \omega - 5 \cdot \omega^2).$$

განვსაზღვროთ მრუდის Re და Im ღერძების გადაკვეთის

$$0,5 \cdot \omega^4 - 16 \cdot \omega^2 + 7,5 = 0; \quad 19 \cdot \omega - 5 \cdot \omega^3 = 0.$$

Re ღერძთან გადაკვეთის წერტილია

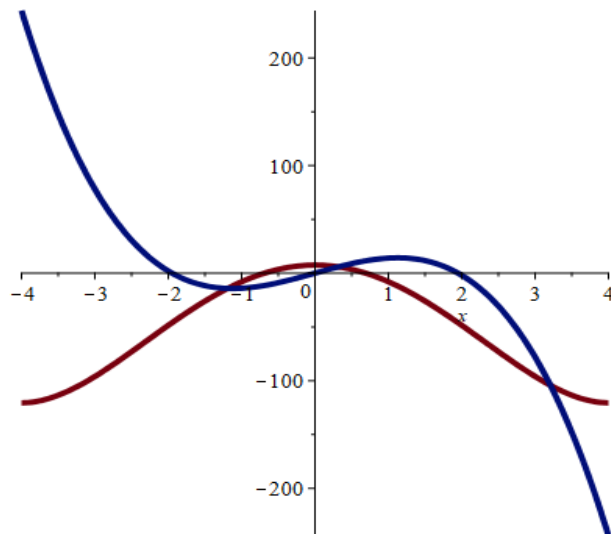
$$\omega_3 = \sqrt{19/5} = 1,95.$$

Im ღერძთან გადაკვეთის წერტილია

$$\omega_2 = \sqrt{16 - \sqrt{256 - 15}} = 0,7 \quad \text{и} \quad \omega_4 = \sqrt{16 + \sqrt{256 - 15}} = 5,6.$$

მრუდი თანმიმდევრობით გადაკვეთს ნამდვილ ნახევარ ღერძს, შემდეგ წარმოსახვით ღერძს, შემდეგ ისევ ნამდვილს და შემდეგ წარმოსახვითს. ე.ი. სისტემა მდგრადია

`plot([0.5x^4 - 16x^2 + 7.5, 19x - 5x^3], x=-4..4, thickness=4)`



`solve(0.5x^4 - 16x^2 + 7.5=0)`

`0.6898009160, -0.6898009160, 5.614639320, -5.614639320`

`solve(19x - 5x^3=0)`

`0., 1.949358869, -1.949358869`

ნახ. 11.6 პროგრამა **Maple** -ზე შესრულებული მაგალითი2.

## 11.2. ნაიკვისტის მდგრადობის კრიტერიუმი

მდგრადობის სიხშირული მახასიათებელი შემუშავებული იქნა 1932 წელს ამერიკელი მეცნიერის გ.ნაიკვისტის მიერ. ეს კრიტერიუმი გვამძლევს საშუალებას ვიმსჯელოთ დინა-

მიური სისტემის მდგრადობის შესახებ ღია სისტემის ამპლიტუდურ-ფაზური მახასიათებლების სახის მიხედვით. ვთქვათ ღია სისტემის გადაცემის ფუნქციას აქვს სახე:

$$W_p(S) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{R(S)}{Q(s)}, \quad m \leq n. \quad (11.11)$$

როგორც ვიცით გამოსახულება

$$Q(s) = 0 \quad (11.12)$$

(11.12) არის (11.11) ღია სისტემის მახასიათებელი განტოლება.

თუ (11.11)-ში განვახორციელებთ ჩასმას  $S = j\omega$  -ს, მაშინ (11.11) მიიღებს სახეს:

$$W_p(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} =, \quad (11.13)$$

$$= U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}, \quad (11.14)$$

სადაც  $U(\omega)$  და  $V(\omega)$ - არიან შესაბამისად გადაცემის ფუნქციის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები.  $A(\omega)$  და  $\Phi(\omega)$  - არიან შესაბამისად სიხშირული გადაცემის ფუნქციის მოდული და ფაზა, რომლებიც განისაზღვრებიან შემდეგი ფორმულებით:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad \Phi(\omega) = \text{Arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (11.15)$$

თუ სიხშირე  $\omega$  იცვლება  $(-\infty, +\infty)$  შუალედში, მაშინ ვექტორი  $W_p(j\omega)$  იცვლება სიდიდისა და ფაზის მიხედვით. კომპლექსურ სივრცეში ამ ვექტორის ბოლოთი მოხაზულ მრუდს ეწოდება ღია სისტემის ამპლიტუდურ-ფაზურ მახასიათებელს, ან ნაიკვისტის გოდოგრაფს.

ამპლიტუდურ ფაზური მახასიათებელი (ა.ფ.მ) სიმეტრიულია ნამდვილ ღერძის მიმართ, ამიტომ შეგვიძლია გამოვთვალოთ მისი მხოლოდ ის ნაწილი, რომელიც შეესაბამება დადებით სიხშირეებს  $\omega > 0$ . თუ მართვის ობიექტს რომელსაც აქვს  $W_p(S)$  გადაცემის ფუნქცია ერთეულოვანი უარყოფითი უკუკავშირით ჩაკვეტავთ, მაშინ მივიღებთ ჩაკეტილ სისტემას შემდეგ გადაცემის შემდეგი ფუნქციით:

$$W = \frac{W_p(S)}{1+W_p(S)} = \frac{\frac{R(s)}{Q(s)}}{1+\frac{R(s)}{Q(s)}} = \frac{R(s)}{Q(s)+R(s)},$$

სადაც  $\mathbf{1} + \mathbf{W}_p(s) = \mathbf{Q}(s) + \mathbf{R}(s)$  არის ჩაკეტილი სისტემის მახასიათებელი პოლინომი. განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია  $\Psi(j\omega) = \mathbf{1} + \mathbf{W}_p(j\omega)$ . (11.13)-ის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\Psi(j\omega) = \mathbf{1} + \mathbf{W}_p(j\omega) = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{R}(j\omega)}{\mathbf{Q}(j\omega)} = \frac{\mathbf{Q}(j\omega) + \mathbf{R}(j\omega)}{\mathbf{Q}(j\omega)}, \quad (11.16)$$

სადაც  $\mathbf{Q}(j\omega)$  არის ღია სისტემის მახასიათებელი მრუდი,  $\mathbf{Q}(j\omega) + \mathbf{R}(j\omega)$  - კი ჩაკეტილი სისტემის მახასიათებელი მრუდი.

### 11.2.1. ნაიკვისტის მდგრადობის კრიტერიუმი ღია მდგრადი სისტემის შემთხვევაში.

თუ მართვის ღია სისტემა არის მდგრადი, მაშინ არგუმენტის ცვლილება  $\omega$  სიხშირის ზრდადობის დროს  $(0, +\infty)$  შუალედში ტოლი იქნება:

$$\Delta \arg \mathbf{Q}(j\omega) = \frac{\pi n}{2}, \quad 0 \leq \omega \leq \infty \quad (11.17)$$

$n$  - არის (11.13) სახის ღია სისტემის მახასიათებელი განტოლების ხარისხი.

ჩაკეტილი და ღია სისტემების მახასიათებელ განტოლებათა ხარისხები ემთხვევა ერთმანეთს, რადგან რეალურ სისტემებში გადაცემის ფუნქციის მრიცხველის ხარისხი ყოველთვის ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე. ამ  $\mathbf{D}(j\omega) = \mathbf{Q}(j\omega) + \mathbf{R}(j\omega)$  ჩაკეტილი სისტემის მახასიათებელი მრუდის არგუმენტი,  $\omega$  სიხშირის ზრდადობის დროს  $(0, +\infty)$  შუალედში ტოლი იქნება:

$$\Delta \arg \mathbf{D}(j\omega) = \frac{\pi(n-2p)}{2}, \quad 0 \leq \omega \leq \infty \quad (11.18)$$

სადაც  $p$  არის  $\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{0}$  მახასიათებელი განტოლების იმ ფესვთა რაოდენობა, რომელიც მოთავსებული არიან კომპლექსური სიბრტყის მარჯვენა მხარეში.

(11.16) დამხმარე ფუნქციის არგუმენტის ცვლილება  $\omega$  სიხშირის ზრდადობის დროს  $(0, +\infty)$  შუალედში, ტოლია  $\mathbf{D}(j\omega)$  და  $\mathbf{D}_p(j\omega)$  სხვაობისა ანუ:

$$\begin{aligned} \Delta \arg \Psi(j\omega) &= \Delta \arg \mathbf{D}(j\omega) - \Delta \arg \mathbf{D}_p(j\omega) = \\ &= \frac{\pi}{2}(n - 2p) - \frac{n\pi}{2} = -p\pi, \quad 0 \leq \omega \leq \infty \end{aligned} \quad (11.19)$$

ჩაკეტილი სისტემა იქნება მდგრადი, თუ მარჯვენა ფესვთა რაოდენობა ( $p=0$ ) ნოლის ტოლია. ანუ თუ

$$\Delta \arg \Psi(j\omega) = 0, \quad 0 \leq \omega \leq \infty \quad (11.20)$$

$\Psi(j\omega)$  ვექტორი მოხაზავს ნოლის ტოლ კუთხეს მაშინ, როცა გოდოგრაფი არ მოიცავს კორდინატთა სათავეს. იმის გამო, რომ ღია სისტემის  $\Psi(j\omega)$  ვექტორი  $\mathbf{W}_p(j\omega)$  ვექტორისაგან განსხვავდება ერთით, ამიტომ  $\Psi(j\omega)$  მრუდიდან შეგვიძლია გადავიდეთ  $\mathbf{W}_p(j\omega)$  მრუდზე, თუ  $\Psi(j\omega)$  მრუდს დავძრავთ ერთი ერთეულით მარჯვნივ.

ღია მდგრადი სისტემისათვის ნაიკვისტის კრიტერიუმს შეიძლება მივცეთ შემდეგი ფორმულირება: ჩაკეტილი მართვის ავტომატური სისტემა იქნება მდგრადი, თუ  $W_p(j\omega)$  სისტემის ამპლიტუდურ-ფაზური მახასიათებელი არ შეიცავს წერტილს, რომლის კორდინატებია  $(1, j0)$ .

### 11.2.2. ნაიკვისტის მდგრადობის კრიტერიუმი ღია არამდგრადი სისტემის შემთხვევაში.

თუ ღია სისტემა არის არამდგრადი, მაშინ სისტემის ამპლიტუდურ-ფაზური მახასიათებლები (აფმ) დადგენა ექსპერიმენტალურად შეუძლებელია. ასეთ შემთხვევაში აფმ-ს დადგენა გვიხდება მართვის სისტემის განტოლებების მიხედვით და ამით შეგვიძლია ვიმსჯელოთ სისტემის მდგრადობის შესახებ.

ღია არამდგრადი სისტემისათვის  $\omega$  სიხშირის ზრდადობის დროს  $(0, +\infty)$  შუალედში ტოლი  $D_p(j\omega)$  არგუმენტის ცვლილება გმოისახება;

$$\Delta \arg D_p(j\omega) = \frac{\pi}{2}(n - 2p), \quad 0 \leq \omega \leq \infty \quad (11.21)$$

სადაც  $p$  - არის ღია სისტემის მახასიათებელი განტოლების ფესვთა რაოდენობა. თუ ჩაკეტილი სისტემა მდგრადია ( $p = 0$ ) მაშინ არგუმენტის პრინციპის გამოყენებით გვექნება:

$$\Delta \arg D(j\omega) = \frac{\pi n}{2}, \quad (11.22)$$

(11.12)-ის, (11.21)-ის და (11.22)-ის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\begin{aligned} \Delta \arg \Psi(j\omega) &= \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg D_p(j\omega) = \\ &= \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(n - 2p) = \frac{p}{2}2\pi = p\pi, \quad 0 \leq \omega \leq \infty \quad (11.23) \end{aligned}$$

ახლა ჩამოვაცალიბოთ ნაიკვისტის კრიტერიუმი ღია არამდგრადი სისტემის

#### შემთხვევაში:

ავტომატური მართვის ჩაკეტილი სისტემა იქნება მდგრადი, თუ ღია სისტემის ამპლიტუდურ-ფაზური მახასიათებლები (აფმ)  $W_p(j\omega)$  მოიცავს წერტილს, რომლის კორდინატია  $(1, j0)$  დადებითი მიმართულებით  $\frac{p}{2}$  - ჯერ, სადაც  $p$  - არის ღია სისტემის მახასიათებელი განტოლების ფესვთა რაოდენობა. მდგრადობის საკითხის ანალიზი შესაძლებელია აგრეთვე (ი. ციპკინის თეორიის მიხედვით) ღია სისტემის (აფმ)-ს დადებით ნახევარსიბრტყეზე გადასვლების რიცხვის მიხედვით, ხოლო ჩაკეტილი სისტემა იქნება მდგრადი თუ სხვაობა (აფმ)-ს დადებით ნახევარსიბრტყეზე გადასვლების რიცხვისა  $(-\infty, -1)$  შუალედზე ტოლია  $\mp \frac{p}{2}$ , სადაც  $p$  - არის ღია სისტემის მახასიათებელი განტოლების ფესვთა რაოდენობა, რომელთაც აქვთ დადებითი ნამდვილი ნაწილი. ნაიკვისტის კრიტერიუმის გამოყენება შესაძლებელია მაშინაც, როდესაც მართვის სისტემის აღმწერი დიფერენციალური

განტოლება არ გვაქვს და მაპროექტებლებს გააჩნიათ მხოლოდ სიხშირული მახასიათებლების ექსპერიმენტული მონაცემები .

### 11.2.3. ნაიკვისტის კრიტერიუმი ღია ასტატიკური სისტემის შემთხვევაში:

თუ ღია სისტემა მდგრადობის ზღვარზეა, ანუ რომელიც ასტატიურია ასტატიურობის  $k$  ხარისხით. ამ შემთხვევაში მისი გადაცემის ფუნქციას აქვს სახე:

$$W_p(s) = \frac{K(s)}{s^k D_1(s)},$$

სადაც  $k$  არის სისტემის ღია მდგომარეობის შესაბამისი მახასიათებელი განტოლების ნულოვანი ფესვები.  $K(s)$  და  $D_1(s)$  - არიან პოლინომები  $s$  - ის მიმართ, ამასთან  $D_1(s)$  -ს არა აქვს ნულოვანი ფესვები არც ნამდვილ და არც წარმოსახვით ნახევარსიბრტყეზე. მახასიათებელი განტოლების ფესვთა ჯერადობა შეესაბამება ასტატიურობის  $k$  ხარისხს. ამ შემთხვევაში ნულოვანი ფესვების ხელოვნური წაძვრით ( $p_i = \mp \beta$ ) მომდევნო ზღრული გადასვლით ( $\beta \rightarrow 0$ ) შესაძლებელია მიყვანილ იქნას სისტემის მდგრად ან არამდგრად მდგომარეობამდე, რაც მოგვცემს საშუალებას გამოვიყენოთ მდგრადობის გარკვევის ნაიკვისტის უკვე განხილული ფორმულები.

როგორც ზემოთ გავაკეთეთ შემოვიტანოთ ფუნქცია  $\Psi(j\omega) = 1 + W_p(j\omega)$ :

$$\Psi(j\omega) = 1 + W_p(j\omega) = 1 + \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{Q(j\omega) + R(j\omega)}{Q(j\omega)}$$

სადაც  $Q(j\omega)$  - არის ღია სისტემის მახასიათებელი პოლინომი

$Q(j\omega) + R(j\omega)$  - არის ჩაკეტილი სისტემის მახასიათებელი პოლინომი.

შემოვიღოთ აღნიშვნა  $D(j\omega) = Q(j\omega) + R(j\omega)$ ;  $D_p(j\omega) = Q(j\omega)$

თუ ჩაკეტილი სისტემა მდგრადია ( $p=0, k=0, Hk=0$ ), მაშინ არგუმენტის პრინციპზე დაყრდნობით გვექნება:

$$\Delta \arg D(j\omega) = \frac{\pi n}{2}, \quad 0 \leq \omega \leq \infty$$

ვიპოვოთ  $\Psi(j\omega) = 1 + W_p(j\omega)$  ფუნქციის არგუმენტის ცვლილება:

$$\begin{aligned} \Delta \arg \Psi(j\omega) &= \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg D_p(j\omega) = \\ &= \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(n - 2p - H) = \frac{\pi}{2}(2p + H) = \frac{\pi}{2}(2p + Hk + k) \quad 0 \leq \omega \leq \infty \end{aligned}$$

სადაც  $n$  - არის ღია (ჩაკეტილი) სისტემის მახასიათებელი პოლინომის ხარისხი.

ამ ყველაფრიდან ვასკვნით, რომ ჩაკეტილი სისტემის მდგრადობისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ ღია სისტემის სიხშირული მახასიათებელი გოდოგრაფი  $W_p(j\omega)$  სიხშირის ცვლილებისას  $(0, +\infty)$  შუალედში მოიცავდეს  $(1, j0)$  წერტილს კუთხეზე

$$\frac{\pi}{2}(2p + Hk + k)$$

ანუ

$$\begin{aligned} \Delta \arg \Psi(j\omega) &= \Delta \arg [1 + W(j\omega)] = \\ &= \frac{\pi}{2}(2p + Hk + k) \quad 0 \leq \omega \leq \infty \end{aligned}$$

**11.2.4. ავტომატური მართვის ერთკონტურიანი სისტემების მდგრადობის ანალიზი მათი სიხშირული მახასიათებლების მიხედვით.**

ნაიკვისტის კრიტერიუმი აგრეთვე შეიძლება ჩამოვყალიბოთ ღია სისტემის სისტემის ლოგარითმული სიხშირული მახასიათებლების მიხედვით.  $W_p(j\omega)$  გოდოგრაფი ნამდვილი ღერძის  $(-\infty, -1)$  მონაკვეთთან შეესაბამება წერტილს, რომლისთვისაც:

$$L(\omega) = 20 \lg |W_p(j\omega)| > 0; \quad \varphi(\omega) = \arg W_p(j\omega) = -\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$$

ლოგარითმული ფაზური მახასიათებლების წერტილები, რომელთათვისაც ლოგარითმული ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებელი (ლ.ა.ს.მ.) ნოლზე მეტია და (სიხშირის ზრდისას) გადაიკვეთება წრფეებთან  $-\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$ . ქვევიდან ზევით, წარმოადგენენ დადებით გადასვლებს, ხოლო ზევიდან ქვევით უარყოფითს და რომლის ლოგარითმული ფაზურ-სიხშირული მახასიათებელი (ლ.ფ.ს.მ)  $\frac{p}{2}$ -ის ტოლია, სადაც  $p$  - არის ღია სისტემის მახასიათებელი განტოლების ფესვთა ის რაოდენობა, რომლებიც მოთავსებული არიან კომპლექსური სიბრტყის მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში, ხოლო თუ  $p = 0$ , მაშინ ღია სისტემა არის მდგრადი.

ახლა განვიხილოთ მაგალითები:

**მაგალითი 1.** ვთქვათ მოცემული გვაქვს სისტემის შემდეგი მახასიათებელი განტოლება

$$\lambda^6 + 6\lambda^5 + 15\lambda^4 + 20\lambda^3 + 15\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0. \quad (11.24)$$

განვსაზღვროთ სისტემის მდგრადობა მიხაილოვის კრიტერიუმის მიხედვით.

(11.24) განვახორციელოთ ჩასმა  $\lambda = j\omega$  და გავაცალკევოთ  $U(\omega)$  ნამდვილი და  $V(\omega)$  წარმოსახვითი ნაწილები.

$$(j\omega)^6 + 6(j\omega)^5 + 15(j\omega)^4 + 20(j\omega)^3 + 15(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 1 = 0;$$

$$-\omega^6 + 15\omega^4 - 15\omega^2 + 1 + 6\omega^5j - 20\omega^3j + 6\omega j = 0;$$

$$U(\omega) = -\omega^6 + 15\omega^4 - 15\omega^2 + 1;$$

$$V(\omega) = 6\omega^5j - 20\omega^3j + 6\omega j = \omega(6\omega^4 - 20\omega^2 + 6)j$$

და საბოლოოდ გვექნება:

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = -\omega^6 + 15\omega^4 - 15\omega^2 + 1 + \omega(6\omega^4 - 20\omega^2 + 6)j$$

ამ ამოცანის გადაწყვეტა განვახორციელოთ **MATLAB** პროგრამაში.

```
clear all,clc,close all
w = 0:0.0001:1.1;
U = -w.^6+15*w.^4-15*w.^2+1;
V = w.*(6*w.^4-20*w.^2+6);
figure(1);
line(U,V,'linew',2)
title(sprintf('%s [%1.0f; %1.1f]',...
'\bf\fontsize{12} სიმბოლის ცვლილება: \fontsize{14}\it\omega \fontsize{12}\rm\bf\in',w(1),w(end)))
grid on
xlabel('\bf\fontsize{12} Real\it D\rm\bf( \itj\omega\rm\bf\fontsize{12}))')
ylabel('\bf\fontsize{12} Imag\it D\rm\bf( \itj\fontsize{14}\omega\rm\bf\fontsize{12}))')
set(gcf,'color','w')
%-----
w = 1.1:0.0001:1.75;
U = -w.^6+15*w.^4-15*w.^2+1;
V = w.*(6*w.^4-20*w.^2+6);
%-----
```

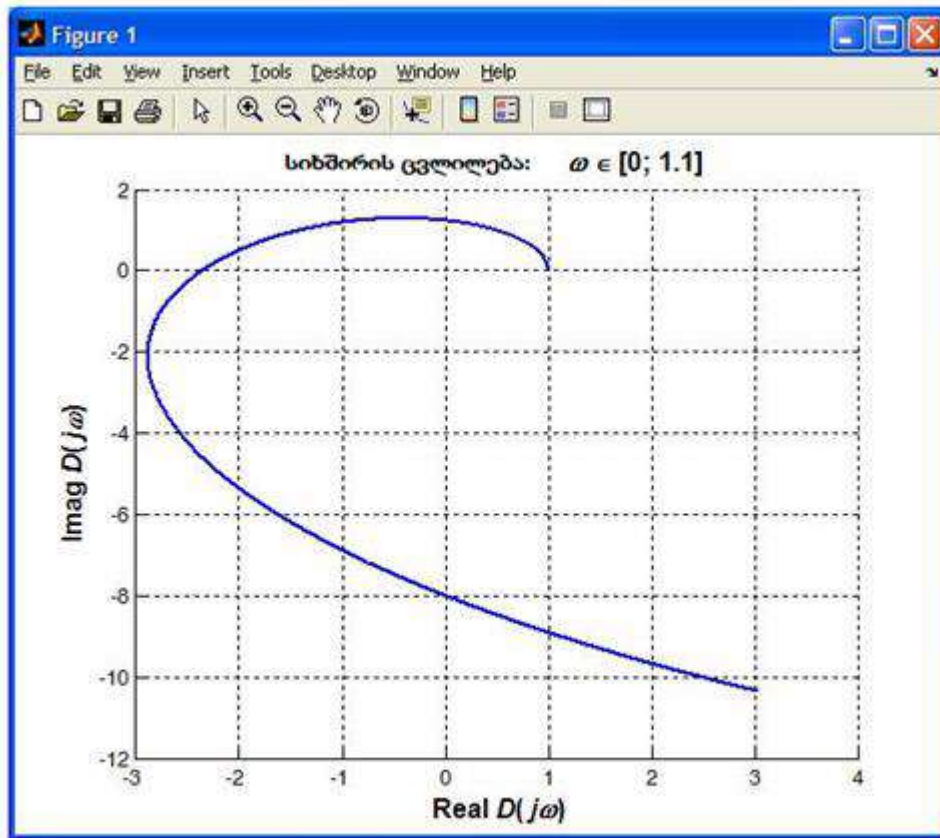


```

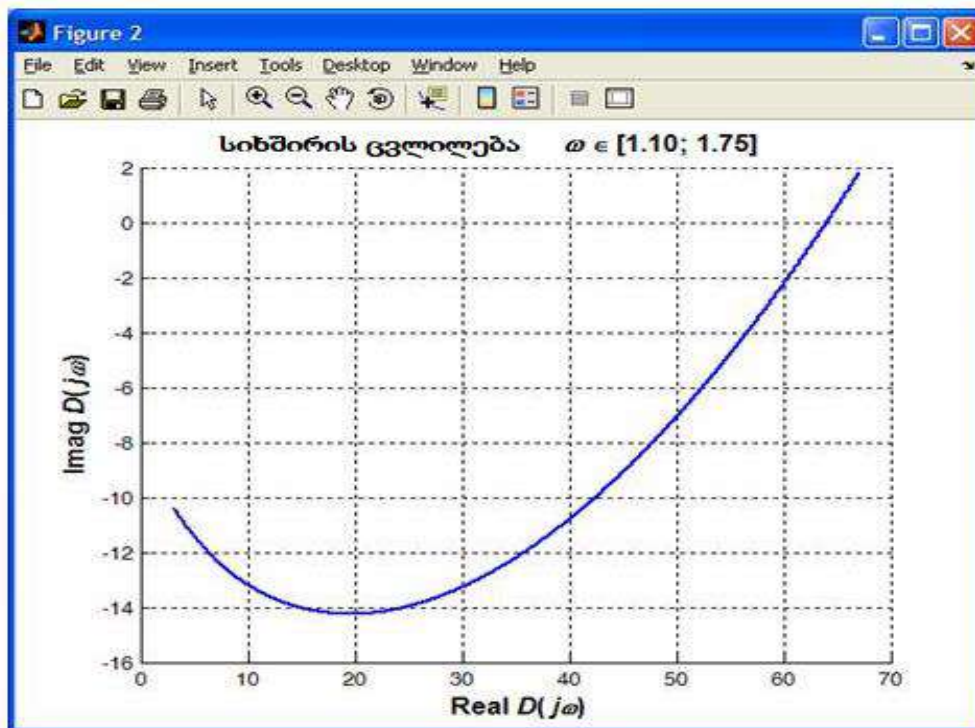
figure(2);
line(U,V,'linew',2)
title(sprintf('%s [%1.2f; %1.2f]',...
'\bf\fontsize{12} სიხშირის ცვლილება: \fontsize{14}\it\omega \fontsize{12}\rm\bf\in',w(1),w(end)))
grid on
xlabel('\bf\fontsize{12} Real\it D\rm\bf( \itj\omega\rm\bf\fontsize{12})')
ylabel('\bf\fontsize{12} Imag\it D\rm\bf( \itj\fontsize{14}\omega\rm\bf\fontsize{12})')
set(gcf,'color','w')
%-----
w = 1.75:0.0001:2.6;
U = -w.^6+15*w.^4-15*w.^2+1;
V = w.*(6*w.^4-20*w.^2+6);
%-----
figure(3);
line(U,V,'linew',2)
title(sprintf('%s [%1.2f; %1.2f]',...
'\bf\fontsize{12} სიხშირის ცვლილება: \fontsize{14}\it\omega \fontsize{12}\rm\bf\in',w(1),w(end)))
grid on
xlabel('\bf\fontsize{12} Real\it D\rm\bf( \itj\omega\rm\bf\fontsize{12})')
ylabel('\bf\fontsize{12} Imag\it D\rm\bf( \itj\fontsize{14}\omega\rm\bf\fontsize{12})')
set(gcf,'color','w')
%-----
figure(4);
w = 2.6:0.0001:3.75;
U = -w.^6+15*w.^4-15*w.^2+1;
V = w.*(6*w.^4-20*w.^2+6);
line(U,V,'linew',2)
title(sprintf('%s [%1.2f; %1.2f]',...
'\bf\fontsize{12} სიხშირის ცვლილება: \fontsize{14}\it\omega \fontsize{12}\rm\bf\in',w(1),w(end)))
grid on
xlabel('\bf\fontsize{12} Real\it D\rm\bf( \itj\omega\rm\bf\fontsize{12})')
ylabel('\bf\fontsize{12} Imag\it D\rm\bf( \itj\fontsize{14}\omega\rm\bf\fontsize{12})')
set(gcf,'color','w')
%-----
figure(5);
w = 3.75:0.0001:5.15;
U = -w.^6+15*w.^4-15*w.^2+1;
V = w.*(6*w.^4-20*w.^2+6);
line(U,V,'linew',2)
title(sprintf('%s [%1.2f; %1.2f]',...
'\bf\fontsize{12} სიხშირის ცვლილება: \fontsize{14}\it\omega \fontsize{12}\rm\bf\in',w(1),w(end)))
grid on
xlabel('\bf\fontsize{12} Real\it D\rm\bf( \itj\omega\rm\bf\fontsize{12})')
ylabel('\bf\fontsize{12} Imag\it D\rm\bf( \itj\fontsize{14}\omega\rm\bf\fontsize{12})')
set(gcf,'color','w')

```

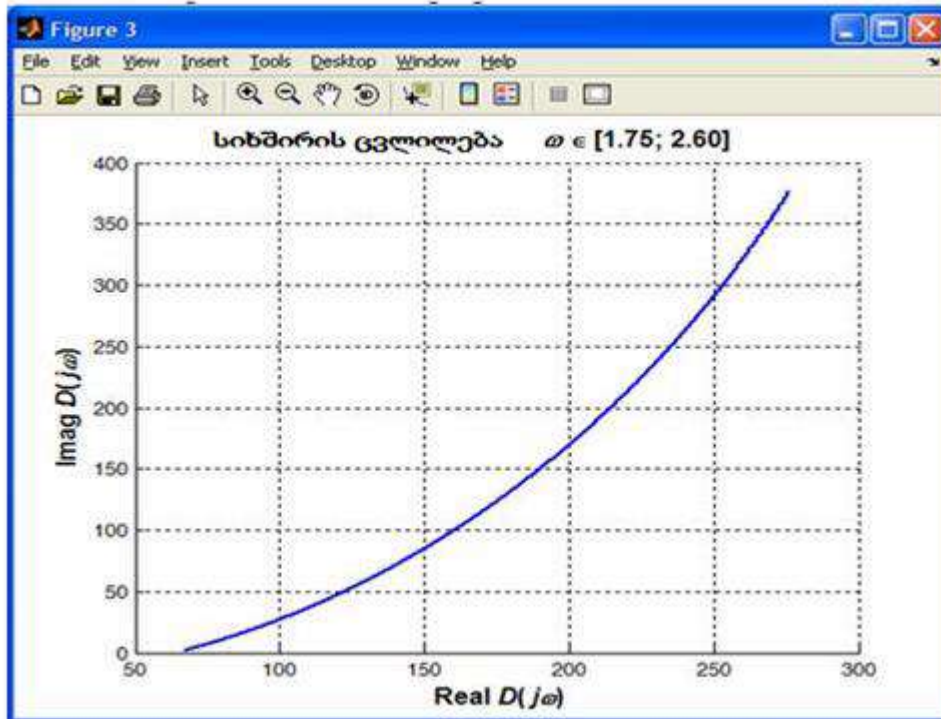
ამ პროგრამის შესრულების შემდეგ გამოდის შემდეგი გრაფიკები:



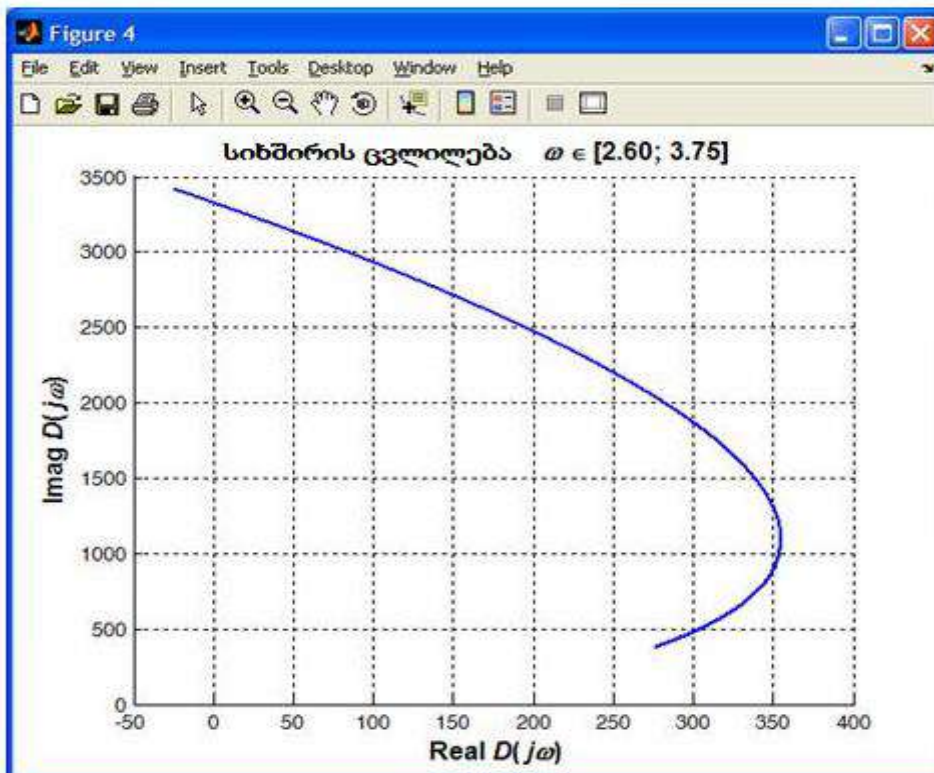
ნახ.11.7 მიხაილოვის გოდოგრავის პირველი ნაწილი



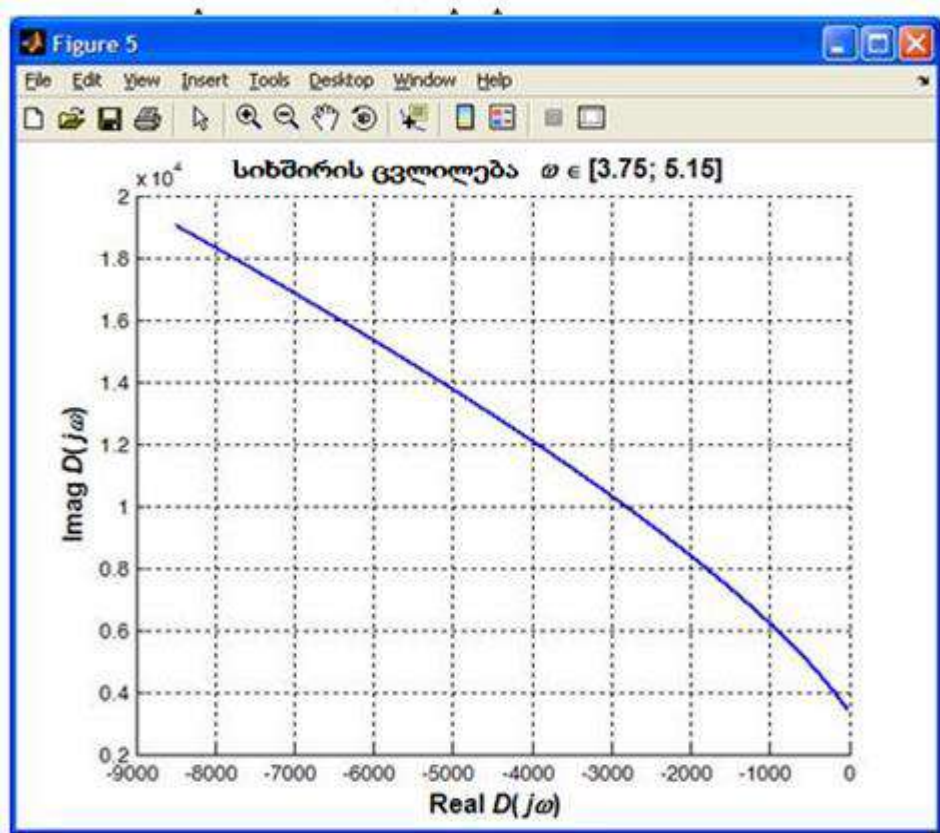
ნახ.11.8 მიხაილოვის გოდოგრავი მეორე ნაწილი



ნახ.11.9 მიხაილოვის გოდოგრაფი მესამე ნაწილი



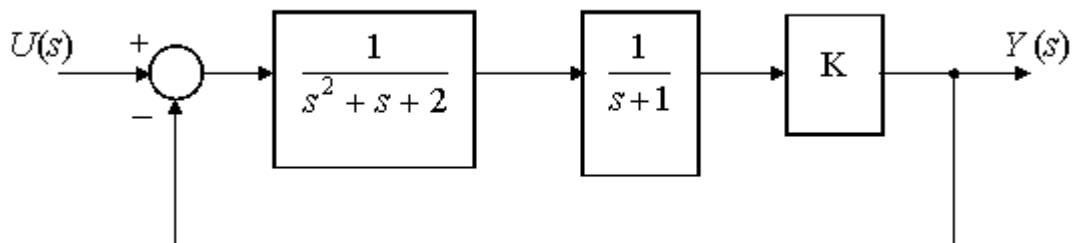
ნახ. 11.10 მიხაილოვის გოდოგრაფი მეოთხე ნაწილი



ნახ. 11.11 მიხაილოვის გოდოგრაფი მეხუთე ნაწილი

**მაგალითი 2.**

მიხაილოვის მდგრადობის კრიტერიუმის გამოყენებით K გაძლიერების კოეფიციენტის ყველა დადებითი მნიშვნელობა, რომლისათვისაც სისტემა იქნება მდგრადი სისტემა მოც ნახ.11.12-ზე



ნახ.11.12 მართვის სისტემის სქემა

მოვებზნოთ მოცემული სისტემის გადაცემის ფუნქცია. ამისათვის გამოვიყენოთ უარყოფითი უკუკავშირის ფორმულა :

$$W(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)}$$

$$W_p(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 2)} \frac{1}{(s + 1)} K = \frac{K}{s^3 + 2s^2 + 3s + 2}$$

ეს არის ღია სისტემის გადაცემის ფუნქცია. მდგრადობას, როგორც ვიცით განვსაზღვრავთ მნიშვნელის პოლინომის მიხედვით. ჩაკეტილი სისტემისათვის მნიშვნელი პოლინომს ექნება სახე:

$$D(s) = 1 + W_p(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + K.$$

$s = j\omega$  ჩასმის შემდეგ მივიღებთ მიხაილოვის გოდოგრაფის ასაგებ გამოსახულებას:

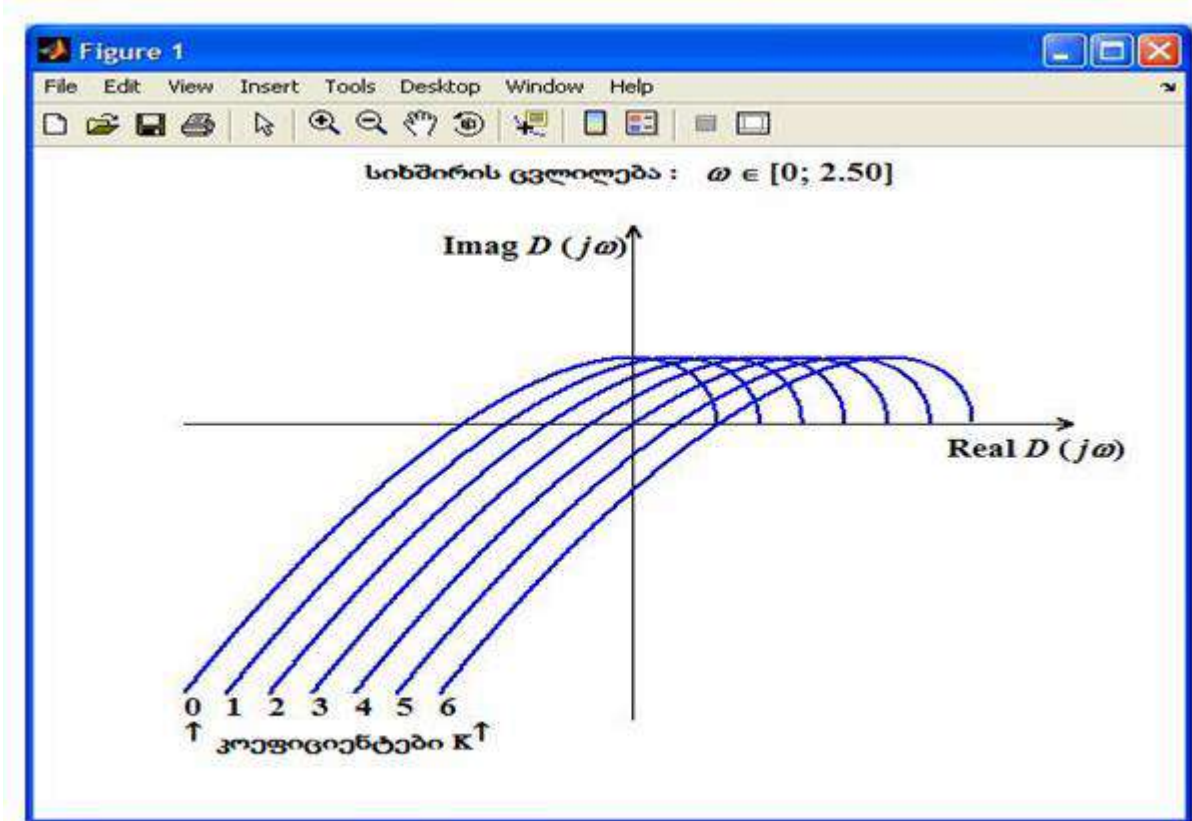
$$\begin{aligned} D(j\omega) &= (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 3(j\omega) + K = \\ &= -\omega^3 j - 2\omega^2 + 3\omega j + 2 + K. \end{aligned}$$

გამოვყოთ ნამდვილი  $U(\omega)$  და წარმოსახვითი  $V(\omega)$  ნაწილების გამოსახულებები  $D(j\omega)$ -დან.

$$\begin{aligned} U(\omega) &= -2\omega^2 + 2 + K; \\ V(\omega) &= \omega(-\omega^2 + 3). \end{aligned}$$

```
clear all,clc,close all
w = 0:0.0001:2.5;
m = 0;
for K = 0:6
    m = m + 1;
    U = -2*w.^2+2+K; V = w.*(-w.^2+3);
    Umin(m,1) = min(U);
    Umax(m,1) = max(U);
    Vmax(m,1) = max(V);
    line(U,V,'linew',2)
    text(min(U)-0.2,min(V)*1.05,sprintf('%s %1.0f',...
    '\bf\fontsize{12}',K))
end
title(sprintf('%s [%1.0f; %1.2f]',...
'\bf\fontsize{12} სიმძირის ცვლილება: \fontsize{14}\it\omega \fontsize{12}\rm\bf\in',w(1),w(end)))
line([0,0],[min(V)*1.1,max(V)*3],'color','k')
line([min(min(Umin)),max(max(Umax))*1.3],[0,0],'color','k')
text(max(max(Umax))*1.3,0,'\bf\fontsize{12}<', 'rotation',180)
text(0.05,max(V)*3,'\bf\fontsize{12}<', 'rotation',-90)
text(max(max(Umax))*0.9,-0.7,...
'\bf\fontsize{12} Real\it D\rm\bf(\it j\omega\rm\bf)')
text(min(min(Umin)),min(V)*1.15,...
'\bf\fontsize{11}\uparrow კოეფიციენტები \itK \rm\bf\uparrow')
text(-4.3,max(V)*2.7,'\bf\fontsize{12} Imag\it D\rm\bf(\it j\omega\rm\bf)')
set(gcf,'color','w')
axis('off'); axis equal
```

მესამე რიგის სისტემის მიხაილოვის კრიტერიუმით მდგრადობისათვის გოდოგრაფმა წარმოსახვით სიბრტყეზე თანმიმდევრობით უნდა გაიაროს სამი კვადრანტი ისე რომ არსად არ გახდეს ნოლი. გოდოგრაფის კორდინატა სათავეზე გავლა ნიშნავს, რომ სისტემა მდგრადობის ზღვარზეა. ვცვალოთ გამამპლიერებელი  $K$  კოეფიციენტი მანამ სანამ გოდოგრაფი არ გაივლის კორდინატა სათავეზე და ეს მნიშვნელობა იქნება  $K_{კრ}$  კრიტიკული. ამ მაგალითის ამოსახსნელად ავაგოთ სკრიპტ-ფაილი **MATLAB**-ში. მას აქვს სახე(სკრიპტი მოცემულია ზემოთ):



ნახ.11.13 მიხაილოვის მრუდები სხვადასხვა  $K$  კოეფიციენტისთვის

როგორც ნახ.11.13 - დან ჩანს გამამპლიერებელი კოეფიციენტის  $K < 4$  მნიშვნელობები-სათვის მართვის სისტემა მდგრადია, რადგანაც მიხაილოვის ეს გოდოგრაფები გაივლიან სიბრტყეზე თანმიმდევრობით სამ კვადრანტს და არსად არ ნოლდებიან. ხოლო  $K=4$  მნიშვნელობაზე გოდოგრაფი კომპლექსურ სიბრტყეზე გაივლის კორდინატა სათავეს ე.ი.  $K_{კრ} = 4$ .

## თავი 12.

### წრფივი სტაციონარული დინამიური სისტემების კვლევა Matlab გარემოში

#### 12.1. ერთგანზომილებიანი წრფივი უწყვეტი სისტემის ანალიზი Matlab გარემოში

განსახილველია ამოცანები:

- სისტემის მოდელის შეტანა გადაცემის ფუნქციის სახით;
- მდგომარეობათა სივრცეში ექვივალენტური მოდელების აგება, „ნოლები-პოლუსები-გამლიერების კოეფიციენტები“;
- შევისწავლოთ იმპულსური და გარდამავალი მახასიათებლების, აგრეთვე კერძო მახასიათებლების აგება;
- შევისწავლოთ ეკრანული ფანჯარა **LTI Viewer** სარგებლობა, სხვადასხვა მახასიათებლების აგებისათვის;
- შევისწავლოთ პროცესები წრფივი სისტემის გამოსასვლელზე, შესასვლელზე ნებისმიერი სიგნალის მიწოდებისას.

#### სამუშაოს ანგარიში:

გამოსაკვლევი გადაცემის ფუნქცია, სამუშაოს მიმდინარეობის „პროტოკოლი“ (შესაყვანი ბრძანებები გაცვლის ბუფერის გამოყენებით **Matlab** სამუშაო ფანჯრის გამოყენებით), აგრეთვე დინამიური მახასიათებლების გრაფიკები.

#### 12.2. წრფივი სისტემების მოდელები.

წრფივი სტაციონარული სისტემების აღწერისათვის შეიძლება გამოყენებულ იქნას რამოდენიმე მეთოდი:

- დიფერენციალური განტოლებები;
- მოდელები მდომარეობათა სივრცეში;
- გადაცემის ფუნქციები;
- „ნოლები-პოლუსები-გამლიერების კოეფიციენტები“ ტიპის მოდელები.

პირველი ორი მეთოდი აღწერენ სისტემის ყოფა-ქვევას დროებით გარემოში და ასახავს სიგნალებს შორის შიდა კავშირებს „ნოლები-პოლუსები-გამლიერების კოეფიციენტები“ ტიპის მოდელები და გადაცემის ფუნქციები მიეკუთვნებიან აღწერის სიხშირული მეთოდების კატეგორიას და ასახვენ მხოლოდ შესასვლელზე და გამოსასვლელზე არსებულ მდგომარეობებს (თვისებებს).

სიხშირული მეთოდები გვამლევენ საშუალებას სისტემის ანალიზისა და სინთეზისათვის გამოვიყენოთ ალგებრული მეთოდები, რომლებიც ხშირად გვიმარტივებენ გამოთვლებს. მეორეს მხრივ ავტომატური გამოთვლებისთვის უფრო გამოსადეგია მეთოდები, რომლებიც მუშავდებიან მოდელებით მდგომარეობათა

სივრცეში. ეს იმიტომ, რომ ისინი იყენებენ წრფივი ალგებრის უფრო მდგრად ალგორითმებზე დაყრდნობილ გამოთვლებს.

ობიექტების დინამიკის განმსაზღვრელი განტოლებები, რომლების იგებიან ფიზიკის კანონების გათვალისწინებით, უმეტეს შემთხვევებში აღიწერებიან არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებით. მათი ანალიზისა და სინთეზისათვის გვიხდება მათი გაწრფივება მეცემულ რეჟიმში და ამის შედეგად ვიღებთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებებს.

ობიექტის მოდელის გაწრფივებული მოდელი შეიძლება აღიწეროს შემდეგი დიფერენციალური განტოლებით:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$

$$= b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

ნულოვანი საწყისი პირობების შემთხვევაში. ამასთან  $m \leq n$ .

მოდელი მდგომარეობათა სივრცეში დაკავშირებულია დიფერენციალური განტოლებების კოშის სტანდარტული ფორმით ( განტოლებათა წრფივი სისტემების სახით):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}.$$

სადაც  $\mathbf{x}$  - ცვლადების შემცველი ვექტორია  $n \times 1$  განზომილების;

$\mathbf{u}$  – შესასვლელი სიგნალის ( მართვის ვექტორი)  $m \times 1$  განზომილებისა;

$\mathbf{y}$  - გამოსასვლელი სიგნალის ვექტორი  $p \times 1$  განზომილებისა;

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  და  $\mathbf{D}$ -მუდმივი მატრიცებია.

მატრიცებზე მოქმედებების წესების გათვალისწინებით  $\mathbf{A}$  მატრიცა უნდა იყოს კვადრატული  $n \times n$  განზომილებისა;  $\mathbf{B}$  მატრიცა უნდა იყოს მართკუთხოვანი

$n \times m$  განზომილებისა;  $\mathbf{C}$ -მატრიცა  $p \times n$  განზომილებისა და  $\mathbf{D}$ -მატრიცა  $p \times m$  განზომილებისა. სისტემებისთვის, რომლებსაც აქვთ ერთი შესასვლელი და ერთი გამოსასვლელი  $\mathbf{D}$ -მატრიცა სკალარული სიდიდეა.

**12.3. წრფივი სტაციონარული სისტემის გადაცემის ფუნქცია**  $W(s)$  კომპლექსური ტიპის  $s$  ცვლადის მიმართ, განსაზღვრულია, როგორც შეფარდება ლაპლასის გარდაქმნისა გამოსასვლელზე არსებულ ლაპლასის გარდაქმნასთან ნულოვანი საწყისი მნიშვნელობების პირობებში:

$$W(s) = \frac{y(s)}{U(s)}.$$



ზემოთ მოცემული დიფერენციალური განტოლებისათვის, გადაცემის ფუნქციას ექნება სახე:

$$W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

გადაცემის ფუნქციის მიხედვით შესაძლებელია „ნოლი-პოლუსი“ ტიპის მოდელის აგება. ნოლები ეწოდება მრიცხველის ფესვებს, პოლუსები კი მნიშვნელის ფესვებს.

#### 12.4. წრფივი სისტემების დინამიური მახასიათებლები.

დინამიური თვისებები ახასიათებენ სპეციალური ტიპის რეაქციებს შესასვლელ ზემოქმედებებზე. დინამიური მახასიათებლები იყოფიან დროით და სიხშირულ მახასიათებლებად.

**დროითი მახასიათებლები.** იმპულსურ მახასიათებლად იწოდება (წონის ფუნქცია)  $w(t)$  სისტემის რეაქცია ერთჯერად უსაქსრულო იმპულსზე (დელტა-ფუნქცია ანუ დირაკის ფუნქცია) ნულოვანი საწყისი მნიშვნელობებისთვის. დელტა-ფუნქცია  $\delta(t)$  განისაზღვრება შემდეგი ტოლობებით:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

ეს გაერთიანებული ფუნქცია არიოს მათემატიკური ობიექტი, რომელიც შეესაბამება იდეალურ სიგნალს, რისი მოცემაც არ შეუძლია არც ერთ რეალურ ნმოწყობილობას. დელტა-ფუნქცია შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც მართკუთხოვანი ერთეულფართობიანი ინპულსის ზღვარი  $t=0$  წერტილში ცენტრით და თანაც იმპულსის სიგანე უნდა მიისწრაფოდეს ნულისკენ.

**12.5. გარდამავალი მახასიათებელი (გარდამავალი ფუნქცია)  $h(t)$**  ეწოდება სისტემის რეაქციას (ნულოვანი საწყისი მნიშვნელობებისათვის) ერთეულოვან საფეხურებრივ სიგნალზე (ერთეულოვანი ნახტომი):

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \infty, & t \geq 0. \end{cases}$$

იმპულსური და გარდამავალი ფუნქციები დაკავშირებულნი არიან გამოსახულებებით

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}; \quad h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau.$$

სისტემებს, რომლებსაც ინტეგრატორები არ გააჩნია გარდამავალი მახასიათებლები მიისწრაფიან მუდმივი მნიშვნელობებისაკენ. გარდამავალი მახასიათებლები იმ სისტემებისთვის, რომლებსაც გააჩნიათ დიფერენცირებადი რგოლი (გადაცემის ფუნქციის მრიცხველს აქვს ნოლი  $s=0$  წერტილში, მიისწრაფის ნოლისკენ. თუ სისტემას

გააჩნია ინტეგრირებადი რგოლები, გარდამავალი მახასიათებლები ასიმპტოტურად მიისწრაფიან წრფისაკენ, პარაბოლისაკენ და ა.შ. დამოკიდებულია ინტეგრატორების რაოდენობაზე.

გარდამავალი მახასიათებლების მიხედვით, შეიძლება მოვძებნოთ სისტემის ხარისხის უმნიშვნელოვანესი მაჩვენებლები. გადარეგულირება (overshoot) გარდამავალი პროცესის დრო(setting time).

გადარეგულირება განისაზღვრება, როგორც

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{\infty}}{h_{\infty}} \times 100\%,$$

სადაც  $h_{\max}$  - არის  $h(t)$  ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა, ხოლო  $h_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$  -

არის გამოსასვლელის დამყარებული მნიშვნელობა.

გარდამავალი პროცესის დრო ეს არის დრო, რომლის შემდეგაც გამოსასვლელზე სიგნალი განსხვავდება მოცემული დასაშვები მცირე სიდიდით (Matlab გარემოში გამოიყენება 2% -იანი სიზუსტე).

**12.6. სიხშირული მახასიათებლები.** მიიღო რა ფართო გავრცელება დინამიური სისტემების მდგრადობის კვლევისა და რეგულატორების პროექტირების საკითხებში სიხშირული მახასიათებლებმა ჰპოვეს ფართო გავრცელება.

წრფივი სისტემის შესასვლელზე ჰარმონიული (სინუსოიდალური) სიგნალის მიწოდებისას  $u(t) = \sin(\omega t)$   $\omega$  სიხშირით (ის იცვლება რადიან წამებში), გამოსასვლელზე იქნება აგრეთვე ჰარმონიული სიგნალი იგივე სიხშირისა, მაგრამ სხვა ამპლიტუდითა და ფაზით  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ , სადაც  $A$  - ამპლიტუდაა, ხოლო  $\varphi$  - ფაზის ძვრა.

სიხშირული დახასიათების ასაგებად უნდა გამოვიყენოთ ჩასმა  $s = j\omega$  გადაცემის  $W(s)$  ფუნქციაში. გამოსახულება  $W(j\omega)$  გადაცემის ფუნქციის სიხშირეა, ანუ ამპლიტუდურ-ფაზური სიხშირული მახასიათებელი მოცემული სისტემისა.  $W(j\omega)$  სიდიდის მოდულის დამოკიდებულება კომპლექსურ არგუმენტზე.

$$A(\omega) = |W(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} W(j\omega)}{\operatorname{Re} W(j\omega)}.$$

ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლები აჩვენებს, რამდენად ძლიერდება სიგნალის ამპლიტუდა ცხვადასხვა სიხშირეებისას სისტემაში გავლის შემდეგ.

პრაქტიკაში ფართო გავრცელება ჰპოვა **ბოდეს** დიაგრამამ (ლოგარითმულ ამპლიტუდური მახასიათებლები), რომელიც განისაზღვრება ასე:  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ . (ლოგარითმულ ამპლიტუდური მახასიათებლები იზომებიან დეციბალებში და აიგებიან, როგორც ფუნქციები  $\lg(\omega)$ -სი.

**პაკეტი CONTROL System Toolbox.** Matlab სისტემაში მოცემულია გამოყენებითი პაკეტი CONTROL System Toolbox, რომელიც განკუთვნილია მართვის სისტემების LTI

მოდელების (Linear Time Invariant Models-დროში ინვარიანტული წრფივი სისტემები) დამუშავებაში. ამ სისტემებს კიდეც **წრფივი სტაციონარული სისტემებიც** ეწოდება.

ამ პაკეტში შედიან 100 და მეტი სხვადასხვა ფუნქციები, მათ შორის მოდელების შექმნისა და გარდაქმნის ფუნქციები. ისინი წარმოდგენილი არიან მდგომარეობის განტოლებების სახით, გადაცემის ფუნქციების, სიხშირული და დროითი მახასიათებლების აგების ფუნქციებისა და სხვა სახით.

გადაცემის ფუნქციის ასაგებად გამოიყენება ფუნქცია **tf**, რომელსაც აქვს შემდეგი სინტაქსი: **tf(B,A)**. სადაც **B** არის გადაცემის ფუნქციის მრიცხველის კოეფიციენტების ვექტორი, **A** არის გადაცემის ფუნქციის მნიშვნელის კოეფიციენტების ვექტორი.

განვიხილოთ მაგალითი:

საჭიროა დავაფორმროთ გადაცემის ფუნქცია

$$F(s) = \frac{2s + 4}{s^3 + 0,8s^2 + 2,06s + 2,26}$$

ამ შემთხვევაში კოეფიციენტების ვექტორები მიიღებენ სახეს:

$B=[2 \ 4]$ ,  $A=[1 \ 0.8 \ 2.06 \ 2.26]$ .

გადაცემის ფუნქციის წარმოქმნას დიალოგურ რეჟიმში აქვს სახე:

>>B=[2 4];

>>A=[1 0.8 2.06 2.26];

>>f=tf(B,A);

Enter ღილაკზე დაწკაპუნების შემდეგ მეხსიერებაში იქმნება **tf** კლასის ობიექტი, რომელიც აღწერს გადაცემის ფუნქციას და ეკრანზე გამოდის გადაცემის ფუნქცია შემდეგი სახით:

Transfer function:

2s+4

-----  
s^3+0.8s^2+2.06s+2.26

გადაცემის  $F(s)$  ფუნქციის განსაზღვრა აგრეთვე შესაძლებელია მრიცხველისა და მნიშვნელის წინასწარი აგება გარეშე:

>>f=tf([2 4],[1 0.8 2.06 2.26])

გადაცემის ფუნქციის მიხედვით ადვილადაა შესაძლებელი ავაგოთ მოდელი „ნოლი-პოლუსი-კოეფიციენტი“:

>>f\_zpk=zpk(f)

Zero/pole/gain:

2(s+2)

-----  
(s+1)(s^2-0.2s+2.26)

ნოლუბად იწოდებიან მრიცხველის ფესვები, პოლუსებად კი მნიშვნელის ფესვები. ამ ფუნქციის ნოლია  $s=-2$  პოლუსები გვაქვს სამი  $s=-1$  და  $s=-0,1 \pm 1,5i$ . პოლუსების კომპლექსურ წყვილს შეესაბამება კვადრატული სამწევრი  $s^2 - 0,2s + 2,26$ .

გადაცემის  $F(s)$  ფუნქციის გარდაქმნა მდგომარეობათა სივრცეში ხორციელდება ბრძანებით:

» `f_ss = ss(f)`

`a =`

	x1	x2	x3
x1	-0.8	-1.03	-1.13
x2	2	0	0
x3	0	1	0

`b =`

	u1
x1	2
x2	0
x3	0

`c =`

	x1	x2	x3
y1	0	0.5	1

`d =`

	u1
y1	0

`Continuous-time model.`

ეს ნიშნავს მოდელის მატრიცებს ექნებათ შემდეგი სახეები:

$$A = \begin{bmatrix} -0,8 & -1,03 & -1,13 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0,5 \ 1], \quad D = 0.$$

პრაქტიკაში ძალიან ხშირად მართვის რეალური სისტემები წარმოადგენენ სტრუქტურებს ერთმანეთთან დაკავშირებული ცალკეული ბლოკების ერთობლიობას (დინამიკური ბლოკები), რომელთა შესაბამისი განტოლებები საკმაოდ მარტივია. Matlab-ში არის ფუნქციები და პროცედურები მახასიათებლების გამოთვლისათვის ამ პროცედურებს მიეკუთვნებიან:

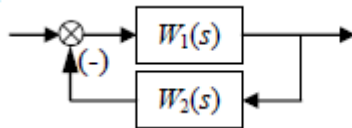
- **Plus(minus)** ან '+' ('-') ახორციელებს პარალელურ შეერთებებს ცალკეული რგოლებისას მაგალითად  $W_1$  და  $W_2$ :



- **parallel** - ახორციელებს იმავე პროცედურას
- **mtimes** - '\*' -ახორციელებს რგოლების მიმდევრობით შეერთებას (გამოიყენება ერთგანზომილებიანი სისტემებისთვის):



- **series** - მიმდევრობითი შეერთებები მრავალგანზომილებიანი სისტემებისათვის.
- **Feedback** - შეერთებები უკუკავშირებით, ანუ ისეთი შეერთება რგოლებისა, როდესაც მეორე მითითებული რგოლი შეადგენს ჯაჭვს უარყოფით უკუკავშირის პირველი რგოლისათვის



**მაგალითი:** ავავოთ მოდელი ავტომატური მართვის ჩაკეტილი სისტემისათვის, რომელშიც მართვის ობიექტი წარმოდგენილია გადაცემის ფუნქციის სამი პირველი რიგის აპერიოდული რგოლით:  $W_1 = \frac{2}{3s+1}$ ,  $W_2 = \frac{1}{2s+1}$ ,  $W_3 = \frac{1}{4s+1}$ , ხოლო უკუკავშირში ჩართულია გადაცემის ფუნქციის რეგულატორი  $R = 0,5 + \frac{0,2}{s}$

ამ ამოცანის ამოხსნას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

```

>>w1=tf([2],[3 1])           % ფორმირდება რგოლი w1
>>w2=tf([1],[2 1])          % ფორმირდება რგოლი w2
>>w3=tf([1],[4 1])          % ფორმირდება რგოლი w3
>>w=w1*w2*w3                % ფორმირდება ობიექტი
>>R=tf([0.5],[1])+tf([0.2],[1 0]) % ფორმირდება რეგულატორი
>>W_zs=feedback(w,R)        % ჩაკეტილი სისტემის ფორმირება
>>step(W_zs)                 % სისტემის გამოძახილის აგება

```

CONTROL System Toolbox წარმოადგენს საშუალებას სისტემის დროითი და სიხშირული მახასიათებლების აგებისას (ცხრილი 1)

ცხრილი 1

სინტაქსი	აღწერა
Step(<LTI-ობიექტი>)	გადაცემის ფუნქციის გრაფიკის აგება
impulse(<LTI-ობიექტი>)	იმპულსური გადაცემის ფუნქციის გრაფიკის აგება
bode(<LTI-ობიექტი>)	ლოგარითმული სიხშირული მახასიათებლების აგება(ბოდეს დიაგრამა)
nyquist(<LTI-ობიექტი>)	ნაიკვისტის სიხშირული გოდოგრაფის აგება

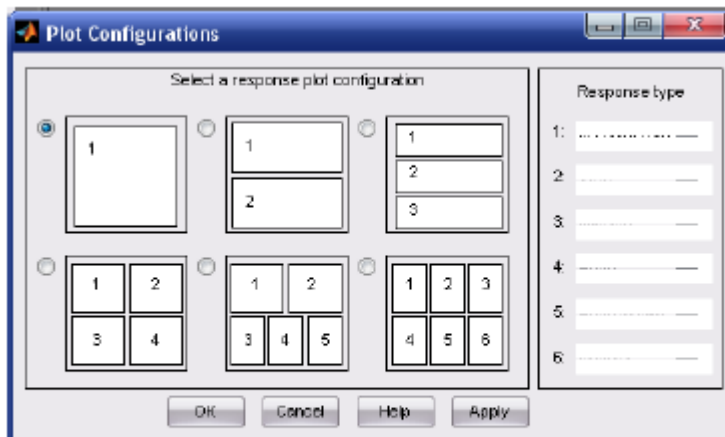
სისტემის დნამიური მახასიათებლების გრაფიკული გამოსახულების მიღებისათვის აგრეთვე შესაძლებელია გრაფიკული ფანჯრის LTI Viewer. მისი გამოძახება ხორციელდება ბრძანებით Itview რომელსაც პარამეტრად ექნება ის ცვლადი, რომელიც შეიცავს LTI ობიექტს მაგალითად:

>>ltiview(f)

გამოსაკვლევი ობიექტის ჩატვირთვა აგრეთვე შესაძლებელია უშუალოდ LTI Viewer ფანჯრიდან, ამისათვის გამოვიძახებთ ბრძანებას მენიუს პუნქტი **File->Import..**

შეიძლება გამოვიყენოთ ბრძანება **Plot Configuration...**, მენიუს პუნქტ **Edit** დან

შეგვიძლია შევარჩიოთ კონფიგურაცია, რომელიც გვადლევს გრაფიკის აგების საშუალებას (გრაფიკის აგების ფანჯრების რაოდენობა და ეკრანზე მათ განლაგებას), აგრეთვე სისტემის გამოსაყვანი მახასიათებლების სახეები (Step,impulse,Bode და სხვა) ქვეპუნქტი Response type (ნახ. 1)



ნახ .1. ფანჯარა Plot Configuration

Matlab-ში სიხშირული მახასიათებლების ასაგებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ფუნქცია **freqresp(f,w)**, სადაც **f** ეს არის წრფივი სისტემის მოდელი, რომელიც მოცემულია გადაცემის ფუნქციის სახით, მდგომარეობათა სივრცეში, ან “ნოლი-პლუსები--გადლიერების კოეფიციენტები“ **w**- სიხშირეთა ვექტორი.

წინასწარ ამ ფუნქციის გამოყენებამდე საჭიროა შეიქმნას სიხშირეთა მასივი სასურველ დიაპაზონში. ამ მიზნით ამოქმედებულ არიან **linspace** და **logspace** ფუნქციები. პირველი ფუნქცია ხორციელდება წრფივ სკალაზე წერტილთა თანაბარი განაწილება. მეორე ფუნქციით - ლოგარითმული განაწილება.

ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლების ასაგებად სიხშირეთა [0,10] მონაკვეთზე გამოყენებულ დიალოგის პროგრამას შეიძლება მიეცეს სახე:

```
>>w=linspace(0,10,100);
```

```
>>freg=freqresp(f,w);
```

```
>>freg=freq(☺);
```

```
Plot(w,abs(freg));
```

გრაფულში ფაზის გამოთვლისა და მისი გრაფიკის აგებას შეიძლება გამოყენებულ იქნას ბრძანებები:

```
>>phi=angle(freg)*180/pi;
```

```
>> plot(w,phi);
```

### სამუშაოს შესრულების თანმიმდევრობა

1. გავუშვათ პროგრამა Matlab და ბრძანებითი სტრიქონი გავწმინდოთ სხვა ბრძანებებისგან:

```
>>clear all
```

```
>>clc
```

2. შეიტანეთ გადაცემის ფუნქცია, როგორც **tf** ფუნქციის ობიექტი ასე:

```
» A = [a4 a3 a2 a1 a0]
```

```
» B = [b2 b1 b0]
```

```
» f = tf(B,A)
```

3. ვიპოვოთ ნოლები, გადაცემის ფუნქციის პოლუსები და გაძლიერების კოეფიციენტი:

```
>>z=zero(f)
```

```
>>p=pole(f)
```

4. საწყისი სისტემის მოდელი „ნოლი-პოლუსები“ ფორმით:

```
>>f_zpk=zpk(f)
```

```
>>k=dcgain(f)
```

5. ავაგოთ სისტემის მოდელი მდგომარეობათა სივრცეში:

```
>>f_ss=ss(f)
```

6. ბრძანებით რეჟიმში ააგეთ გარდამავალი მახასიათებლები:

```
>>step(f)
```

7. ბრძანებით რეჟიმში ავაგოთ იმპულსური მახასიათებლები:

```
>>impulse(f)
```

8. ავაგოთ ლოგარითმული სიხშირული მახასიათებლები (ბოდეს დიაგრამა):

```
>>bode(f)
```

9. ააგეთ ამპლიტუდურ-ფაზური სიხშირული მახასიათებლები (ნეიკვისტის სიხშირული გოდოგრაფი):

>>nyquist(f)

10. გაუშვით გრაფიკული ფანჯარა LTI Viewer:

**Ltview**

- ჩავტვირთოთ **f** ობიექტი. ამიტომ მენიუს პუნქტ File აუცილებელია ამოვარჩიოთ პუნქტი Import..., ხოლო შემდგომ ავარჩიოთ ობიექტი **f**.
- ააგეთ ზემოთ ჩამოთვლილი დინამიკური მახასიათებლები გამოიყენეთ LTI Viewer ინტერფეისი.
- ააგეთ სიგნალი, რომელიც წარმოადგენს ერთეულოვანი ამპლიტუდის მქონე მადტკუთხა იმპულსებს პერიოდი 10 წამი:  
`[u,t] = gensig('square',10);`
- შეასრულეთ მოდელირება და ააგეთ სისტემის გამოსასვლელი **f** გამოსასვლელ სიგნალის გრაფიკზე **u(t)**: შესასვლელი საიგნალისათვის.  
» **lsim (f, u, t)**

### 12.7. საკონტროლო კითხვები

- წრფივი სტაციონარული დინამიური სისტემების აღწერის რა საშუალებები ვიცით?
- მოცემულია სისტემის დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 2u$$

წარმოადგინეთ სისტემის აღწერა გარდამავალი ფუნქციის სახით. „ნოლი-პოლუსები“ მოდელის სახით; მდგომარეობის განტოლების შესაბამისად.

- წარმოადგინეთ თქვენს მიერ გამოსაკვლევი სისტემის ტიპური რგოლების მიმდევრობის სახით.
- ააგეთ ტიპური რგოლების დინამიური მახასიათებლები.
- ააგეთ ტიპური რეგულატორების დინამიური მახასიათებლები პროპორციული(პ),ინტეგრალური (ი),პროპორციულ ინტეგრალური (პი), პროპორციულ ინტეგრალური დიფერენციალური (პიდ), პროპორციულ დიფერენციალური (პდ).

განვიხილოთ ვარიანტების ცხრილი 2.



№	გადაცემის ფუნქციის სახე	პოლინომთა კოეფიციენტები							
		$b_2$	$b_1$	$b_0$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
1	$W(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$	1	2	2	1	3	4	5	3
2		1	3	1	2	2	4	2	1
3		1	2	1	1	3	5	4	3
4		1	0	1	1	2	5	4	3
5		1	2	3	1	3	4	5	2
6	$W(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$	1	2	1	-	2	5	4	3
7		2	1	1	-	2	4	5	1
8		1	3	2	-	1	5	2	3
9		2	1	2	-	1	5	5	2
10		1	3	3	-	1	5	4	2
11	$W(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$	1	1	-	-	2	5	4	3
12		1	3	-	-	2	4	5	1
13		3	1	-	-	1	5	2	3
14		1	4	-	-	1	5	5	2
15		1	2	-	-	1	5	4	2
16	$W(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s}$	1	1	1	-	1	1	5	-
17		2	0	1	-	2	3	2	-
18		0	2	1	-	1	3	3	-
19		0	3	2	-	2	2	1	-
20		1	0	1	-	2	1	2	-

## თავი 13

### მართვის სისტემების მოდელირება SIMULINK პაკეტში

#### 13.1 წრფივი სისტემები SIMULINK - ში.

განვახორციელოთ წრფივი სისტემების SIMULINK-ში მოდელირების მეთოდების შესწავლა.

სამუშაოში შესასრულებელი ამოცანები:

- შევისწავლოთ SIMULINK-ში სისტემათა მოდელების აგება და რედაქტირება;
- შევისწავლოთ ბლოკების პარამეტრების შეცვლა;
- შევისწავლოთ გარდამავალი პროცესების აგება;
- განვსაზღვროთ პიდ(პროპორციულ,ინტეგრალურ,დიფერენციალური) რეგულატორის ზეგავლენა ერთკონტურიან აცგ (ანალოგურ, ციფრული, გარდამქმნელი) ხარისხოვანი მაჩვენებლების რეგულირების პროცესზე.

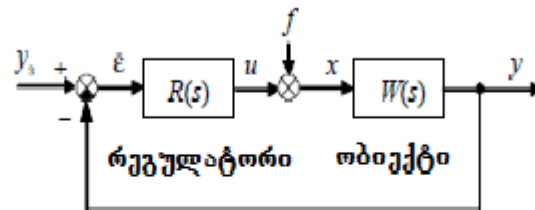
განვახორციელოთ გამოსაკვლევ სისტემის მოკლე აღწერა, პიდ რეგულატორის და ერთკონტურიანი აცგ -სი და მათი აღწერა პაკეტ SIMULINK-ში, გარდამავალი პროცესების

გრაფიკების აგება ერთკონტურიანი აცვ -სი დამკვეთი ზემოქმედების ცვლილების დროს სხვადასხვა რეგულატორებისთვის და მათი შესაბამისი პარამეტრების აწყობების პირობებში რეგულირების დროს.

### 13.2. მოდელირების სისტემის აღწერა

სამუშაოში საჭიროა განვახორციელოთ ერთკონტურიანი აცვ -სი პიდ რეგულატორით. მისი სტრუქტურული სქემა ნაჩვენებია ნახ. 2-ზე.

სამრეწველო ობიექტების



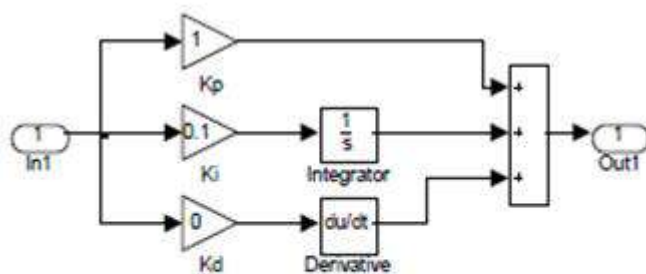
ნახ.13.1 ერთკონტურიანი აცვ-ს სტრუქტურული სქემა

სამრეწველო ობიექტების გადაცემის ფუნქცია უმრავლესობა შემთხვევებში საკმაოდ სიზუსტით შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით:

$$W_p(s) = \frac{K_o e^{-\tau s}}{(Ts + 1)(\sigma s + 1)}$$

სადაც  $T, \sigma$  - შესაბამისად, მართვის ობიექტის დიდი და მცირე დროითი მუდმივები;  $K_o$  - მართვის ობიექტის გამლიერების კოეფიციენტი;  $\tau$  - სუფთა დაგვიანების დრო.

პიდ რეგულატორის გადაცემის ფუნქციას აქვს სახე:



ნახ.13.2 პიდ რეგულატორის სქემა

$$W_p(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_D s \quad (1)$$

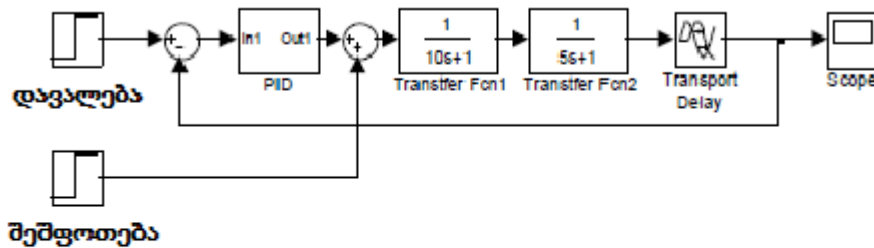
სადაც  $K_p, K_i, K_D$  - შესაბამისად არიან აწყობითი კოეფიციენტები, შესაბამისად პროპორციული, ინტეგრალური და დიფერენციალური შემადგენლებისა.

### 13.3 SIMULINK -ზე სამუშაოს შესრულების თანმიმდევრობა


1. **SIMULINK** პაკეტის გაშვებისათვის : ავამოქმედებთ MATLAB-ის ბრძანებით სტრიქონში ეკრანულ ღილაკი  და ბრძანებით სტრიქონში შევიტანოთ **SIMULINK** - ის ბრძანება.
2. შექმენით ახალი მოდელი: ახალი მოდელის საგებად ფანჯარა **Simulink Library Browser** ზედა მენიუდან ვმოქმედებთ ასე: მენიუს პუნქტ **File**-ში ავამოქმედოთ **New** ბრძანება , ხოლო შემდგომ **Model** ანდა ავკრიფოთ ორკლავიშიანი კომბინაცია **Ctrl+N** .
3. **Simulink Library Browser** ფანჯრიდან (ჯგუფი **Math Operations**) ბლოკი **Gain** მოდელის ფანჯარაშიდა ორჯერ გავუკეთოთ მას დუბლირება. ხელახალი რედაქტირება გავუკეთოთ  $K_p, K_i, K_D$  ბლოკების აღწერას.
4. გადავიტანოთბლოკი **Integrator** (ინტეგრატორი) და დიფერენციატორი **Simulink Library Browser** (ჯგუფი **Continuous**) მოდელის ფანჯარაში.
5. გადავიტანოთ **Sum** (სუმატორი) Simulink Library Browser ფანჯრიდან (ჯგუფი **Math Operations**) მოდელის ფანჯარაში და გადადით თვისებების რედაქტირების ფანჯარაში (ამისათვის ბლოკის გამოსახულებაზე ორჯერ დავაწკაპუნოთ თავის მარცხენა ღილაკით). **Icon shape** თვისებისავის **rectangular** (სუმატორის მართკუთხოვანი სახე), ხოლო **List of signs** სამი პლუსი +++ იმის დასაფიქსირებლად, რომ გამოვიყენებთ სამ ამჯამავ შესასვლელს.
6. **Simulink Library Browser** დან , შესაბამისად ჯგუფიდან **Sources** და **Sinks** გადავართოთ (თავით) ბლოკებში **In1** და **Out1** ში.
7. განახორციელეთ ბლოკების შეერთება ნახ.13.2 წარმოდგენილი სქემის შესაბამისად სქემა , რომელიც **პიდ** რეგულატორის (1) სქემას წარმოადგენს
8. ნახ 13.2-ზე მოცემული სქემის მიხედვით **პიდ** რეგულატორი ქვესისტემა (**Subsystem**). ამისათვის მოვნიშნოთ სქემის ყველა ელემენტი, დავაწკაპუნოთ მონიშნულ ფრაგმენტზე მაუსის მარჯვენა ღილაკით და გამოსულ ფანჯარაში ამოვარჩიოთ **Create Subsystem** პუნქტი.
9. შევცვალოთ წარმოქმნილი ბლოკის დასახელება PID-ზე.
10. **Simulink Library Browser**- დან მოდელის ფანჯარაში გადავართოთ ორი ბლოკი **Transfer Fcn** (გადაცემის ფუნქცია) და **Transport Delay** ( დაგვიანება). შევიტანოთ გადაცემის ფუნქციის მნიშვნელი და მრიცხველი. ცხრილი 3. დან ვარიანტის ნომერის შესაბამისად. ასევე **Transport Delay** ბლოკისთვის აგრეთვე შევიტანოთ დაგვიანების დრო **Time Delay**.

Transfer Fcn1	Transfer Fcn2	Transport Delay
Numerator [K]	Numerator [1]	Time Delay
Denominator [T 1]	Denominator [σ 1]	τ

11. **Simulink Library Browser**- დან მოდელის ფანჯარაში გადავართით ორი ბლოკი **Sum( სუმატორი )** , უარყოფითი უკუკავშირის ორგანიზებისთვის, ერთ-ერთ ბლოკს გავუკეთოთ რედაქტირება **List of signs** (მივაწოდოთ + -) თვისება.
12. მოდელის ფანჯარაში გადავართით **Scope** (ოსცილოგრაფი) **Sinks** ჯგუფიდან და მოვათავსოთ ფანჯრის მარჯვენა მხარეს.
13. მოდელის ფანჯარაში გადავართით ორი ბლოკი **Step** ჯგუფიდან **Sources** და მოვათავსოთ იგი სუმატორის მარცხნივ. მივანიჭოთ პირველ ბლოკს სახელი „ მეორეს - “Seshpoteba”.
14. ორივე ბლოკში სიგნალის მიწოდების დრო გავანულოთ ანუ დავაყენოთ ნოლზე.
15. განვახორციელოთ ბლოკების შეერთება ისეთი სახით, როგორც მოცემულია ნახ.4-ზე, ერთკონტურიანი აცგ-ს რეალიზების სქემაზე.
16. შევინახოთ მოდელი საკუთარ საქალაქად **lab2.mdl**-ში.
17. დავაფიქსიროთ მოდელირების დრო 100 წამი.
18. ბლოკში სახელით „Davaleba“ (ბლოკის ტიპი **Step**) დავაფიქსიროთ სიგნალის მიწოდების სიდიდე 1-ის ტოლად, ხოლო ბლოკში “Seshpoteba”-0. ამასთან მოდელირების შესრულებისას, განხორციელდება დავალების 1-იანზე შეცვლის იმიტირება. შემფოთების დამუშავების დროს კი პირიქით „Davaleba“-0, “Seshpoteba”- 1.



**ნახ.13.3 ერთკონტურიანი აცგ-ს რეალიზება პაკეტ SIMULINK-ში**

19. შევასრულოთ მოდელირება : ამისათვის მაუსის მარცხენა ღილაკით დავაწკაპუნოთ ეკრანულ ღილაკზე  გარდამავალი პროცესის სახეს ერთკონტურიანი აცგ-სი დავალების შეცვლის მიმდინარეობას შესაბამისად შეიძლება დავაკვირდეთ ფანჯარა **Scope**-ში.
20. შეარჩიეთ რეგულატორის საწყისი პარამეტრები, რომლებიც უზრუნველყოფენ რეგულირების ჩაკეტილ სისტემას.  $K_p, K_i, K_D$  რეგულატორების საწყისი შერჩევა ხორციელდება ბლოკებში Gain და PID- ში.

21. ავაგოთ შეშფოთების დამუშავებისას გარდამავალი პროცესის გრაფიკი.
22. განვახორციელოთ გამოკვლევა ერთკონტურიანი აცგ-სი რეგულატორების (პროპორციული (P), პროპორციულ-ინტეგრალური (PI), პროპორციულ-ინტეგრალურ-დიფერენციალური (PID), პროპორციულ-დიფერენციალური (PD) სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის , რათა დავაკვირდეთ რეგულატორების შერჩევის დროს რეგულირების პროცესის პარამეტრებს (სტატიკურ და დინამიკურ შეცდომებს რეგულირებისას, ჭარბრეგულირების სიდიდეს, გარდამავალი პროცესის დროს) აგრეთვე სისტემის მდგრადობას.

ცხრ. 13.3 ვარიანტების ცხრილი

№	$K_o$	$T$	$\sigma$	$\tau$	№	$K_o$	$T$	$\sigma$	$\tau$
1	1,5	10	5	2	11	1,5	13	2	3
2	2,0	15	4	3	12	2,0	12	3	4
3	3,0	17	3	4	13	3,0	17	4	5
4	3,5	18	4	2	14	3,5	14	4	3
5	3,2	12	5	3	15	3,2	11	5	2
6	0,5	13	7	4	16	0,5	16	3	3
7	1,2	14	6	3	17	1,2	15	4	2
8	2,5	11	3	2	18	2,5	14	5	4
9	1,7	18	3	3	19	1,7	16	4	5
10	2,1	12	4	4	20	2,1	17	3	3

### 13.4 საკონტროლო შეკითხვები

- როგორ ჩავრთოთ (გავუშვათ) პაკეტი **SIMULINK**-ი ?
- რას წარმოადგენს **Simulink Library Browser**-ი ?
- SIMULINK**-ის ფაილებს რა გაფართოება აქვთ?
- როგორ შევქმნათ ახალი მოდელი ?
- როგორ შევქმნათ ქვესისტემა **Subsystem** ?
- რა უნდა გავაკეთოთ იმისათვის, რომ ერთი და იგივე სიგნალი მიეწოდებოდეს რამოდენიმე ბლოკს?
- როგორ დავაკოპიროთ (დავადუბლიროთ) მოდელის ფანჯარაში ბლოკი ?
- როგორ დავაკოპიროთ მოდელის გამოსახულება Microsoft Word-ის დოკუმენტში?
- როგორ შევცვალოთ არითმეტიკულ ოპერაციათა ნიშნები ამჯამავეში (სუმატორი)?
- როგორ შევცვალოთ მოდელირების დრო ?
- როგორ შვიტანოთ ბლოკი **Transfer Fcn** (გადაცემის ფუნქცია)?
- რატომ არ ახდენს სისტემა არ ახდენს კომპენსირებას მუდმივ შეშფოთებაზე P და PD რეგულატორების გამოყენებისას?

13. რა თვისებებს უნდა შეიცავდეს რეგულატორი, რომ მუდმივი შემფოთება სრულად კომპენსირდებოდეს?
14. რომელი ხარისხობრივი მაჩვენებლების მიხედვით გარდამავალი პროცესის შეფასების ხარისხი აცვ-ში?

## თავი 14.

### მართვის ობიექტის მათემატიკური აღწერა ექსპერიმენტალური მეთოდებით.

**განსახორციელებელია:** რეგულირების ობიექტის მათემატიკური აღწერილობის აგების მეთოდების შესწავლა, ობიექტზე ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული სტატისტიკური და დინამიური მახასიათებლების საფუძველზე.

#### 14.1 ამოცანების ჩამოყალიბება:

- რეგულირების ობიექტის ექსპერიმენტალური სტატისტიკური მახასიათებლების საფუძველზე მიღებული მონაცემების, აპროქსიმაციის მეთოდების შესწავლა;
- რეგულირების ობიექტის გადაცემის ფუნქციით ექსპერიმენტალურად მიღებული დინამიური მახასიათებლების ერთ-ერთი აპროქსიმაციის მეთოდის შესწავლა;
- უნარ-ჩვევების გამომუშავება m-ფაილების შექმნის დროს;
- საოპტიმიზაციო მეთოდების შესწავლა.

**შესასწავლია:** საწყისი მონაცემები, სტატისტიკური მახასიათებლების აპროქსიმაციის შედეგების ( აპროქსიმაციის პოლინომი, გრაფიკები) დინამიური მახასიათებლების აპროქსიმაციის შედეგები (გადაცემის ფუნქცია, გრაფიკები).

#### 14.2 თეორიული საკითხების მოკლე აღწერა

მართვის ობიექტების მათემატიკური მოდელები, მათი აგების პროცედურები, დამოკიდებულნი არიან მათ მიზნობრივ დანიშნულებაზე, ობიექტის თვისებებზე, ასევე ფუნქციებზე და მართვის სისტემის ამოცანებზე.

წარმოების ავტომატიზაციის პროცესში რეგულირების ობიექტის შესახებ ყველაზე სწორი შედეგები მიიღებიან რეგულირების სტატისტიკური და დინამიკური მახასიათებლების საფუძველზე. ამ შედეგების მისაღებად განსაზღვრავენ შესაბამისად სარეგულირებელი ობიექტის სტატისტიკურ და დინამიკურ მახასიათებლებს.

**რეგულირების ავტომატური სისტემის (რას) ან მისი ცალკეული რგოლების სტატისტიკური მახასიათებლები წარმოადგენენ, ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას, შემავალი სტატისტიკური მონაცემების ბაზაზე (აპროქსიმირებული) გამოსასვლელზე მიღებული მონაცემებისა, ანუ დროში უცვლელი შემავალი და გამომავალი სიდიდეებისა.**

სტატისტიკური მახასიათებლები გვამღევენ საშუალებას განვსაზღვროთ რეგულირებადი პარამეტრების მნიშვნელობები, რეგულირების ორგანოების მდგომარეობები, ენერჯისა თუ ნივთიერებების დანახარჯებიდა სხვა მაჩვენებლები გამოსაკვლევი ობიექტისა. ეს მახასიათებლები გამოიყენებიან რას -ის ანგარიშისას.

დინამიკური მახასიათებლები გვამღევენ რეგულირებადი ობიექტის ინერციული თვისებების შესახებ ინფორმაციას. ამიტომაც ისინი წარმოადგენენ საწყის მონაცემებს ავტომატიზებული სისტემების სინთეზის დროს.

სისტემების ცალკეული რგოლების ავტომატიზაციისათვის საკმარისია სტატისტიკური და დინამიკური მახასიათებლების ცალკეული პარამეტრები საკმარისია მოვათავსოთ შესასვლელი და გამოსასვლელი კორდინატების ვიწრო დიაპაზონში მოთავსება. ამისათვის გამოიყენება მრავალრიცხოვანი ექსპერიმენტული მეთოდები. ამ მახასიათებლების მიღება მიიღწევა იმ მეთოდებით, რომლებიც ობიექტის წრფივობასა და პარამეტრების შეგროვებაზე ბაზირდება. ასეთი დაშვებების მიღება გვამღევენ საშუალებას საკმარისად მარტივად, გავაკვირდეთ ობიექტის კორდინატების ცვლილებას მუდმივკოეფიციენტიანი დიფერენციალური განტოლებებით .

ექსპერიმენტალური მათემატიკური მოდელების აგებისას გამოიყენებენ პასიურ ან აქტიურ ექსპერიმენტებს.

აქტიური მეთოდების გამოყენებისას ობიექტის შესასვლელზე იქმნებიან ხელოვნური საცდელი ზემოქმედებები (საფეხურებოვანი, იმპულსური, ჰარმონიული და სხვა). პასიურ მეთოდებად წარმოგვიდგება მეთოდები, რომელთათვისაც არ დაიშვება ობიექტის შესასვლელზე საცდელი ზემოქმედებების წარმოება, შესასვლელი ზემოქმედებების როლს ასრულებენ ბუნებრივი ზემოქმედებები, რომლებიც ნორმალური ექსპლოატირების დროს წარმოიქმნებიან.

### 14.3. სტატისტიკური მახასიათებლების აპროქსიმაცია.

სტატისტიკური მახასიათებლების ექსპერიმენტული კვლევის დროს ერთარხიანი მართვის ობიექტის შემთხვევაში მივიღეთ  $m$  მნიშვნელობა შესასვლელი  $x_i (i = \overline{1, m})$  და გამოსასვლელი  $y_i (i = \overline{1, m})$  კორდინატებისა. უნდა მოვძებნოთ ფუნქციონალური დამოკიდებულება  $\bar{y} = f(x, a)$ , რომელიც საუკეთესოდ აღწერს ექსპერიმენტულ მონაცემებს, სადაც ფუნქციის პარამეტრების ვექტორია. ამ დროს ძალიან ხშირად გამოიყენება უმცირეს კვადრატთა მეთოდი. ამ მეთოდს შემოაქვს ფუნქცია, რომელიც ახასიათებს ექსპერიმენტალური და გამოთვლილი მონაცემების სიახლოვეს.

$$S = \sum_i (y_i - \bar{y}_i)^2.$$

უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებისას ფუნქცია მოიცემა მისი სახით და და ამ ფუნქციის პარამეტრების ვექტორით. ხშირად მაპროქსიმირებელ ფუნქციად გამოიყენებიან  $\bar{y} = f(x, a)$ , ტიპის ფუნქციები, რომლებიც მოიცემიან ხარისხოვანი ფუნქციის სახით:

$$\hat{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

მაპროქსიმირებელი ფუნქციის ძებნის ამოცანა ( პარამეტრების მოცემული ვექტორისათვის) წარმოდგინდება, როგორც უპირობო მრავალგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის ამოცანა: საჭიროა მოვძებნოთ  $\mathbf{a}$  პარამეტრების ვექტორი, რომელიც გაგვიყვანს  $S$  ფუნქციის მინიმუმზე.

$$S = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min_a .$$

**Matlab**-ის პაკეტის გამოყენებისას პოლინომიური აპროქსიმაციის დროს ფორმირდება ორი ერთნაირი სიგრძის ვექტორი  $X$  და  $Y$ . აპროქსიმაცია **Matlab**-ში ხორციელდება **polifit(X,Y,n)**. აქ  $n$  სააპროქსიმირებელი პოლინომის რიგია. ამ პროცედურის შედეგად ვიღებთ  $n+1$  სიგრძის ვექტორი, რომელშიც შედიან მაპროქსიმირებელი პოლინომის კოეფიციენტები.

#### 14.4. დინამიური მახასიათებლების აპროქსიმაცია.

საინჟინრო პრაქტიკაში რას -ის გამართვა ობიექტის რეგულირების მათემატიკური მოდელები საკმაოდ ხშირად წარმოიდგინებიან გარდამავალი ფუნქციების სახით. გადაცემის ფუნქცია შეიძლება განისაზღვროს ექსპერიმენტალური დინამიური მახასიათებლებით, რომლებიც მიიღებიან აპროქსიმაციის შედეგად. საცდელ ზემოქმედებად ხშირად გამოიყენებიან საფეხურებრივი ზემოქმედებები.

რეგულირების ობიექტის აპროქსიმაციის და გადაცემის ფუნქციის განსაზღვრის ალგორითმს აქვს სახე:

- ობიექტის შესასვლელზე საფეხურებრივი ზემოქმედების დროს მოიძიება გარდამავალი მახასიათებელი  $h(t)$ .
- მრუდის სახეობის მიხედვით განისაზღვრება გარდამავალი ფუნქციის სტრუქტურა. რეალური რეგულირების ობიექტების დიდი რაოდენობის შემთხვევაში ობიექტის მოდელს ექნება სახე:

$$W(s) = \frac{ke^{-s\tau}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}. \quad (14.1)$$

- ხდება აპროქსიმაცია გარდამავალი ფუნქციისა. აპროქსიმაცია გულისხმობს გარდამავალი ფუნქციის ისეთი პარამეტრების შერჩევას, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ სიახლოვეს გაქანების ექსპერიმენტული  $h(t)$  მრუდისას და შესაბამის გარდამავალი (14.1) ფუნქციის გაქანების ფუნქციის მრუდებს შორის  $h_p(t)$ .



სარეგულირებელი პარამეტრები  $k, T_1, T_2, \tau$  (14.1) გარდამავალი ფუნქციისათვის მიღებულ იქნებიან შემდეგი ფუნქციის მინიმიზებისას:

$$I = \int (h(t) - h_\delta(t))^2 dt \rightarrow \min_{k, T_1, T_2, \tau} . \quad (14.2)$$

#### 14.5. სამუშაოს შესრულების თანმიმდევრობ სტატისტიკური მახასიათებლების აპროქსიმაცია

1. ჩავრთოთ **Matlab**-ი. ბრძანებით სტრიქონში გავასუფთაოთ ეკრანი და ბრძანებით სტრიქონი:

```
» clear all
» clc
```

2. დავაფორმიროთ ექსპერიმენტალურ წერტილთა მასივები X და Y ამ მონაცემებს ვიღებთ ჭვემით მოცემული ცხრილი. 4 - დან.

```
» X = [x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10];
» Y = [y1 y2 y3 y4 y5 y6 y7 y8 y9 y10];
```

3. განვახორციელოთ ექსპერიმენტალური წერტილების აპროქსიმაცია პირველი ხარისხის პოლინომით (წრფივი ფუნქცია) და აგრეთვე მეორე ხარისხის პოლინომით - შესაბამისად P1 და P2.

```
» P1 = polyfit(X,Y,1)
» P2 = polyfit(X,Y,2)
```

4. **polival** ფუნქციის გამოყენებით ავაგოთ მათაპროქსიმირებელი პოლინომი.

```
» F1 = polyval(P1,X)
» F2 = polyval(P2,X)
```

5. ერთ-ერთ ნახაზზე ავაგოთ ექსპერიმენტალური წერტილები და მათაპროქსიმირებელი პირველი და მეორე ხარისხის პოლინომები:

```
» plot(X,Y,'o',X,F1,'-.',X,F2,'-')
```

#### მოვახდინოთ დინამიური მახასიათებლების აპროქსიმაცია

აპროქსიმაციის საწყისი მონაცემები მოიცემიან ცხრილის სახით მაგალითად ასე:

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
h	0	0	0	0.07	0.23	0.43	0.64	0.84	1.03	1.19	1.33	1.45	1.55	1.64	1.71	1.77

4. შექმენით Script – ფაილი (3) ამოცანის ამოსახსნელად:

ამისათვის გამოვიდახოთ მენიუს პუნქტი File MATLAB-ის ბრძანებით სტრიქონში და ავარჩიოთ იქ ბრძანება New, ხოლო შემდეგ ბრძანება M-file.

5.გამოსულ ფანჯარაში ავკრიფოთ:

**%t** – დროის მომენტების მასივი

**%h** - ექსპერიმენტული გარდამავალი მახასიათებლების მასივი

**%hp** – გამოთვლილი გარდამავალი მახასიათებლების მასივი

**%a** –ობიექტის გადაცემის ფუნქციის პარამეტრების ვექტორი

**% a(1)=k, a(2)=t1, a(3)=t2, a(4)=tau**

**global t h hp**

**t=0:1:15;**

**h=[0 0 0 0.07 0.23 0.43 0.64 0.84 1.03 1.19 1.33 1.45 1.55 1.64 1.71 1.77];**

**[a,fval] = fminunc(@func,[1 1 2 1])**

**plot(t,h,'o',t,hp,'-')**

პროცედურა **fminunc** ახორციელებს რამდენიმე ცვლადის ფარგლებში მინიმუმის მოძებნას. დასამინიმუმებელი ფუნქციის სახელი მიეთითება **fminunc** პროცედურის პირველ არგუმენტად, ხოლო მეორე არგუმენტად გადაეცემა ძებნის საწყისი წერტილი.

6.ეს ტექსტი შევინახოთ ფაილში სახელად **din\_ap.m**-ში

7.შევქმნათ ფაილი ფუნქცია (3) ფუნქციის მინიმიზებისათვის. ფაილის ტექსტს აქვს სახე:

**function f=func(a)**

**global t h hp**

**y=series(tf([a(1)],[a(2) 1]),tf([1],[a(3) 1]));**

**y.inputd = a(4);**

**[hp,t]=step(y,t);**

**f=sum((h-hp').^2);**

ამ ფუნქციაში სტრიქონები

**y=series(tf([a(1)],[a(2) 1]),tf([1],[a(3) 1]));**

**y.inputd = a(4);**

განსაზრდავენ გადაცემის ფუნქციას ობიექტისას (2)-ის შესაბამისად. აქ

**a(1), a(2), a(3), a(4)** არიან შესაბამისად  $k, T_1, T_2, \tau$ .

სტრიქონი **[hp,t]=step(y,t);**ქმნის გამოძახილს საფეხურებრივ ზემოქმედებაზე.

ბოლო სტრიქონი არის ექსპერიმენტალური და გამოთვლილი გარდამავალი მახასიათებლების სხვაობების კვადრატთა ჯამი.

8.შეტანილი ტექსტი შევინახოთ **func.m** ფაილში.

9.ბრძანებით სტრიქონში შესრულებაზე გავუშვათ **Script**-ფაილი

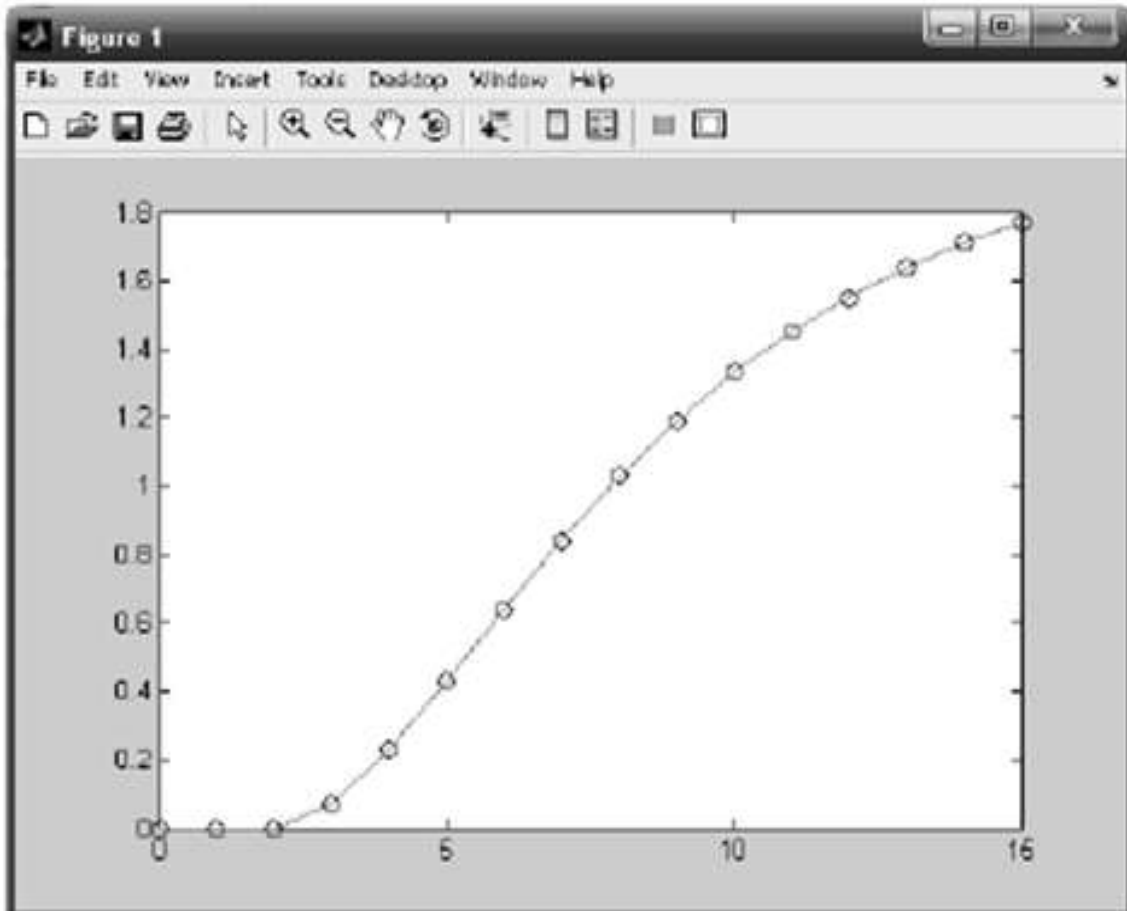
» **din\_app**

10. ამ **Script**-ფაილის შესრულების მერე **MATLAB**- ის ფანჯარაში გამოჩნდება ამოცანის (ანუ (3) ამოცანის მინიმიზაციის ამოცანა) ამოხსნის შედეგები მოიცემა ასე:

**a=**  
**2.0382 2.4265 4.8308 2.0181**

**fval =**  
**3.9104e-005**

ნახ.5 -ზე წარმოდგენილია ექსპერიმენტულად მიღებული წერტილები გარდამავალი მახასიათებლები და აპროქსიმაციით გამოთვლილი გაედამავალი მახასიათებლები.



**ნახ.14.1. გარდამავალ მახასიათებელთა აპროქსიმაციის შედეგი**

ექსპერიმენტალური სტატისტიკური მახასიათებლების ვარიანტების ცხრილი 14.1

1	$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$y_i$	3.0	5.1	7.4	9.9	12.6	15.5	18.6	21.9	25.4	29.1
2	$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$y_i$	6.0	7.9	9.6	11.1	12.4	13.5	14.4	15.1	15.6	15.9
3	$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$y_i$	4.0	6.8	9.2	11.2	12.8	14.0	14.8	15.2	15.2	14.8
4	$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$y_i$	5.0	10.1	14.4	17.9	20.6	22.5	23.6	23.9	23.4	22.1
5	$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$y_i$	35.0	34.3	33.0	31.1	28.6	25.5	21.8	17.5	12.6	7.1
6	$x_i$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	$y_i$	3.0	5.1	7.4	9.9	12.6	15.5	18.6	21.9	25.4	29.1
7	$x_i$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	$y_i$	6.0	7.9	9.6	11.1	12.4	13.5	14.4	15.1	15.6	15.9
8	$x_i$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	$y_i$	4.0	6.8	9.2	11.2	12.8	14.0	14.8	15.2	15.2	14.8
9	$x_i$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	$y_i$	5.0	10.1	14.4	17.9	20.6	22.5	23.6	23.9	23.4	22.1
10	$x_i$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	$y_i$	35.0	34.3	33.0	31.1	28.6	25.5	21.8	17.5	12.6	7.1
11	$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$y_i$	3.0	5.1	7.4	9.9	12.6	15.5	18.6	21.9	25.4	29.1
12	$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$y_i$	6.0	7.9	9.6	11.1	12.4	13.5	14.4	15.1	15.6	15.9
13	$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$y_i$	4.0	6.8	9.2	11.2	12.8	14.0	14.8	15.2	15.2	14.8
14	$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$y_i$	5.0	10.1	14.4	17.9	20.6	22.5	23.6	23.9	23.4	22.1
15	$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$y_i$	35.0	34.3	33.0	31.1	28.6	25.5	21.8	17.5	12.6	7.1

ცხრილი 14.2 ექსპერიმენტალური დინამიური მახასიათებლების ვარიანტები

1	T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h	0	0	0	0,07	0,23	0,43	0,64	0,84	1,03	1,19	1,33	1,45	1,55	1,64	1,71	1,77
2	T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h	0	0	0	0,09	0,29	0,53	0,77	0,99	1,19	1,35	1,49	1,61	1,69	1,76	1,82	1,86
3	T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h	0	0	0	0,13	0,43	0,79	1,15	1,49	1,78	2,03	2,23	2,40	2,54	2,64	3,72	2,79
4	T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h	0	0	0,14	0,46	0,84	1,19	1,52	1,81	2,05	2,24	2,40	2,52	2,63	2,71	2,79	2,82
5	T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h	0	0	0,098	0,31	0,56	0,80	1,02	1,21	1,36	1,49	1,60	1,69	1,75	1,81	1,85	1,88
6	T	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h	0	0	0	0,07	0,23	0,43	0,64	0,84	1,03	1,19	1,33	1,45	1,55	1,64	1,71	1,77
7	T	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h	0	0	0	0,09	0,29	0,53	0,77	0,99	1,19	1,35	1,49	1,61	1,69	1,76	1,82	1,86
8	T	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h	0	0	0	0,13	0,43	0,79	1,15	1,49	1,78	2,03	2,23	2,40	2,54	2,64	3,72	2,79
9	T	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h	0	0	0,14	0,46	0,84	1,19	1,52	1,81	2,05	2,24	2,40	2,52	2,63	2,71	2,79	2,82
10	T	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h	0	0	0,098	0,31	0,56	0,80	1,02	1,21	1,36	1,49	1,60	1,69	1,75	1,81	1,85	1,88
11	T	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
	h	0	0	0	0,07	0,23	0,43	0,64	0,84	1,03	1,19	1,33	1,45	1,55	1,64	1,71	1,77
12	T	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
	h	0	0	0	0,09	0,29	0,53	0,77	0,99	1,19	1,35	1,49	1,61	1,69	1,76	1,82	1,86
13	T	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
	h	0	0	0	0,13	0,43	0,79	1,15	1,49	1,78	2,03	2,23	2,40	2,54	2,64	3,72	2,79
14	T	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
	h	0	0	0,14	0,46	0,84	1,19	1,52	1,81	2,05	2,24	2,40	2,52	2,63	2,71	2,79	2,82
15	T	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
	h	0	0	0,098	0,31	0,56	0,80	1,02	1,21	1,36	1,49	1,60	1,69	1,75	1,81	1,85	1,88

#### 14.6. საკონტროლო კითხვები

1. როგორ ვახორციელებთ ობიექტის სტატისტიკური მახასიათებლების განსაზღვრას ?
2. როგორ მოვახდინოთ სტატისტიკური მახასიათებლების გაწრფივება ?
3. დინამიური მახასიათებლების რომელ სახეობებს იცნობთ ?
4. როგორი ურთიერთკავშირია იმპულსურ და გარდამავალ მახასიათებლებს შორის ?
5. დინამიური მახასიათებლების აპროქსიმაციის რომელ მეთოდებს იცნობთ?
6. რითი განსხვავდებიან ერთმანეთისგან MATLAB-ში ფაილი ფუნქცია და Script ფაილი ?

7. რომელი ფუნქციები შეიძლება გამოვიყენოთ  $n$  -ური ხარისხის პოლინომით აპროქსიმაციის დროს ?
8. რას ახორციელებს ფუნქცია **polyval** , **MATLAB** პაკეტში ?
9. **MATLAB** პაკეტში რომელი ფუნქციები გამოიყენდებიან მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის მოძებნაში ?

## თავი 15

### ანალიზური მეთოდებით მათემატიკური მოდელების აგება (თბომცვლელი აპარატურის მოდელირება)

**15.1. სამუშაოს მიზანი:** ტიხარის გასწვრის სითბოგაცვლის პროცესის მათემატიკური მოდელირება და სითბოგაცვლითი აპარატების კომპიუტერზე ანგარიში.

1. გავეცნოთ ნაკადების სითბური ბალანსების აგების მეთოდებს, აგრეთვე ტიხრებში იგივე პროცესების მიმდინარეობას. ტიხრის გადაღმა ქიმიური პროცესების ტექნოლოგიების მოდელირება ტიხრის გასწვრივ.
2. განვსაზღვროთ მათემატიკურ აღწერილობათა განსაკუთრებულობები სითბოგაცვლის სხვადასხვა მიმდინარეობის დროს.
3. შევასრულოთ დავალების, რომელიმე ვარიანტი კომპიუტერზე.

#### ანგარიშის შინაარსი

1. დავალების ვარიანტი.
2. აპარატის სითბოგაცვლის მათემატიკური მოდელი.
3. სამუშაოში გამოყენებული ყველა „მუშა ფორმული“ ჩამოთვლა.
4. სითბოგაცვლის გამოთვლილ დამოკიდებულებათა გრაფიკები.
5. პროგრამათა ტექსტები.

#### 15.2 მოკლე თეორიული აღწერა

კედლის გადაღმა სითბოს გადაცემის მეთოდი ძალიან პოპულარულია ქიმიურ ტექნოლოგიებში და მნიშვნელოვნად ზემოქმედებს რეაქტორებში ქიმიური პროცესების მიმდინარეობებზე. სითბოგაცვლით აპარატებში სითბოგადაცემის პროცესი არის ძირითადი და ემსახურება ტექნოლოგიური ნაკადისათვის საჭირო ტემპერატურის განსაზღვრისათვის.

ვარჩევთ რა რეაქტორების გაფორმების სხვადასხვა მეთოდებს, ამით შეგვიძლია ვიზემოქმედოთ სითბოგაცვლის ინტენსივობაზე ძირითად (რეაქციულ) და ხლადაგენტის ანუ გარემო სივრცეზე. სითბოგაცვლის სრულად არარსებობის შემთხვევაში კედლის გადაღმა მიიღება ადიაბატური რეაქტორი. რეაქტორები, რომელთაც აქვთ სითბოგაცვლა გარემომცველ ბუნებასთან, იწოდებიან პოლიტროპულ რეაქტორებად.

იმ პროცესის განხილვისას, რომლების მიმდინარეობან ტიხარის გადაღმა თბომატარებლებს შორის. შეგვიძლია გამოვყოთ რამოდენიმე ელემენტარული ეტაპი: სითბოს გადაცემა ცხელი სითბომატარებლიდან ცივ ტიხარზე სითბოს გადაცემა, სითბოს სთანთქმს ტიხრის მასალის მიერ და ამ მასალის გაცხელება, სითბოს გავრცელება ტიხრის მთელს ფართობზე, სითბოს გადაცემა ტიხრიდან ცივ სითბომატარებელზე.

თუ სითბოგაცვლის პროცესი მიმდინარეობს სტაციონარულად, მაშინ ტემპერატურა მასალის ყოველ წერტილში (სითბომატარებლებისა და ტიხრისა) არ იცვლება დროში. თავმოყრილი პარამეტრების მოდელების გამოყენებას (ანუ, როცა სივრცითი კორდინატები არ გამოიყენებიან მათემატიკური აღწერილობაში) მივდივართ სისტემაში ტემპერატურებს შორის ალგებრულ დამოკიდებულებასთან. ხოლო, როცა ტემპერატურები იცვლებიან დროში მათემატიკური აღწერილობა საჭიროებს დიფერენციალური განტოლებების სისტემების გამოყენებას სადაც არგუმენტია დრო.

ტემპერატურების გეომეტრიულ კორდინატებზე დამოკიდებულება განსაზღვრავს სტატიკის აღწერას ან ჩვეულებრივი ან კერძოწარმოებულიანი დიფ განტოლებების საშუალებით. დამოუკიდებელ ცვლადებად ამ დროს გამოიყენებიან სივრცითი კორდინატები. სივრცობრივად-განაწილებულიეფექტების პირობებში დინამიური მოდელები წარმოიდგინებიან კერძოწარმოებულიანი დიფ. განტოლებების, ამასთან ერთ-ერთ დამოუკიდებელ ცვლადს წარმოადგენს დრო.

სითბოს გადაცემის ინტესივობა სითბოსმატარებელსა(გაზის ან სითხის ცხელი ნაკადი) სხვა (ტიხარი) გარემოზე დამოკიდებულია მათ შორის ტემპერატურათა სხვაობაზე. აგრეთვე თერმოწინალობაზე. გამომთველ განტოლებებში როგორც წესი , რთავენ არა წინალობას არამედ სითბოსგაცემის კოეფიციენტი -  $\alpha, q$  - სითბური ნაკადი( კკალ/სთ, ვტ) $1\text{მ}^3$  ფართობისათვის ტემპერატურათა სხვაობის დროს (ტემპერატურული ნაკადი)  $1^0$

სრული სითბური ნაკადი  $q$  განისაზღვრება სითბოგაცემის ( $\alpha$ ) , ზედაპირის ფართობის (F) და ტემპერატურული ნაკადის  $\Delta T$  ნამრავლით :

$$q = \alpha F \Delta T . \quad (15.1)$$

(15.1) განტოლება გამოყენებადია, როგორც ტიხრის ცხელი სითხით გაცხელებისას, ასევე ცივი სხის ნაკადით ცხელ ტიხარზე ზემოქმედებისას ამ დროს  $\Delta T$  -ს ექნება სხვადასხვა ნიშანი.

თუ უგულვებელყოფთ სითბოს გავრცელებას ტიხარში, მაშინ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ სითბოს გავრცელება ასე: სითბოს გავრცელება ცხელი სითხიდან ცივ ტიხარზე და მეორე გამთბარი ტიხარის ერთი მხარიდან მეორე ცივ მხარეზე გადაცემა. ეს პროცესი შეიძლება წარმოვიდგინოთ , როგორც სითბური ნაკადის მიერ ორი სითბოგადაცემის წინააღმდეგობის პროცესის გადალახვა. ცხელი ნაკადიდან ტიხარზე და გაცხელებული ტიხარიდან ცივ ნაკადზე.

წინალობის მაგივრად სითბოგაცემის კოეფიციენტების ( $\alpha_1$  და  $\alpha_2$  ) გამოყენებით ვიღებთ სითბოგადაცემის კოეფიციენტის (K) -ს გამოთვლის ფორმულას:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \quad (15.2)$$

პრაქტიკული გამოთვლების დროს სითბოგადაცემის კოეფიციენტს იყენებენ, როგორც ნაკადებს შორის სითბოგაცვლის ინტენსივობის მახასიათე

$$q = \alpha F \Delta T. \quad (15.3)$$

იმ შემთხვევებში, როცა ეს კოეფიციენტები განიხილებიან ცალკე-ცალკე გამოიყენებენ საშუალო ტემპერატურას ტიხრისას, რომელიც ყოფს ნაკადებს. იგულისხმება რომ ტიხრის სითბოგამტარობა ისეთი დიდია (ტიხრის მასალის გათვალისწინებით), რომ ტემპერატურათა სხვაობა გამოირიცხება.

სითბოგადაცემის კოეფიციენტები დამოკიდებულია მრავალ პარამეტრზე, მაგრამ ყველაზე ძლიერად დამოკიდებულია ნაკადის სიჩქარეზე, სითხის ტიხარზე მისხმის სიმძაფრეზე, სითხის სიმკვრივესა და სითბოგამტარობაზე. ზუსტი გათვლების წარმოების დროს საჭიროა სითბოგადაცემის კოეფიციენტის დამოკიდებულება ნაკადის პარამეტრებზე აუცილებლად გასათვალისწინებელია. პრაქტიკაში კი სითბოგამტარობის სასკითხები რეაქტორების აგების საინჟინრო ვერსიებში საგრძნობლად გამარტივებულია.

სითბოგამტარობის პროცესის მათემატიკური აღწერისათვის სითბოგადაცემის პროცესი ტიხრის გადაღმა გადმოდმა უნდა ითვალისწინებდეს თითოეული გარემოს სითბურ ბალანსის შედგება დროის ფარგლებში სითბოს მოსვლა-გაცემის სხვაობისაგან: **დაგროვება-მოდინება-გადინება**. სტატიკურად თუ მოდინება და გადინება ტოლია, მაშინ სითბოს დაგროვება არ არსებობს.

დაგროვება დამოკიდებულია ტემპერატურის ცვლილებასთან:

$$\rho c_p V \Delta T$$

ან ელემენტარული მოცულობისთვის

$$\rho c_p S de T dl$$

სადაც  $\rho$  – სიმკვრივე;  $c_p$  – ფარდობითი სითბოტევადობა;  $V$  – მოცულობა;  $S$  – ნაკადის კვეთა;  $dl$  – ნაკადის ელემენტარული მონაკვეთი.

სითბოს მოსვლა გასვლა განისაზღვრება სითბოგადაცემით, ხოლო მონაკად სისტემაში განაწილებული პარამეტრებით.

სითბოს ოდენობა, რომელიც მიეწოდება აპარატს კონვექტიკური ნაკადით განისაზღვრება ასე:

$$G \rho c_p T \tau$$

ხოლო ელემენტარული მოცულობისათვის

$$G \rho c_p T d\tau,$$

სადაც  $G$  – ნაკადის ხარჯის მოცულობა.



სითბოს რაოდენობა, რომელიც გადის კონვექტური ნასკადის მოცულობიდან, განოსაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$G\rho_p(T + \Delta T)\tau.$$

ან ელემენტარული მოცულობისთვის

$$G\rho_p(T + dT)d\tau.$$

სითბოს მოსვლა, განისაზღვრული სითბოგაცემით

$$K \frac{F}{V}(T_g - T)V\tau,$$

ან ელემენტარული მოცულობისთვის

$$K \frac{FS}{V}(T_g - T)dld\tau,$$

სადაც  $T_g$  - გარე სითბოსმატარებლის ტემპერატურა.

სისტემაში დაგროვილი სითბოს გათვალისწინებით შეგვიძლია დეავწეროთ ფორმულა:

$$\rho_p V \Delta T = G\rho_p T\tau - G\rho_p(T + \Delta T)\tau + KF(T_g - T)\tau,$$

ანდა ელემენტარული მოცულობით ელემენტარულ დროში

$$\rho_p S dT dl = G\rho_p T d\tau - G\rho_p(T + dT)d\tau + K \frac{FS}{V}(T_g - T)dld\tau,$$

გარდაქმნების საფუძველზე მივიღებთ სითბური ბალანსის განტოლებას, რომელიც აღწერს სითბოგამცვლელების დინამიკას, რომლის მთლიან ნაკადში ხორციელდება სრული (იდეალური) შერევა ნაკადის ნაჭილაკებისა.

$$\rho_p V \frac{dT}{d\tau} = G\rho_p(T^0 - T) + KF(T_g - t) \quad (15.4)$$

სადაც  $T^0, T$  - არიან შესაბამისად ტემპერატურა ნაკადის შესასვლელზე და იდეალური შერევის ზონაში.

იმის გამო, რომ სტატიკურ რეჟიმში სისტემაში სითბოს დაგროვება ნოლის ტოლია, სითბოგაცვლის მოდელს სტატიკის შემთხვევისათვის ექნება სახე:

$$G\rho_p(T^0 - T) + KF(T_g - T) = 0 \quad (15.5)$$

მილისებურთა სითბოგაცვლის სტატიკა აღიწერება განტოლებით:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{KF(T_g - T)}{u\rho_p V}. \quad (15.6)$$

სადაც  $u$  - ნაკადის მოძრაობის სიჩქარეა.

**15.3. მაგალითი 1.** სითბოგამცვლელი წარმოადგენს თხელკედლა კლაკნილა (გველუკა), რომელშიც იდეალური გამოდევნის რეჟიმში ხდება ნაკადის გაგრილება. კლაკნილა ჩაძირულია წყალში, რომელიც (წყალი) უწყვეტად მიედინება ჭურჭელში ისე, რომ გამაგრილებელი წყლის ტემპერატურა  $T_g$  პრაქტიკულად მუდმივად არის  $10^\circ\text{C}$  მთელს მოცულობაზე.

საჭიროა განვსაზღვროთ ტემპერატურა ნაკადის გამოსასვლელზე, რომელიც მიედინება კლავნილაში  $u=4\text{მ/წმ}$  სისწრაფით, თუ მისი ტემპერატურა შესასვლელზე არის  $95^{\circ}\text{C}$ , კლავნილას სიგრძე  $L=2\text{მ}$ , მისი კვეთა  $S=10^{-4}\text{მ}^2$ , სითბოგადაცემის კოეფიციენტი  $K=1,16 \cdot 10^4 \text{ვტ}/(\text{მ}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$ . გამაგრილებელი სითხის  $c_p = 2,93 \cdot 10^3 \text{ჯ}/(\text{კგ} \cdot ^{\circ}\text{C})$ , მისი სიმკვრივე  $\rho = 900 \text{კგ}/\text{მ}^3$ . პარამეტრები ჩავთვალოთ, რომ არ არიან დამოკიდებულნი ტემპერატურაზე, მოცულობის ცვლილებაც არ გავითვალისწინოთ. მუშაობის რეჟიმში ჩავთვალოთ სტაციონარულად.

გამაგრილებელი ნაკადის ტემპერატურა  $T$  ექვემდებარება (15.6) დიფერენციალურ განტოლებას.

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{2K\pi(T_g - T)}{u\rho c_p S} \quad (15.7)$$

სადაც  $l$ - სიგრძე;  $r$ -კლავნილას რადიუსი;  $uS$ - ნაკადის მოცულობითი ხარჯი. (15.7) განტოლებისთვის საწყისი პირობებებია  $T(0)=95^{\circ}\text{C}$ . გამოვთვალოთ განტოლების კოეფიციენტი:

$$\beta = \frac{2K\sqrt{\pi}}{u\rho c_p \sqrt{S}} = \frac{2 \cdot 1,16 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{3,14}}{4 \cdot 900 \cdot 2,93 \cdot 10^3 \sqrt{10^{-4}}} = 0,39 .$$

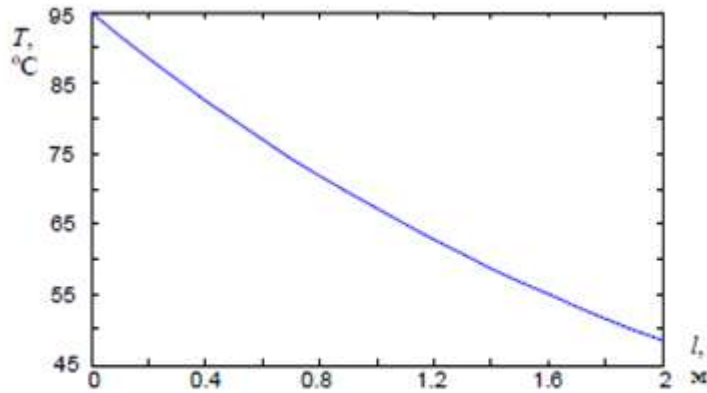
მაშინ

$$\frac{\partial T}{\partial l} = 0,39(T_g - T). \quad (15.8)$$

(15.8) განტოლების ამონახსნი  $l$  უნდა იცვლებოდეს  $0$ -დან  $2$  მ.

ამონახსენი წარმოდგენილია ნახ. 6.-ზე ნაკადის შესასვლელზე ტემპერატურა წარმოადგენს  $T(L)=47^{\circ}\text{C}$ .

(15.8) განტოლების **MATLAB**-ში რიცხვითი ინტეგრირებისათვის საჭიროა შექმნათ ორი  $m$ -ფაილი. ფაილში **func1\_T.m** აღიწერება ფუნქცია, რომელიც უზრუნველყოფს (15.8) განტოლების მარჯვენა მხარეს. ფაილში **Tep11.m** მოიცემიან ამოხსნისათვის საჭირო საწყისი მონაცემები, აგრეთვე **MATLAB**-ის ფუნქცია **ode45**-ის საშუალებით ხორციელდება დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა.



ნახ.15.1 ტემპერატურის პროფილი სითბოგამცვლელის მთელი სიგრძის გასწვრივ

ჩვენს შემთხვევაში ფუნქცია **ode45**-ს აქვს შემდეგი სახე:

$$[1, T]=ode45(@func1\_T,[0 L],T0),$$

სადაც **func1\_T** არის დიფ. განტოლების მარჯვენა ნაწილის ODE ფუნქციის დესკრიპტორი. **[1, T]**-ამოხსნათა **T** მატრიცა, სადაც თითოეული სტრიქონი შეესაბამება სიგრძეს რომელიც ბრუნდება 1 სვეტ-ვექტორში;**[0 L]** - ეს არის ვექტორი, რომელიც საინტეგრირებელ ინტერვალს განსაზღვრავს. **T0** - საწყისი მონაცემების ვექტორი.

ფაილი **func1\_T.m**

**function dT = func1\_T(L,T) % დიფ.განტოლების მარჯვენა მხარის ფუნქცია**

**Tvn=10; % გარე სითბომატარებლის ტემპერატურა**

**dT = 0.39\*(Tvn-T); % დიფ. განტოლების მარჯვენა მხარის სახე**

ფაილი **Tepl1.m**

**L=2; % კლაკნილას მილის სიგრძე**

**T0=95; % განტოლების საწყისი პირობა**

**[L,T] = ode45(@func1\_T,[0 L],T0); % დიფ. განტოლების ამოხსნის ფუნქცია**

**plot(L,T); % T(1)დამოკიდებულების (გრაფიკის) აგება.**

**15.4. მაგალითი 2.** სითხე ცივდება ისეთ გამაგრილებელ მოწყობილობაში, რომელსაც აქვს სახე „მილი მილში“. გაცაცივებელი სითხე მიედინება პარალელურად ( ანუ სწორხაზობრივად). საჭიროა გავიგოთ სითბოგამცვლელის გამოსასვლელზე, თუ გასაგრილებელი სითხის ტემპერატურაა 170°C. ხოლო გამაციებლის ტემპერატურაა 15°C. გასაცივებელი და გამაციებელი სითხეების სიმკვრივე  $\rho = 900$  კგ/მ<sup>3</sup>. დიამეტრები სითბოგამცვლელისა შიდა  $D_1=0,1$ მ , გარე დიამეტრი 0,3მ. სითბოგამცვლელის სიგრძეა  $L=1$ მ. სითბოტევადობა სითხისა გამაციებლისა არის  $C_p=3,35 \cdot 10^3$  ჯ/(კგ\*°C). მოცულობითი ხარჯი სითხისა არის  $G_1=2,28 \cdot 10^{-4}$ მ<sup>3</sup>/სმ, ხარჯი გამაციებელი სითხისა არის  $G_2=5,75 \cdot 10^{-4}$ მ<sup>3</sup>/სმ. სითბოგაცემის კოეფიციენტი

$K=4900 \text{ ვტ}/(\text{მ}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ . ტემპერატურული პროფილი მთელს სიგრძეზე თითოეული სითხისთვის მიიღება შემდეგი დიფ. განტოლებების ამოხსნით.

$$\frac{\partial T_1}{\partial l} = \frac{K\pi D_1(T_2 - T_1)}{G_1 \rho_1 c_{p1}}, \quad (15.9)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial l} = \frac{K\pi D_1(T_1 - T_2)}{G_2 \rho_2 c_{p2}}, \quad (15.10)$$

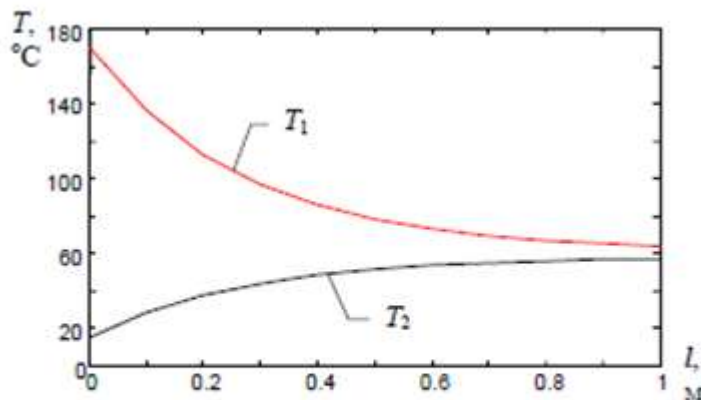
სადაც  $T_1, T_2$  – ეს არის ორივე სითხის ტემპერატურები შესაბამისად. საწყისი პირობებია  $T_1(0) = 170 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $T_2(0) = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ . (15.9) და (15.10) განტოლებებში ჩასმების შემდეგ მივიღებთ სისტემას:

$$\frac{\partial T_1}{\partial l} = 2,239(T_2 - T_1), \quad (15.11)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial l} = 0,888(T_1 - T_2). \quad (15.12)$$

სისტემის ამოხსნის გრაფიკები მოცემულია ნახ. 15.2 -ზე მათზე მოცემულია ტემპერატურათა გავრცელება ორივე სითხეგამცვლელის მთელი სიგრძის გასწვრივ. ნახაზიდან კარგად ჩანს პროცესი ზლიერად იცვლება სიგრძის გასწვრივ, ამიტომაც სითხეგამცვლელის გამოყენების ეფექტურობა არაერთგვაროვანია. სითხეგამცვლელთა გამოსასვლელზე ტემპერატურები შემდეგია:  $T_1(L) = 62,9 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_2(L) = 56,5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

(15.11) და (15.12) რიცხვითი ინტეგრირება ხდება პირველი მაგალითის ანალოგიურად. იქმნება ორი **m** ფაილი: **func2\_T.m** - დიფერენციალური განტოლებების მარჯვენა მხარეების გამოსათვლელად **Tepl2.m** -საწყისი მონაცემების მიწოდებისთვის, დიფ განტოლებების საწყისი პირობებისთვის, რომლებიც ხორციელდებიან **MATLAB ode45**-ის საშუალებით



ნახ.15.2 სითხეგამცვლელის ტემპერატურის ცვლილება სითხეგამცვლელის მთელი სიგრძის გასწვრივ

ფაილს **func2\_T.m**-ს აქვს შემდეგი სახე:

```

function dT = func2_T(l,T) % დიფ განტოლებების მარჯვენა მხარეების ფუნქციები
dT = zeros(2,1); % ტემპერატურათა ვექტორის შექმნა
dT(1)=2.239*(T(2)-T(1)); % პირველი დიფ. განტოლების მარჯვენა მხარე
dT(2)=0.888*(T(1)-T(2)); % მეორე დიფ. განტოლების მარჯვენა მხარე

```

ფაილს **Tepl2.m.**-ს აქვს შემდეგი სახე:

```

L=1; % სითბოგამცვლელის სიგრძე
T1_0=170; % პირველი დიფ. განტოლების საწყისი პირობა
T2_0=15; % მეორე დიფ. განტოლების საწყისი პირობა
[l,T] = ode45(@func2_T,[0 L],[T1_0 T2_0]); %დიფ. განტოლებების ამოხსნის
%ფუნქციები
plot(l,T(:,1),'r',l,T(:,2),'k'); % T1(l) და T2(l) დამოკიდებულებათა
%გრაფიკის აგება

```

**15.5. მაგალითი 3.** ავაგოთ მილი-მილში ტიპის სითბოგამცვლელის სტატისტიკური რეჟიმის მოდელი. გამოვიყენოთ მეორე მაგალითში მოცემული მონაცემები, საწინააღმდეგო ნაკადის შემთხვევისათვის. სითბოგამცვლელის სრული სიგრძე იყოს  $L=2,5$ მ. საწინააღმდეგო ნაკადები ემორჩილებიან იგივე კანონებს რასაც პირდაპირი-მართული ნაკადები ამიტომ მათემატიკური განტოლებები ორივე შემთხვევაში ერთნაირი სახისაა განსხვავება მხოლოდ არგუმენტის ნიშანშია.

$$\frac{\partial T_1}{\partial l} = \frac{K\pi D_1(T_2 - T_1)}{G_1 \rho_1 c_{p1}}, \quad (15.13)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial(-l)} = \frac{K\pi D_1(T_1 - T_2)}{G_2 \rho_2 c_{p2}}. \quad (15.14)$$

(15.13) და (15.14)-ის ამოხსნისას პრინციპიალურად სხვა სახით ხორციელდება საწყის პირობათა მიწოდება ვიდრე ეს ხდებოდა (15.9) და (15.10) განტოლებების დროს. (15.13) და (15.14)-ის ერთობლივი ინტეგრირება შესაძლებელია მხოლოდ ერთი მიმართულებით.  $l$  უნდა იცვლებოდეს ან  $0$ -დან  $L$ -მდე, ან  $L$ -დან  $0$ -მდე. ამასთან თითოეულ შემთხვევაში განიხილება საწყისი პირობების ერთი, მნიშვნელობების ნაკრები. მეორე კი უცვლელი რჩება, ცნობილია მხოლოდ, რომ მეორე ცვლადი, რომელ მნიშვნელობათა დიაპაზონში უნდა აღმოჩნდეს ამონახსენი.

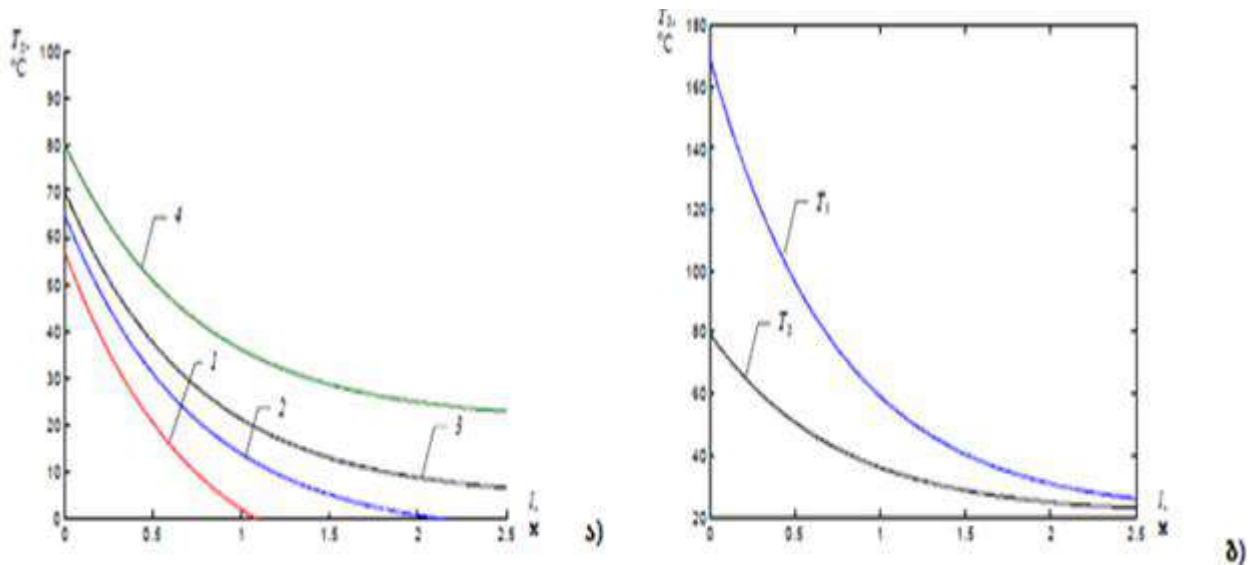
ვისარგებლოთ ბოლო განმარტებებით და შევეცადოთ მოვძებნოთ უცნობი საწყისი მნიშვნელობა  $T_2(0)$ , ისეთი ანგარიშით, რომ სრულდებოდეს დასასრულზე პირობა  $T_2(L) = 15^\circ C$ . ასეთ ამოცანებს, როგორც წესი ცდისა და შეცდომის მეთოდით ხორციელდება.

საწყისი მნიშვნელობა  $T_2(0)$  მოძებნის ამოცანა განისაზღვრება(17) და (18)-განტოლებათა სისტემის ინტეგრირებისას.

ნახ.15.3 ა) გვაჩვენებს  $T_2(0)$  -ის მოძებნის პროცესს. წრფე 1 ასახავს  $T_2$ -ის პროფილს იმ პირობით ცივანტი გათბება  $57^{\circ}\text{C}$  ( მნიშვნელობა აიღება ნებისმიერად). ნახაზიდან ჩანს, რომ ეს წინადადება მცდარია, რადგან ვერ მივიღეთ მოსალოდნელი  $T_2(L) = 15^{\circ}\text{C}$ . მნიშვნელობა.

თუ  $T_2(0) = 65^{\circ}\text{C}$ , მივიღებთ 2 მრუდს. ის აგრეთვე არ არის დამაკმაყოფილებელი. რადგან  $T_2(L) = 15^{\circ}\text{C}$ , მაგივრად ვიღებთ მხოლოდ  $4^{\circ}\text{C}$ . მე-3 და მე-4 მრუდებშიც ასრ არის შესაბამისობა საძიებელი საწყისი პირობებისადმი. პრველ შემთხვევაში შესასვლელზე ტემპერატურა  $T_2(L)$  პირველ შემთხვევაში არის დაწეული, მეორეში -აწეული. სავარაუდოდ საწყისი პირობა არის მოთავსებული ორ შემოწმებულ მნიშვნელობას შორის ( $70^{\circ}\text{C}, 80^{\circ}\text{C}$ ).

ნახ.15.3 ბ)-ზე ნაჩვენებია ამოცანის ამოხსნის შედეგი. ტემპერატურა გამოსავალი ნაკადისა  $T_1(L)$  აღწევს  $18^{\circ}\text{C}$ . (15.13) და (15.14) სისტემის ინტეგრირება გავს მეორე მაგალითის ამონახსნებს.



ნახ.15.3 უუნაკადის სითბოგამცვლელის მოდელირება კომპიუტერზე

- ა) (17) და (18) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მრუდები, რომლებიც მივიღეთ უცნობი საწყისი მნიშვნელობი ტემპისას
- ბ) სითბოგამცვლელში ტემპერატურის ცვლილება მთელი სიგრძის გასწვრივ

ფაილი func3\_T.m

function dT = func3\_T(l,T) % დიფერენციალური განტოლებების მარჯვენა მხარეების %ფუნქცია

global b1 b2; % გლობალური ცვლადების აღწერა

dT = zeros(2,1); %გამოსასვლელი კორდინატების ვექტორი

$dT(1)=b1*(T(2)-T(1));$  % პირველი დიფ. განტოლების მარჯვენა მხარე  
 $dT(2)=-b2*(T(1)-T(2));$  % მეორე დიფ. განტოლების მარჯვენა მხარე

ფაილი **Tep13.m**

**global b1 b2;** % გლობალური ცვლადების აღწერა  
**L=2.5;** % სითბოგამცვლელის სიგრძე  
**T1\_0=170;** % 1-ლი დიფ განტოლების საწყისი პირობა  
**T2\_0=80;** % 2 დიფ განტოლების საწყისი პირობა  
**ro=900;** % გამაგრებელი სითხისა და სხვა გამაგრებლების სიმკვრივე  
**D1=0.1;** % შიდა მილის დიამეტრი  
**D2=0.3;** % გარე მილის დიამეტრი  
**cp=3.35e3 ;** % სითხის და ცივაგენტის სითბოტევადობა  
**G1=2.28e-4;** % გამაგრებელი სითხის მოცულობითი ხარჯი  
**G2=5.75e-4;** % ცივაგენტის მოცულობითი ხარჯი  
**K=4900;** % სითბოგაცემის კოეფიციენტი

% მოდელის კოეფიციენტების ანგარიში

**b1=K\*pi\*D1/(ro\*cp\*G1);**  
**b2=K\*pi\*D1/(ro\*cp\*G2);**  
**[I,T] = ode45(@func3\_T,[0 L],[T1\_0 T2\_0]);** % დიფ. განტოლებათა ამოხსნის ფუნქცია  
**plot(I,T(:,1),'b',I,T(:,2),'k');** % T1(I) და T2(I) დამოკიდებულებათა აგება.

**15.6. მაგალითი 4.** დავამოდელიროთ სითბოგამცვლელის გარდამავალი რეჟიმი „შერევა-შერევა“ ტიპის. სითბოგამცვლელი წარმოადგენს ორკლამერიან ჭურჭელს. მთელს მოცულობაზე ტემპერატურის ერთგვაროვანი გავრცელებისთვის კამერებში იდგმება შემრევები. გასაგრებელი სითხის სიმკვრივეა 850 კგ/მ<sup>3</sup>. თითოეული კამერის მოცულობაა 2,5 მ<sup>3</sup>. სითბოგამცვლელის მოცულობითი ხარჯია 4,12\*10<sup>-3</sup>მ<sup>3</sup>/სმ, ცივაგენტისა კი 5,43\*10<sup>-3</sup>მ<sup>3</sup>/სმ. სითხისა და ცივაგენტის სითბოტევადობებია შესაბამისად 3,75\*10<sup>3</sup>ჯ/(კგ\*C<sup>0</sup>) დდება 3,14\*10<sup>3</sup>ჯ/(კგ\*C<sup>0</sup>). სითბოგაცვლის მოცულობაა 4 მ<sup>3</sup>, ხოლო სითბოგაცემის კოეფიციენტი K=4360ვტ/(მ<sup>2</sup>C<sup>0</sup>). გასაგრებელი სითხის ტემპერატურა ნახტომებად იცვლება 115-200 C<sup>0</sup> ფარგლებში, ხოლო ცივაგენტის ტემპერატურა 10-15C<sup>0</sup>. თითოეული ნაკადისათვის ტემპერატურის ცვლილება დროში განისაზღვრება შემდეგი დიფ. განტოლების სისტემის ამონახსნებით:

$$\rho_1 c_{p1} V_1 \frac{dT_1}{dt} = G_1 \rho_1 c_{p1} (T_1^0 - T_1) + KF(T_2 - T_1), \quad (15.15)$$

$$\rho_2 c_{p2} V_2 \frac{dT_2}{dt} = G_2 \rho_2 c_{p2} (T_2^0 - T_2) + KF(T_1 - T_2), \quad (15.16)$$

სადაც  $T_1^0$  და  $T_2^0$  - არიან სითხისა და ცივაგენტის ტემპერატურები სითბოგამცვლელის შესასვლელზე.

(15.15) და (15.16) სისტემას ვხსნით  $T_1(0)=T_1^*$ ;  $T_2(0)=T_2^*$ .

$T_1^*$  და  $T_2^*$  -ის განსაზღვრისათვის, რომლებიც შეესაბამებიან ნომინალურ სტატიკურ რეჟიმს, დგება სითბოგამცვლელის მუშაობის სტატიკური რეჟიმის სითბური ბალანსის განტოლებები:

$$G_1 \rho_1 c_{p1} (T_1^0 - T_1) + KF(T_2 - T_1) = 0,$$

$$G_2 \rho_2 c_{p2} (T_2^0 - T_2) + KF(T_1 - T_2) = 0.$$

რიცხვითი მნიშვნელობების შემდეგ განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$13132,5 \cdot (115 - T_1) + 17440 \cdot (T_2 - T_1) = 0,$$

$$15686,2 \cdot (10 - T_2) + 17440 \cdot (T_1 - T_2) = 0,$$

რომლებიც იხსნებიან ანალიზურად ან რისხვითი სახით, განტოლებებში შემავალი ცვლადების მიხედვით.

სითბოგამცვლელის გამოსასვლელზე სითბომატარებლების ტემპერატურებმა მოცემულ მდგომარეობაში შეადგინეს:  $T_1^* = 74,46C^0$ ,  $T_2^* = 43,93C^0$ . მაშასადამე მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{G_1}{V_1} (T_1^0 - T_1) + \frac{KF}{\rho_1 c_{p1} V_1} (T_2 - T_1), \quad (15.17)$$

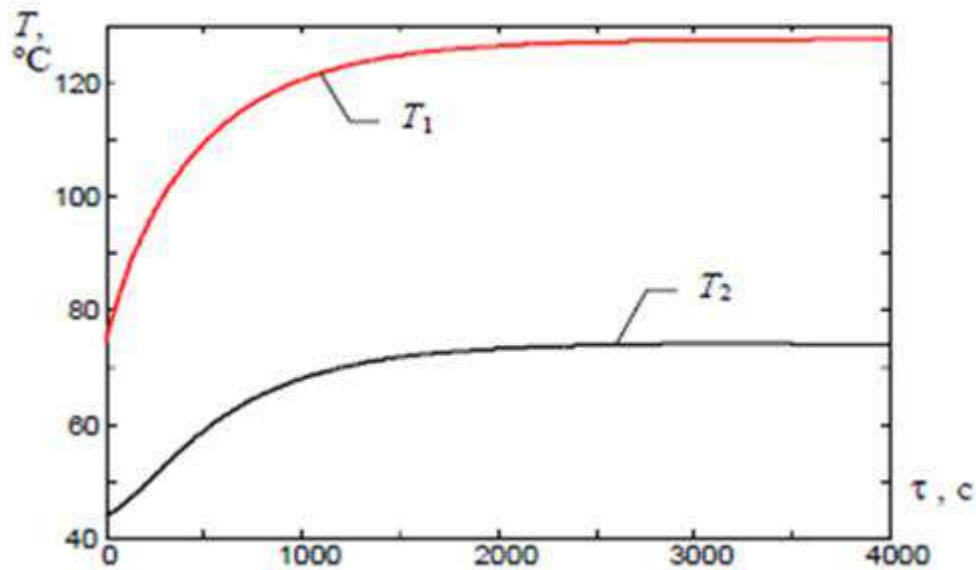
$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{G_2}{V_2} (T_2^0 - T_2) + \frac{KF}{\rho_2 c_{p2} V_2} (T_1 - T_2). \quad (15.18)$$

საწყისი პირობებისთვის:  $T_1(0) = 74,46C^0$   $T_2(0) = 43,93C^0$

სისტემის ამოხსნის გრაფიკები მოცემულია ნახ.9-ზე, მათზე გამოსახულია ორივე სითბოგამცვლელის შესასვლელზე ტემპერატურათა ცვლილება. სითბომატარებელთა ტემპერატურები დაფორმირდნენ 2000 წმ-ის შემდეგ და შეადგინეს  **$T_1 = 126,6 \text{ } ^\circ\text{C}$** ;  **$T_2 = 71,4 \text{ } ^\circ\text{C}$** .

რიცხვითი ინტეგრირება (15.17) და (15.18) განტოლებებისათვის ანალოგიურია 1-3 მაგალითებისა. განსხვავება მხოლოდ ის არის, რომ **ode45-ის** გამოყენება ხდება დროში .





ნახ.15.4 ტემპერატურათა ცვლილება "წანაცვლება-წანაცვლება" ტიპის სითბოგამცვლელში დროის გათვალისწინებით

ფაილი func4\_T.m

```
function dT = func4_T(time,T) %დიფ. განტოლების მარჯვენა მხარის ფუნქცია
global a1 b1 a2 b2 T1_vx T2_vx; %გლობალური ცვლადების აღწერა
dT = zeros(2,1); % ტემპერატურათა ვექტორის შექმნა
dT(1)=a1*(T1_vx-T(1))+b1*(T(2)-T(1)); %პირველი დიფ. განტოლების მარჯვენა
% მხარის განტოლება
```

56

```
dT(2)=a2*(T2_vx-T(2))+b2*(T(1)-T(2)); %მეორე დიფ. განტოლების მარჯვენა მხარის
% განტოლება
```

ფაილი Tepl4.m

```
global a1 b1 a2 b2 T1_vx T2_vx; %გლობალური ცვლადების აღწერა
tk=4000; % ინტეგრირების დრო
T1_0=74.46; % პირველი დიფ. განტოლების საწყისი პირობა
T2_0=43.93; % მეორე დიფ. განტოლების საწყისი პირობა
T1_vx=200; % ტემპერატურა გამაგრებელი სითხის შესასვლელზე
T2_vx=10; %ტემპერატურა ცივაგენტის შესასვლელზე
ro1=850; % გასაგრებელი სითხის სიმკვრივე
ro2=920; %ცივაგენტის სიმკვრივე
cp1=3.75e3; % გასაგრებელი სითხის სითბოტევადობა
cp2=3.14e3; % ცივაგენტის სითბოტევადობა
G1=4.12e-3; %გასაგრებელი სითხის მოცულობითი დანახარჯი
G2=5.43e-3; % ცივაგენტის მოცულობითი დანახარჯი
K=4360; % სითბოგადაცემის კოეფიციენტი
F=4; % სითბოგაცვლის ზედაპირის ფართობი
```

V=2.5; % კამერების (საკნების) მოცულობა

% მოდელის კოეფიციენტების ანგარიში

a1=G1/V;

a2=G2/V;

b1=K\*F/(ro1\*cp1\*V);

b2=K\*F/(ro2\*cp2\*V);

[time,T] = ode45(@func4\_T,[0 tk],[T1\_0 T2\_0]); % დიფ. განტოლების ამოხსნის  
% ფუნქცია

plot(time,T(:,1),'b',time,T(:,2),'k'); % T1(time) ი T2(time) დამოკიდებულებათა  
% აგება

## 15.7. სამუშაოს შესრულების თანმიმდევრობა

1. შევადგინოთ სითბოგამცვლელი აპარატის მათემატიკური აღწერა ( სითბოგამცვლელის ვარიანტები მ,ოთავსებულნი არიან ცხრილი. 6,7,8 ).
2. ვარიანტების შესაბამისად დავამოდელოთ კომპიუტერზე სითბოგამცვლელის სტატიკური და დინამიკური რეჟიმები და განვსაზღვროთ ყველა სითბოგამცვლელის ტემპერატურული დამოკიდებულებები .

## 15.8. საკონტროლო შეკითხვები

1. რითი აიხსნება სითბოგადასვლის პროცესი ერთი სითბოგამცვლელიდან მეორეზე ?
2. რითი განსხვავდებიან ნაკადების იდეალური შერევისა და იდეალური გამოდევნის ობიექტები ერთმანეთისგან ?
3. რას წარმოადგენს თბური ბალანსის განტოლება (სტატიკაში და დინამიკაში) ?
4. რას წარმოადგენს თბური ბალანსის განტოლება (სტატიკაში და დინამიკაში) იდეალური გამოდევნის ობიექტებისათვის ?
5. რომელი ფუნქციები გამოიყენებიან - MATLAB-ში ჩვეულებრივი დიფ. განტოლებების რიცხვითი ამოხსნისათვის ?
6. რა დამატებით პარამეტრებს შეიცავს ფუნქცია **ode45** და მისი ანალოგიური ფუნქციები ?

ცხრ.15.1 სითბოგამცვლელი აპარატების ვარიანტები

ცხრ.15.1 სითბოგამცვლელი აპარატების ვარიანტები

№	სითბოგამცვლელის სქემა	№	სითბოგამცვლელის სქემა
1		3	
2		4	

ცხრ.15.2 საწყისი მონაცემები

N:	N: სქემა	რეჟიმი	$V_1, M$	$V_2, M$	$F, M^2$	$\rho_1, \rho_2, კვ/მ^3$
1	1	დინამიკური	1,1	0,8	4,4	800
2	1	— " —	1,5	1,3	3,2	612
3	1	— " —	2,5	2,2	5,5	200
4	1	— " —	1,5	2,8	2,4	710
5	1	— " —	2,1	1,4	4,5	100
6	1	— " —	0,8	0,5	3,8	300
7	1	დინამიკური	1,2	0,9	6,5	520
8	2	— " —	5,2	—	2,5	800
9	2	— " —	6,5	—	4,5	612
10	2	— " —	4,6	—	3,6	200
11	2	— " —	3,2	—	2,2	710
12	2	— " —	7,2	—	5,1	100
13	2	— " —	2,5	—	2,1	300

№	$C_{p1}, C_{p2}, კვ/(კვ^{\circ}C)$	$G_1, G_2, მ^3/წმ$	$T_1^{BX}, ^{\circ}C$	$T_2^{BX}, ^{\circ}C$	$K, კვ/(მ^2 \cdot ^{\circ}C)$
1	4120	$4,5 \cdot 10^{-3}$	250	10	4360
2	5220	$3,18 \cdot 10^{-3}$	160	15	3650
3	7080	$5,23 \cdot 10^{-3}$	180	18	5650
4	4050	$3,91 \cdot 10^{-3}$	150	10	2020
5	9140	$6,88 \cdot 10^{-3}$	120	10	1110
6	6380	$4,66 \cdot 10^{-3}$	430	15	3470
7	4970	$7,88 \cdot 10^{-3}$	260	12	5720
8	4120	$4,51 \cdot 10^{-3}$	340	12	4590
9	5220	$3,18 \cdot 10^{-3}$	410	15	3210
10	7080	$5,23 \cdot 10^{-3}$	270	10	6320
11	4050	$3,91 \cdot 10^{-3}$	560	24	9230
12	9140	$6,88 \cdot 10^{-3}$	350	8	12010
13	6380	$4,66 \cdot 10^{-3}$	120	11	3260

ცხრ.15.3 საწყისი მონაცემები

№	№ სტუმები	რეჟიმი	$D_1, \text{მ}$	$\rho_1, \text{კგ/მ}^3$	$\rho_2, \text{კგ/მ}^3$	$c_{p1}, \text{კჯ/(კგ}\cdot^{\circ}\text{C)}$	$c_{p2}, \text{კჯ/(კგ}\cdot^{\circ}\text{C)}$
14	3	სტატიკური	0,01	900	750	4350	5140
15	3	— " —	0,02	600	450	3270	5230
16	3	— " —	0,03	200	480	1020	3120
17	3	— " —	0,015	515	200	3270	4780
18	3	— " —	0,025	700	960	3920	4770
19	3	— " —	0,035	800	300	2560	2680

ცხრ.15.3-ის გაგრძელება

№	№ სტუმები	რეჟიმი	$D_1, \text{მ}$	$\rho_1, \text{კგ/მ}^3$	$\rho_2, \text{კგ/მ}^3$	$c_{p1}, \text{კჯ/(კგ}\cdot^{\circ}\text{C)}$	$c_{p2}, \text{კჯ/(კგ}\cdot^{\circ}\text{C)}$
20	4	სტატიკური	0,01	900	750	4350	5140
21	4	სტატ.	0,02	600	450	3270	5230
22	4	სტატ.	0,03	200	480	1020	3120
23	4	სტატ.	0,015	515	200	3270	4780
24	4	სტატ.	0,025	700	960	3920	4770
25	4	სტატ.	0,035	800	300	2560	2680

№	$G_1, \text{მ}^3/\text{სმ}$	$G_2, \text{მ}^3/\text{სმ}$	$L, \text{მ}$	$T_1(0), ^{\circ}\text{C}$	$T_2(0), ^{\circ}\text{C}$	$T_2(L), ^{\circ}\text{C}$	$K, \text{კჯ/(მ}^2\cdot^{\circ}\text{C)}$
14	$2,08\cdot 10^{-5}$	$4,12\cdot 10^{-5}$	1	212	15	—	4817
15	$3,44\cdot 10^{-5}$	$5,21\cdot 10^{-5}$	1,5	193	25	—	2022
16	$2,92\cdot 10^{-4}$	$2,45\cdot 10^{-4}$	2	620	15	—	1460C
17	$5,22\cdot 10^{-4}$	$2,74\cdot 10^{-3}$	3,2	500	10	—	34600
18	$5,48\cdot 10^{-4}$	$6,18\cdot 10^{-4}$	1,8	450	18	—	41600
19	$3,12\cdot 10^{-5}$	$4,05\cdot 10^{-5}$	2,5	670	25	—	10350
20	$2,08\cdot 10^{-5}$	$4,12\cdot 10^{-5}$	1	212	—	15	4817
21	$3,44\cdot 10^{-5}$	$5,21\cdot 10^{-5}$	1,5	193	—	25	2022
22	$2,92\cdot 10^{-4}$	$2,45\cdot 10^{-4}$	2	620	—	15	14600
23	$5,22\cdot 10^{-4}$	$2,74\cdot 10^{-3}$	3,2	500	—	10	34600
24	$5,48\cdot 10^{-4}$	$6,18\cdot 10^{-4}$	1,8	450	—	18	41600
25	$3,12\cdot 10^{-5}$	$4,05\cdot 10^{-5}$	2,5	670	—	25	10350

## თავი 16

### ანალიზური მეთოდებით მათემატიკური მოდელების აგება (ქიმიური რეაქციების მოდელირება)

#### 16.1. სამუშაოს მიზანი: ქიმიური რეაქციების კომპიუტერზე მოდელირების

მეთოდების შესწავლა.

1. გავეცნოთ ქიმიური რეაქციების მოდელირების ძირითად პრინციპებს.
2. ავაგოთ ქიმიური რეაქციის მათემატიკური მოდელი.
3. რეაქციათა კომპონენტები გამოთვლილ დამოკიდებულებათა გრაფიკები.
4. პროგრამათა ტექსტები.

#### 16.2. საკითხის მოკლე აღწერა

ქიმიური რეაქციის სიჩქარე ეს არის რეაგენტების, მოლეზის რაოდენობის ცვლილება ( გაზრდა ან შემცირება) დროის ერთეულზე, მოცულობის ერთეულ ფართობზე ქიმიური ზემოქმედებისა (ჰომოგენური რეაქციებისათვის) ან ჰეტეროგენური პროცესებისათვის. ამ განმარტების საფუძველზე ჰომოგენური ქიმიური რეაქციის სიჩქარე განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$v_r = \frac{1}{V} \frac{dN}{d\tau}, \quad (16.1)$$

სადაც  $V$  - რეაქტორის მოცულობაა  $\frac{dN}{d\tau}$  -- დროში რეაგენტების მოლეზის ცვლილება.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ მოლეზის რიცხვი  $N=CV$ , სადაც  $C$  არის რეაგენტის კონცენტრაცია, ზოგად შემთხვევაში გვექნება:

$$v_r = \frac{1}{V} \frac{d(CV)}{d\tau}, \quad (16.2)$$

ან

$$v_r = \frac{1}{V} \frac{VdC + CdV}{d\tau}. \quad (16.3)$$

რეაქციისათვის, მრომელიც მიმდინარეობს ჩაკეტილ სისტემაში მოცემული მოცულობისათვის, (16.3) ფორმულის მეორე შესაკრები ნოლის ტოლია და განტოლება დაიყვანება სახეზე:

$$v_r = \pm \frac{dC}{d\tau}. \quad (16.4)$$

ნიშანი (+) მიუთითებს, რომ რეაქციაში გროვდება ნივთიერება, ხოლო (-) ნიშნმავს, რომ მცირდება ნივთიერების კონცენტრაცია.

ჰეტეროგენული ქიმიური რეაქციებისათვის პროცესის სიჩქარე შეიძლება ავლწეროთ ფორმულით:

$$v_r = \frac{1}{S} \frac{dN}{d\tau}, \quad (16.7)$$

შემდგომში ყველგან ვუშვებთ, რომ სისტემაში მიმდინარეობს ჰომოგენური ქიმიური პროცესი.

ქიმიური პროცესის სიჩქარე არის ფუნქცია მარეაგირებელი ნივთიერების კონცენტრაციის, აგრეთვე ტემპერატურისა და ხანდახან წნევისა სისტემაში:

$$v_r = f(\bar{C}, P, T), \quad (16.8)$$

სადაც  $\bar{C}$  - არის ვექტორი მარეაგირებელი ნივთიერების კონცენტრაციისა  $P, T$  - შესაბამისად წნევა და ტემპერატურა.

ქიმიური რეაქციები შეიძლება პირობითად დავყოთ მარტივ და რთულ რეაქციებად. ქიმიური კინეტიკა განსაზღვრავს მარტივ რეაქციებად იმ რეაქციებს, რომელიც მიმდინარეობს ერთ სტადიად, იგი შეიცავს ქიმიური გარდაქმნის ერთ აქტს. მარტივი რეაქციის სიჩქარე დამოკიდებულია მხოლოდ საწყისი ნივთიერებების კონცენტრაციაზე. რთული რეაქციების დროს კი სიჩქარე დამოკიდებულია, როგორც ნივთიერებათა საწყის ასევე საშუალოდ (განმსაზღვრელ) კონცენტრაციაზე, ხოლო მექანიზმი ითვალისწინებს ქიმიური გარდაქმნების სხვადასხვა გზებს (გარდაქმნადი, მიმდევრობითი, პარალელური, განშტოებადი, მიმდევრობით-პარალელური რეაქციები).

მარტივი და რთული ქიმიური რეაქციების კინეტიკის განმსაზღვრელ განტოლებები გარკვეულად განსხვავებულნი არიან ამიტომ ისინი განვიხილოთ ცალკე-ცალკე.

### 16.3 მარტივი რეაქციების კინეტიკა

თუ მარტივ რეაქციაში მონაწილეობს  $n$  ნივთიერება, მაშინ მისი მატერიალური ბალანსი გამოისახება სტექიომეტრული განტოლებით:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n = 0 \quad (16.7)$$

სადაც  $\alpha_i$  არის სტექიომეტრული კოეფიციენტი (საწყისი ნივთიერებებისათვის უარყოფითი, ხოლო განსაზღვრელ ნივთიერებებისათვის დადებითი);  $A_i$  - რეაქციაში მონაწილე ნივთიერება.

$\alpha_i$  კოეფიციენტი აჩვენებს თუ  $A_i$  ნივთიერების რამდენი მოლეკულა მონაწილეობს რეაქციაში.

განვსაზღვროთ მარტივი რეაქციის სიჩქარე, როგორც რეაქციაში მონაწილე ნებისმიერი ნივთიერების წარმოქმნის სიჩქარე, გაყოფილი მითითებული

კომპონენტის სტექიომეტრულ კოეფიციენტზე, რომელიც ხან უარყოფითია. შესაბამისად (16.7) ქიმიური რეაქციისთვის სიჩქარე განისაზღვრება ასე:

$$v_r = \frac{v_{rA_1}}{\alpha_1} = \frac{v_{rA_2}}{\alpha_2} = \dots = \frac{v_{rA_n}}{\alpha_n} \quad (16.8)$$

მრავალ ფორმალურ-კინეტიკურ გამოთვლებში გამოიყენებიან რეაქციათა სიჩქარეები, კონკრეტულ ნივთიერებებში გამოსახული. ამ მნიშვნელობებისათვის ფორმულა (30) მიიღებს სახეს:

$$v_{ri} = \alpha_i v_r \quad (16.9)$$

(31) ფორმულის გამოყენებისას უნდა გვითვალისწინოთ, -როცა საწყის ნივთიერებებისთვის, ხოლო  $\alpha_i > 0$  რეაქციის პროდუქტებისათვის.

მარტივი რეაქციის სიჩქარე, აგრეთვე რთული რეაქციების გარკვეული სტადიები, მომქმედი მასების კანონის თანახმად პროპორციულნი არიან რეაქციაში მონაწილე ნივთიერებათა საწყისი კონცენტრაციისა. რეაქციისთვის გვაქვს:



შესაბამისი დამოკიდებულება გამოისახება კინეტიკური განტოლებით

$$v_r = k C_A^{n_1} C_B^{n_2} \quad (16.11)$$

აქ  $n_1$  - არის რეაქციის ხარისხი A ნივთიერებისთვის,  $n_2$  - რეაქციის ხარისხი B ნივთიერებისთვის.  $n_1 + n_2$  - არის ჯამური ხარისხი k პროპორციულობის კოეფიციენტია, მას უწოდებენ რეაქციის სისწრაფის კოეფიციენტს. არენუსის განტოლების თანახმად ქიმიური რეაქციის კონსტანტა დამოკიდებულია ტემპერატურაზე:

$$k = k_0 e^{-\frac{E}{RT}} \quad (16.12)$$

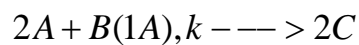
E-აქტივირების ენერგია; R - უნივერსალური გაზის კოეფიციენტი;  $k_0$  - წინა საექსპონენციალო მამრავლი.

რეაქციის ან სტადიის რიგს ვუთითებთ ისრის ზემოთ, ისარი მიუთითებს რეაქციის მიმართულებას. აქვე მივუთითებთ სიჩქარის მუდმივას. აქ გვაქვს

$$2A + B(1A,1B), k \text{ --- } > 2C \quad (16.13)$$

(35) აღნიშნავს რეაქციას, რომელსაც აქვს 1 ხარისხი A B ნივთიერებებისთვის, და სიჩქარის k კონსტანტისათვის. პრაქტიკაში გვხვდება სხვადასხვა ხარისხის რეაქციები, მთელრიცხვა, ნამდვილი ხარისხის, ნულოვანი და ხანდისხან უარყოფითიც.

**მაგალითი 5.** ნივთიერების რეაქციათა სიჩქარე.





რომელსაც აქვს პირველი ხარისხი A რეაგენტისთვის და სიჩქარის კონსტანტა k. ამ რეაქციისათვის (31) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$v_{rA} = -kC_A, \quad v_{rB} = -kC_A, \quad v_{rC} = 2kC_A.$$

#### 16.4. რთული რეაქციების კინეტიკა

რთული რეაქცია შესდგება რიგი სტადიებისაგან, თითოეულ მათგანს გააჩნია თავისი სიჩქარე და არ არის შესაძლებელი მთელი რთული რეაქციის სიჩქარის დადგენა.

ამ დროს კი რეაქციაში მონაწილე ნებისმიერი ნივთიერება წარმოიქმნებიან და იხარჯებიან გარკვეული სისწრაფით. ამ სისწრაფეების ცოდნა აუცილებელია პროცესის გაანგარიშებისას.

i -ური ნივთიერების სისწრაფე რთული რეაქციის დროს არის ყველა სტადიის სისწრაფეთა ალგებრული ჯამი (სტექიომეტრული კოეფიციენტების გათვალისწინებით).

$$v_{ri} = \sum_{j=1}^m v_{rij} = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} v_{rj}. \quad (16.14)$$

სადაც j - სტადიის ნომერია; m - სტადიათა რაოდენობაა.

სტადიის სისწრაფე განისაზღვრება (16.9) ფორმულით. თუ ნივთიერება სტადიაში არ იღებს მონაწილეობას, მაშინ სტექიომეტრული კოეფიციენტი ნოლის ტოლია.

**მაგალითი 6.** ნივთიერების სიჩქარე რთული რეაქციების დროს.

ჩავწეროთ რეაქციაში მონაწილე ნივთიერებათა კინეტიკური განტოლებები:

$$\begin{cases} A + 2B \xrightarrow{1, B, k_1} C; \\ A \xrightarrow{1, A, k_2} D; \\ C + D \xrightarrow{1, C, 1, D, k_3} 3E. \end{cases}$$

ნივთიერება A მონაწილეობს პირველ და მეორე სტადიებზე სტექიომეტრული კოეფიციენტებით -1 და -1. ამიტომ

$$v_{rA} = -v_{r1} - v_{r2} = -k_1 C_B - k_2 C_A.$$

შესაბამისად :

$$v_{rB} = -2k_1 C_B, \quad v_{rC} = k_1 C_B - k_3 C_C C_D,$$

$$v_{rD} = k_2 C_A - k_3 C_C C_D, \quad v_{rE} = 3k_3 C_C C_D.$$

#### 16.5 რეაქციის საკვანძო კომპონენტების შერჩევა

თუ ქიმიური რეაქცია (მარტივი ან რთული) მუდმივი მოცულობის პირობებში ჩაკეტილ სივრცეში, მაშინ მისი მიმდინარეობა აღიწერება დიფერენციალური

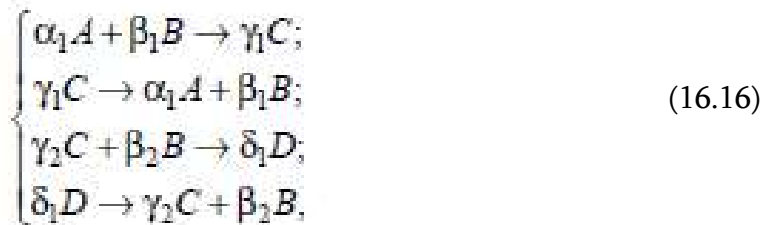
განტოლებათა სისტემით. მართლაც (16.1),(16.11) და (16.14) განტოლებების ერთობლივ განხილვას მივყავართ შემდეგ ფორმულასთან:

$$\frac{dC_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} v_{rj}, \quad (16.15)$$

ასეთი განტოლებების რაოდენობა უდრის იმ ნივთიერებების( რეაგენტების და პროდუქტების) რაოდენობას, რომლებიც მონაწილეობენ რეაქციაში. ამასთან რთული რეაქციების დროს ამ განტოლებათა რაოდენობა შეიძლება იყოს საკმაოდ დიდი რაც საგრძნობლად ართულებს ამ რეაქციების შესაბამისი მათემატიკური მოდელების გამოყენებას რეაქციების ანალიზისათვის.

მათემატიკური მოდელის განტოლებათა რაოდენობა, რომლებიც აღწერენ რეაქციაში მონაწილე კომპონენტების ცვლილებას, შეიძლება შემცირებულ იქნას გარკვეულ მინიმუმამდე, თუ განტოლებებს შევადგენთ მხოლოდ საკვანძო კომპონენტებისათვის. დანარჩენი კომპონენტების ყოფაქცევა , რომლებიც არ შევიდნენ განტოლებებში, შეიძლება აღწერილ იქნან უბრალო სტექიომეტრული დამოკიდებულებებით, წარმოდგენილით საკვანძო კომპონენტების რაოდენობით.

ამ წესების ილუსტრაციისათვის ვისარგებლოთ შემდეგი ქიმიური რეაქციებით:



სადაც  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  - სტექიომეტრული კოეფიციენტები.

პროცესის კინეტიკა სრულად აღიწერებიან , თუ მოცემულია  $v_{r1}, v_{r2}, v_{r3}$  და  $v_{r4}$  ყველა სტადიაზე სიჩქარეები. ამ შემთხვევაში ნებისმიერი კომპონენტის წარმოქმნის სიჩქარე, რომლებიც მონაწილეობენ რთულ რეაქციაში და მათი შესაბამისი სტექიომეტრული კოეფიციენტები ნიშნების წესის გამოყენებით მიიღებენ სახეს:

$$\begin{aligned} v_{rA} &= -\alpha_1 v_{r1} + \alpha_1 v_{r2}, \\ v_{rB} &= -\beta_1 v_{r1} + \beta_1 v_{r2} - \beta_2 v_{r3} + \beta_2 v_{r4}, \\ v_{rC} &= \gamma_1 v_{r1} - \gamma_1 v_{r2} - \gamma_2 v_{r3} + \gamma_2 v_{r4}, \\ v_{rD} &= -\delta_1 v_{r3} + \delta_1 v_{r4}. \end{aligned} \quad (16.17)$$

შევადგინოთ მატრიცა სტექიომეტრული კოეფიციენტებისა.

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & \beta_1 & -\beta_2 & \beta_2 \\ \gamma_1 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \delta_1 & -\delta_1 \end{vmatrix} \quad (16.18)$$

სადაც კოეფიციენტი, რომელიც მოთავსებულია  $i$  სტრიქონისა და  $k$  სვეტის გადაკვეთაზე არის სტექიომეტრული კოეფიციენტი  $i$ -ური კომპონენტისა რეაქციის  $k$ -ურ სტადიაში, ნიშნის გათვალისწინებით.

საკვანძო კომპონენტების ამოცანა დადის (16.18) მატრიცის რანგის მოძებნაზე. მატრიცის რანგის ქვეშ ჩვენ გვესმის ჩვეულებრივი მათემატიკური აზრით ანუ იმ ქვე-მატრიცის ზომი გამოთვლა რანგისა სტანდარტულია.

(16.18) შემთხვევისათვის, ვიქცევით შემდეგნაირად მოვძებნით მატრიცის რანგს თანდათანობით გავზრდით რა დეტერმინანტების რიგს. პირველი რიგის დეტერმინანტი იქნება ნებისმიერი არანულოვანი ელემენტი (16.18) მატრიცისა.

შემდეგ ვეძებთ მეორე რიგის დეტერმინანტებს თავიდან ვიღებთ ზედა მარცხენა კუთხეში მოცემულ ოთხეულს:

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ -\beta_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = -\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_1 = 0. \quad (16.19)$$

ვეძებთ დანარჩენ დეტერმინანტებს ადვილად მოიძებნება არანულოვანი დეტერმინანტის მქონე მინორი, მაგალითად:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{vmatrix} = \alpha_1\delta_1 \neq 0. \quad (16.20)$$

მივიღეთ, რომ (40) მატრიცის რანგია 2 და შეგვიძლია კომპონენტებად გამოვიყენოთ ორი კომპონენტი.

ვთქვათ კომპონენტებად შევარჩიეთ A და D, მაშინ ადვილი მისახვედრია B და C კომპონენტების სისწრაფეების წარმოქმნის ტოლობები შეიძლება გამოსახულ იქნას  $v_{rA}$  და  $v_{rD}$ :

$$v_{rB} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} v_{rA} - \frac{\beta_2}{\delta_1} v_{rD}, \quad v_{rC} = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} v_{rA} - \frac{\gamma_2}{\delta_1} v_{rD}. \quad (16.21)$$

თუ კომპონენტებად ავარჩევთ A და B-ს მაშინ  $v_{rC}$  და  $v_{rD}$ -თვის შესაბამისად მივიღებთ:

$$v_{rC} = -\frac{\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1}{\alpha_1 \beta_2} v_{rA} + \frac{\gamma_2}{\beta_2} v_{rB}, \quad v_{rC} = \frac{\beta_1 \delta_1}{\alpha_1 \beta_2} v_{rA} - \frac{\delta_1}{\beta_2} v_{rB}. \quad (16.22)$$

ანალოგიურად შეიძლება მოიძებნოს შესაბამისობა A და C; B და C; B და D; C და D კომპონენტების წყვილებისათვის.

კომპონენტების დროში კონცენტრაციის ცვლილების განტოლებები მოცემული შემთხვევისათვის იღებენ სახეს:

$$\begin{cases} \frac{dC_A}{d\tau} = v_{rA}, & \frac{dC_B}{d\tau} = v_{rB}, \\ \frac{dC_C}{d\tau} = v_{rC}, & \frac{dC_D}{d\tau} = v_{rD}. \end{cases} \quad (16.23)$$

(16.21)-ის გათვალისწინებით მეორე და მესამე განტოლებები შეიძლება შეიცვალოს გამოსახულებებით:

$$\frac{dC_B}{d\tau} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{dC_A}{d\tau} - \frac{\beta_2}{\delta_1} \frac{dC_D}{d\tau}, \quad \frac{dC_C}{d\tau} = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1} \frac{dC_A}{d\tau} - \frac{\gamma_2}{\delta_1} \frac{dC_D}{d\tau}, \quad (16.24)$$

რომელთა ინტეგრირების შემდეგ ვიღებთ:

$$C_B - C_{B0} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} (C_A - C_{A0}) - \frac{\beta_2}{\delta_1} (C_D - C_{D0}),$$

$$C_C - C_{C0} = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1} (C_A - C_{A0}) - \frac{\gamma_2}{\delta_1} (C_D - C_{D0}),$$

სადაც  $C_{A0}$ ,  $C_{B0}$ ,  $C_{C0}$  და  $C_{D0}$  - კომპონენტების საწყისი კონცენტრაციაა. აქედან საბოლოოდ ვპოულობთ დამოკიდებულებებს:

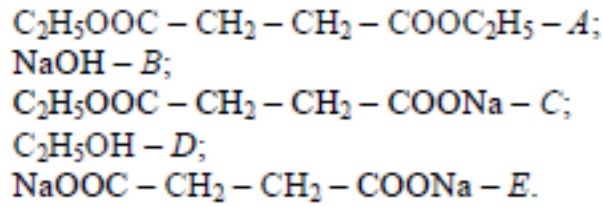
$$C_B - C_{B0} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} (C_A - C_{A0}) - \frac{\beta_2}{\delta_1} (C_D - C_{D0}),$$

$$C_C - C_{C0} = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1} (C_A - C_{A0}) - \frac{\gamma_2}{\delta_1} (C_D - C_{D0}),$$

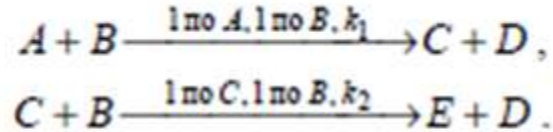
რომლებიც გამოიყენებიან (45) სისტემის მეორე და მესამე დიფერენციალური განტოლებების მაგიერ.

**16.6 მაგალითი 7.** ეთილოქსიდის საფონდო რეაქციები კაუსტიკური სოდით გაწმენდის რეაქციის მოდელირება.

ჩანაწერის გამარტივების მიზნით შემოვიტანოთ ქიმიური ფორმულები:



ამ რეაქციის სქემა ჩაიწერება ასე:



რეაქცია მიმდინარეობს თხევად გარემოში პრაქტიკულად იზოქორულად.

$$0^\circ\text{C} \quad k_1 = 2,24 \text{ M}^3 / (\text{კმოლიწმ}); \quad k_2 = 0,33 \text{ M}^3 / (\text{კმოლიწმ}).$$

შედეგად რეაქციის იზოქორულობისათვის შეიძლება (26) განტოლება.

$$v_r = \pm \frac{dC}{d\tau}.$$

რეაქციის სისწრაფის სქემას აქვს სახე:

$$\begin{cases}
v_{rA} = -k_1 C_A C_B, \\
v_{rB} = -k_1 C_A C_B - k_2 C_C C_B, \\
v_{rC} = k_1 C_A C_B - k_2 C_C C_B, \\
v_{rD} = k_1 C_A C_B + k_2 C_C C_B, \\
v_{rE} = k_2 C_C C_B.
\end{cases}$$

არ არის რთული, მივხვდეთ იმას, რომ სტექიომეტრიული კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი უდრის 2-ს. საკვანძო კომპონენტება და ავირჩიოთ ნებისმიერი ორი (მაგალითად A და E). მაშინ დანარჩენი კომპონენტების სისწრაფე ტოლი იქნება შემდეგი ტოლობებისა:

$$v_{rB} = v_{rA} - v_{rE},$$

$$v_{rC} = -v_{rA} - v_{rE},$$

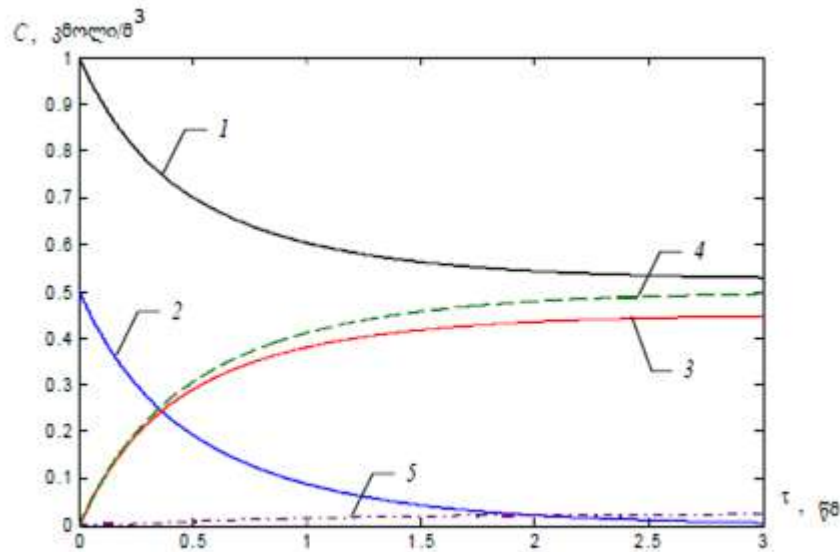
$$v_{rD} = -v_{rA} + v_{rE}.$$

ბოლო დამოკიდებულებების გათვალისწინებით რეაქციის მათემატიკურ აღწერილობას აქვს სახე:

$$\begin{cases} \frac{dC_A}{d\tau} = -k_1 C_A C_B, \\ \frac{dC_E}{d\tau} = k_2 C_C C_B, \\ C_B = C_{B0} + (C_A - C_{A0}) - (C_E - C_{E0}), \\ C_C = C_{C0} - (C_A - C_{A0}) - (C_E - C_{E0}), \\ C_D = C_{D0} - (C_A - C_{A0}) + (C_E - C_{E0}). \end{cases} \quad (16.25)$$

16.1 ნახაზზე მოცემულია მოდელირების შედეგების გრაფიკული სახე მიღებულია კინეტიკური მრუდები  $C_{A0} = 1$  კმოლი/მ<sup>3</sup>;  $C_{A0} = 0,5$  კმოლი/მ<sup>3</sup>.

უნდა აღინიშნოს, რომ კომპიუტერის გამოყენების გარეშე გამოთვლები ძალიან მრავალრიცხოვანია, ხოლო კომპიუტერი გვაძლევს საშუალებას ძალიან იოლად და კომპაქტურად, ნებისმიერი ცაწყისი სიჩქარეების პირობებში ავაგოთ კინეტიკური მრუდები.



ნახ.16.1 რეაქციის მოდელირების გრაფიკული სურათი

Matlab -ში (16.25) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პროგრამას შეიძლება მიეცეს შემდეგი სახე:

```

dt=0.001;           % : დროში ინტეგრირების ბიჯი
time=[0:dt:3];     % : დროების მასივი
n=length(time);    % : დროების მასივის განზომილება
% კონცენტრაციის მასივთა შექმნა
Ca=zeros(1,n);
Cb=zeros(1,n);
Cc=zeros(1,n);
Cd=zeros(1,n);
Ce=zeros(1,n);
% საწყისი პირობები
Ca(1)=1;
Cb(1)=0.5;
Cc(1)=0;
Cd(1)=0;
Ce(1)=0;
% რეაქციების სიჩქარეთა მუდმივები
k1=2.24; k2=0.33;
% დიფ. განტოლებების ინტეგრირება ეილერის მეთოდით
for i=2:n
    Ca(i)=Ca(i-1)+dt*(-k1*Ca(i-1)*Cb(i-1));
    Ce(i)=Ce(i-1)+dt*(k2*Cc(i-1)*Cb(i-1));
    Cb(i)=Cb(1)+(Ca(i-1)-Ca(1))-(Ce(i-1)-Ce(1));
    Cc(i)=Cc(1)-(Ca(i-1)-Ca(1))-(Ce(i-1)-Ce(1));
    Cd(i)=Cd(1)-(Ca(i-1)-Ca(1))+(Ce(i-1)-Ce(1));
end
% საბოლოო მრუდების აგება
plot(time,Ca,'k', time,Cb,'b', time,Cc,'r', time,Cd,'g', time,Ce,'m');

```

### 16.7 სამუშაოს შესრულების თანმიმდევრობა

1. ავარტ რეაქციათა სიჩქარეების განტოლებები თითოეული ნივთიერებისთვის (საკონტროლო დავალებები მოცემულია ცხრილებში 16.1 და 16.2).
2. განვხორციელოთ რეაქციის საკვანძო კომპონენტების შერჩევა;
3. შევადგინოთ ქიმიური რეაქციების მათემატიკური აღწერა 2. პუნქტის გათვალისწინებით;
4. განვსაზღვროთ კინეტიკური დამოკიდებულებები რეაქციაში მონაწილე ნივთიერებებისთვის

ცხრ.16.1 დავალებათა საკონტროლო ვარიანტები

№	რეაქციათა აღწერა	№	რეაქციათა აღწერა
1	$A+B \xrightarrow{1 \text{ no } A, 1 \text{ no } B, k_1} C+D$ $C+D \xrightarrow{1 \text{ no } C, 1 \text{ no } D, k_2} A+B$ $A+C \xrightarrow{1 \text{ no } A, 1 \text{ no } C, k_3} E$	7	$A+2B \xrightarrow{2 \text{ no } B, k_1} 2C+2D$ $2C+2D \xrightarrow{1 \text{ no } C, 1 \text{ no } D, k_2} A+2B$ $2B+C \xrightarrow{2 \text{ no } B, k_3} E$
2	$2A+B \xrightarrow{2 \text{ no } A, k_1} 2C+D$ $A+2C \xrightarrow{1 \text{ no } A, 1 \text{ no } C, k_2} 2D+E$ $B \xrightarrow{1 \text{ no } B, k_3} E$	8	$A+B \xrightarrow{1 \text{ no } A, 1 \text{ no } B, k_1} C+D$ $D+A \xrightarrow{1 \text{ no } D, 1 \text{ no } A, k_2} C+E$ $D \xrightarrow{1 \text{ no } D, k_3} A+B$
3	$2A+B \xrightarrow{2 \text{ no } A, k_1} 2C+D$ $2C+D \xrightarrow{2 \text{ no } C, k_2} 2A+B$ $A+2C \xrightarrow{2 \text{ no } C, k_3} 2E$	9	$A+2B \xrightarrow{1 \text{ no } A, 1 \text{ no } B, k_1} 2C+2D$ $2C+2D \xrightarrow{1 \text{ no } C, 1 \text{ no } D, k_2} A+2B$ $2B+C \xrightarrow{2 \text{ no } B, k_3} E$
4	$A+3B \xrightarrow{1 \text{ no } A, 1 \text{ no } B, k_1} 2C+D$ $2B \xrightarrow{2 \text{ no } B, k_2} D+2E$ $B+D \xrightarrow{1 \text{ no } B, 1 \text{ no } D, k_3} 2E$	10	$2A+2B \xrightarrow{1 \text{ no } A, 1 \text{ no } B, k_1} 2C+D$ $2C+B \xrightarrow{2 \text{ no } C, k_2} E$ $E \xrightarrow{1 \text{ no } E, k_3} 2C+B$
5	$A+2B \xrightarrow{2 \text{ no } B, k_1} C+2D$ $C+2D \xrightarrow{2 \text{ no } D, k_2} A+2B$ $2A+C \xrightarrow{2 \text{ no } A, k_3} 2E$	11	$2A+B \xrightarrow{2 \text{ no } A, k_1} C+2D$ $2A+D \xrightarrow{2 \text{ no } A, k_2} E$ $E \xrightarrow{2 \text{ no } E, k_3} 2A+D$
6	$3A+B \xrightarrow{1 \text{ no } A, 1 \text{ no } B, k_1} 2C+D$ $2A \xrightarrow{2 \text{ no } A, k_2} D+2E$ $A+D \xrightarrow{1 \text{ no } A, 1 \text{ no } D, k_3} E$	12	$A+B \xrightarrow{1 \text{ no } A, 1 \text{ no } B, k_1} C+D$ $C+D \xrightarrow{2 \text{ no } C, k_2} A+B$ $A+C \xrightarrow{1 \text{ no } A, 1 \text{ no } C, k_3} E$



16.1 ცხრილის გაგრძელება

№	რეაქციის აღწერა	№	რეაქციის აღწერა
13	$3A+B \xrightarrow{2\text{no } A, k_1} C+2D$ $3A+D \xrightarrow{2\text{no } A, k_2} E$ $E \xrightarrow{2\text{no } E, k_3} 3A+D$	20	$2A+B \xrightarrow{2\text{no } A, k_1} C+D$ $C+2B \xrightarrow{2\text{no } B, k_2} D+E$ $C \xrightarrow{2\text{no } C, k_3} 3E$
14	$2A+B \xrightarrow{2\text{no } A, k_1} 2C+D$ $2C+D \xrightarrow{2\text{no } C, k_2} 2A+B$ $A+2C \xrightarrow{1\text{no } A, 1\text{no } C, k_3} 2E$	21	$A+2B \xrightarrow{2\text{no } B, k_1} C+2D$ $2C+2B \xrightarrow{2\text{no } B, k_2} 2D+E$ $C \xrightarrow{2\text{no } C, k_3} 2E$
15	$A+B \xrightarrow{1\text{no } A, 1\text{no } B, k_1} C+D$ $C+2B \xrightarrow{2\text{no } B, k_2} 2E$ $2E \xrightarrow{2\text{no } E, k_3} C+2B$	22	$A+2B \xrightarrow{2\text{no } B, k_1} C+2D$ $2C+B \xrightarrow{2\text{no } C, k_2} 2D+E$ $C \xrightarrow{2\text{no } C, k_3} 2E$
16	$2A+B \xrightarrow{1\text{no } A, 1\text{no } B, k_1} C+D$ $C+2D \xrightarrow{2\text{no } D, k_2} A+2B$ $2A+C \xrightarrow{2\text{no } A, k_3} 2E$	23	$2A+2B \xrightarrow{1\text{no } A, 1\text{no } B, k_1} C+2D$ $A+2C \xrightarrow{2\text{no } C, k_2} 2D+E$ $B \xrightarrow{1\text{no } B, k_3} E$
17	$2A+B \xrightarrow{1\text{no } A, 1\text{no } B, k_1} C+D$ $C+2B \xrightarrow{2\text{no } B, k_2} 2E$ $2E \xrightarrow{2\text{no } E, k_3} C+2B$	24	$2A+2B \xrightarrow{1\text{no } A, 1\text{no } B, k_1} 2C+D$ $A+2C \xrightarrow{2\text{no } C, k_2} 2D+E$ $B \xrightarrow{1\text{no } B, k_3} E$
18	$A+2B \xrightarrow{2\text{no } B, k_1} 2C+2D$ $C+2D \xrightarrow{1\text{no } C, 2\text{no } D, k_2} A+2B$ $2B+C \xrightarrow{2\text{no } B, k_3} 2E$	25	$2A+B \xrightarrow{2\text{no } A, k_1} 2C+2D$ $B+2D \xrightarrow{2\text{no } D, k_2} C+2E$ $D \xrightarrow{1\text{no } D, k_3} E$
19	$2A+B \xrightarrow{2\text{no } A, k_1} C+D$ $C+2B \xrightarrow{2\text{no } B, k_2} D+E$ $2C \xrightarrow{2\text{no } C, k_3} 3E$	26	$2A+B \xrightarrow{2\text{no } A, k_1} 2C+D$ $B+2D \xrightarrow{2\text{no } D, k_2} C+2E$ $D \xrightarrow{1\text{no } D, k_3} E$

ცხრ.16.2 საწყისი მონაცემები

№	$C_{\text{ჩრ}} \text{მოლ/მ}^3$	$C_{\text{მზ}} \text{მოლ/მ}^3$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
1	2	3	4	5	6
1	2,0	3,0	1,12	0,85	1,74
2	5,0	2,5	1,12	0,85	1,74
3	3,5	2,5	2,65	0,11	0,43
4	3,2	1,6	1,16	1,05	0,72
5	2,4	0,8	1,26	1,00	1,07
6	1,6	2,1	2,25	1,12	0,87
7	0,8	1,4	0,25	0,12	0,87
8	2,0	1,0	1,28	0,25	0,82
9	0,8	0,5	2,14	1,18	0,54
10	3,8	2,5	2,27	0,54	1,47
11	1,6	0,9	2,47	0,87	2,45
12	2,5	1,5	0,23	2,94	1,16
13	1,8	2,0	0,85	1,74	1,15
14	2,0	1,5	0,75	1,65	1,31
15	1,6	1,4	1,25	1,51	2,08
16	2,4	1,2	2,62	0,97	1,28
17	2,5	1,6	2,41	2,50	1,66
18	4,0	2,0	0,37	3,21	1,44
19	2,1	2,9	1,15	0,75	1,64
20	4,5	2,5	1,22	0,68	1,51
21	3,4	2,6	2,59	0,16	0,37
22	3,0	2,1	1,09	1,12	0,62
23	3,5	2,6	2,22	0,49	1,52
24	1,5	1,0	2,54	0,82	2,55
25	2,6	1,5	0,21	3,04	1,21
26	2,0	2,0	0,91	1,67	1,21

16.8. საკონტროლო კითხვები

1. რა არის ქიმიური რეაქციის სიჩქარე?
2. მარტივი რეაქციების კინეტიკა
3. რთული რეაქციების კინეტიკა
4. როგორ შევამციროთ ქიმიური რეაქციების კომპონენტების რაოდენობის ცვლილების აღმწერი მათემატიკური განტოლებების რაოდენობა ?
5. როგორ განისაზღვრება ქიმიურ რეაქციათა მიმდინარეობა
6. განვმართოთ არენიუსის განტოლების ფიზიკური არსი.

## თავი 17

### მარტივი ჰიდრავლიკური სისტემების მოდელირება

სამუშაოს მიზანი: კომპიუტერზე ჰიდრავლიკური სისტემების მათემატიკური მოდელირების მეთოდების ათვისება

სამუშაოს დავალება:

1. ჰიდრავლიკური სისტემების მათემატიკური მოდელირების ძირითადი პრინციპების გაცნობა
2. კონკრეტული ამოცანების შესრულება

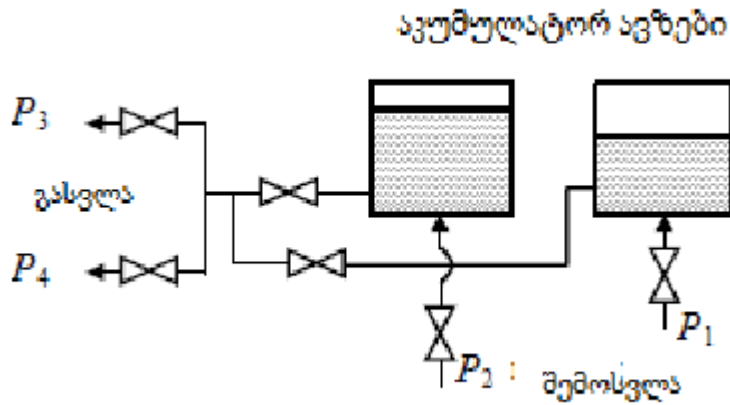
ანგარიშის შინაარსი

1. ზოგადად ჰიდრავლიკური სისტემის მათემატიკური მოდელი.
2. მათემატიკურ მოდელში გამოყენებული ფორმულების ანალიზი.
3. მათემატიკური მოდელის კომპიუტერზე რეალიზების პროგრამის ჩაწერა და შედეგების მიღება.

#### 17.1. მოკლე თეორიული აღწერა

მარტივ ჰიდრავლიკურ სისტემებს (ნახ.17.1) მიეკუთვნება მილგაყვანილობების სქემები, რომელთათვის გამოიყენება შემდეგი დაშვებები:

- ყველა მილში მიედინება სითხის ერთფაზიანი ნაკადი, რომლის ტემპერატურა ყველა უბანზე თანატოლია
- ყველა მილი ერთ დონეზეა განლაგებული, სისტემაში არ არის უკუნაყადი (რეციკლები), არ გათვალისწინდება ადგილობრივი წინააღმდეგობა და მილებში წნევის ცვალებადობა, ანუ ე.წ. მოკლე მილგაყვანილობა განიხილება;
- სისტემაში არის მხოლოდ მუდმივად არაცვალებადი გაშვების უნარის მქონე სარქველები და დახურული სივრცე (აკუმულატორები) რომლებშიც გაზის წნევა იდეალურ კანონს ემორჩილება

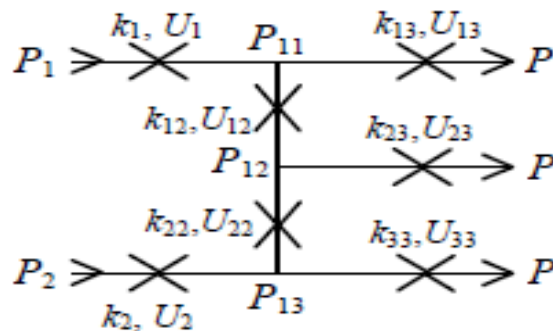


ნახ. 17.1 ორი დახურული აკუმულატორით ჰიდრავლიკური სისტემის სქემატური გამოსახულება

მაგალითი 17.1.

საჭიროა ნახ.17.2 წარმოდგენილი ჰიდრავლიკური სისტემის მოდელირება .

წნევა სისტემის შემავალზე და გამომავალზე მიცემულად ითვლება. ასევე მიცემულია გაშვების უნარის კოეფიციენტების მნიშვნელობები. განისაზღვროს სისტემის თითოელი შტოში ნაკადების ხარჯი, ასევე წნევა განშტოებების წერტილებში ( $P_{11}, P_{12}, P_{13}$ ).



ნახ.17.2

ნახ.17.2 -ში მოცემულ დანადგარში ხარჯი განისაზღვრება განტოლებით

$$U = k \sqrt{P_1 - P_2}$$

სადაც  $P_1$ - წნევა შემავიწროვებელ მოწყობილობამდე,  $-P_2$ - წნევა შემავიწროვებელი მოწყობილობის შემდეგ;  $k$ -შემავიწროვებელი მოწყობილობის გამტარუნარიანობის კოეფიციენტი.

$$U_1 = k_1 \sqrt{P_1 - P_{11}} , \quad (17.1)$$

$$U_2 = k_2 \sqrt{P_2 - P_{13}} , \quad (17.2)$$

$$U_{12} = k_{12} \sqrt{P_{11} - P_{12}} , \quad (17.3)$$

$$U_{22} = k_{22} \sqrt{P_{13} - P_{12}} , \quad (17.4)$$

$$U_{13} = k_{13} \sqrt{P_{11} - P} , \quad (17.5)$$

$$U_{23} = k_{23} \sqrt{P_{12} - P} , \quad (17.6)$$

$$U_{33} = k_{33} \sqrt{P_{13} - P} . \quad (17.7)$$

აუცილებელია დაემატოს 3 განტოლება, იმისათვის რომ განტოლებების სისტემას ჰქონდეს ამონახსენი (10 ცვლადი-10 განტოლება)

ფორმულა

$$U_1 - U_{12} - U_{13} = 0 , \quad (17.8)$$

$$U_{12} + U_{22} - U_{23} = 0 , \quad (17.9)$$

$$U_2 - U_{22} - U_{33} = 0 . \quad (17.10)$$

მათემატიკური დეკომპოზიის არჩევისათვის, რომელიც უცნობი ცვლადების განსაზღვრაში მოგვეხმარება, აუცილებელია აიგოს და გაანალიზდეს მათემატიკური აღწერის განტოლებების სისტემის ინფორმაციული მატრიცა (17.1-17.10)

მათემატიკური აღწერის განტოლებების სისტემის ინფორმაციული მატრიცა წარმოადგენს კვადრატულ მატრიცას, რომლის სტრიქონები განტოლებებისნიომრებს შეესაბამება, სვეტები კი განსაზღვრავი ცვლადების აღნიშვნებს.

შევადგინოთ ინფორმაციული მატრიცა (ცხრ. 17.1)

მატრიცის თითოეული სტრიქონი განსაზღვრულ განტოლებას შეესაბამება. თითოეულ უცნობ ცვლადს შეესაბამება განსაზღვრული სვეტი. ამა თუ იმ განტოლებაში ცვლადის არსებობა ნიშნავს შესაბამისი სტრიქონის შესაბამისი სვეტის გადაკვეტის სიმბოლოს.

მოცემული სიმბოლოები გამოხატავენ შემდეგს:

[+] - საწყისი მიახლოება

<+>- მოცემულ განტოლებაში ცვლადი დანარჩენი ცვლადების ცნობილი მნიშვნელობებით განისაზღვრება

(+) – ცვლადი ირიბად არის განსაზღვრული სხვა განტოლებით

17.2. ჰიდრაული სისტემის სტაციონარული რეჟიმის აღწერი განტოლებათა სისტემის ინფორმაციული მატრიცა 1

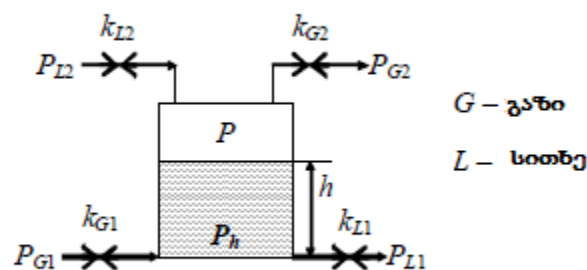
ცხრ.17.1

განტოლების ნომერი	$U_1$	$U_2$	$U_{12}$	$U_{22}$	$U_{13}$	$U_{23}$	$U_{33}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	ამონახსნის მიმდევრობა
1	<+>							[+]			1
2		<+>								(+)	8
3			(+)					(+)	<+>		4
4				(+)					(+)	<+>	7
5					<+>			(+)			2
6						<+>			(+)		5
7							<+>			(+)	9
8	(+)		<+>	(+)							3
9			(+)	<+>		(+)					6
10		<+>		(+)			(+)				10

თუ მიღებული  $[U_2(\text{ამონახსენში } 8) - U_2(\text{ამონახსენში } 10)] > \varepsilon$ , მაშინ შუაზე გაყოფის მეთოდით (ან სხვა ნებისმიერი რიცხვითი მეთოდით) აირჩეს ახალი საწყისი მიახლოება (მოცემული მაგალითისათვის  $P_{11}$ ).

თუ  $[U_2(8) = U_2(10) \text{ ან } U_2(8) - U_2(10)] \leq \varepsilon$ , მაშინ მოდელი განსაზღვრულია.

მაგალითი 9. მოდელირდეს ბუშტის აპარატი, რომლის სქემა გამოსახულია ნახ. 17.3-ზე



ნახ.17.3

პირობა: წნევა ცნობილია შემავალზე და გამომავალზე, ასევე ცნობილია გაშვების უნარის კოეფიციენტები.

განისაზღვროს აპარატით გაზისა და სითხის ხარჯი, წნევა აპარატზე, წვება აპარატის ფსკერზე

$$U_{G1} = k_{G1} \sqrt{P_{G1} - P_h}, \quad (17.11)$$

$$U_{G2} = k_{G2} \sqrt{P - P_{G2}}, \quad (17.12)$$

$$U_{L1} = k_{L1} \sqrt{P_h - P_{L1}}, \quad (17.13)$$

$$U_{L2} = k_{L2} \sqrt{P_{L2} - P}. \quad (17.14)$$

უცნობი ცვლადები  $U_G, U_L, P, P_h, h, \rho$ .

$$P_h = P + \rho gh, \quad (17.15)$$

$$\rho = f(\rho_L, U_G, P), \quad (17.16)$$

სადაც  $\rho_L$  - სითხის სიმჭიდროვეა (const);  $\rho$  - თხევადი გაზური ემულსიის სიმკვრივე.

შევადგინოთ ინფორმაციული მატრიცა (ცხრ.17.2)

17.3 ჰიდრავლიკური სისტემის სტაციონარული რეჟიმის აღმწერი განტოლებათა სისტემის ინფორმაციული მატრიცა2

ცხრ.17.2

განტოლების ნომერი	$U_G$	$U_L$	$P$	$P_h$	$h$	$\rho$	ამოხსნის მიმდევრობა
1	<+>			[+]			1
2	(+)		<+>				2
3		<+>		(+)			3
4		<+>	(+)				6
5			(+)	(+)	<+>	(+)	5
6	(+)		(+)			<+>	4

$$U_L(3) = U_L(4) \quad \text{ან} \quad U_L(3) - U_L(4) < \varepsilon - \text{ ალგორითმის დასრულების პირობა}$$

#### 17.4. ამოცანის შესრულების თანმიმდევრობა

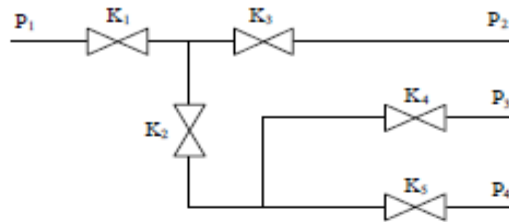
1. დანახარჯის დონე და სისტემის განშტოების წერტილებში განისაზღვროს ჰიდრავლიკური სისტემის შემავიწროებელი დანადგარით (საკონტროლო დავალებები და საწყისი მონაცემები მოცემულია შემდეგ).
2. ჰიდრავლიკური სისტემის კვანძებისათვის განშტოებების წერტილებში წნევის უცნობ

რიცხვებამდე ხარჯების დაანგარიშებისათვის დასრულდეს მიღებული განტოლებების სისტემა.

3. განტოლებების მიღებული სისტემა ამოიხსნას კომპიუტერზე.

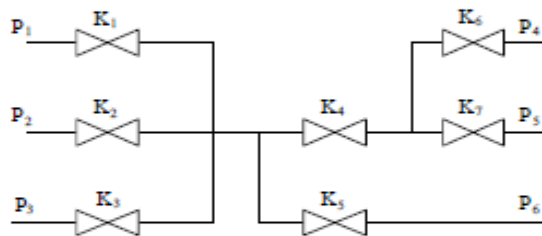
### დავალეების ვარიანტები

1.



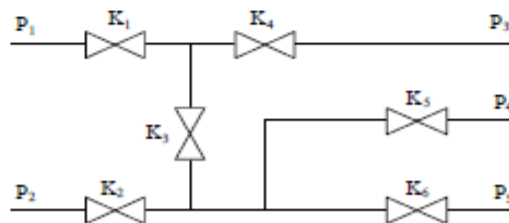
$$K_1 = 0,75; K_2 = 2,2; K_3 = 1,9; K_4 = 0,3; P_1 = 4,7; P_2 = 2,8; P_3 = 1,9; P_4 = 0,5.$$

2.



$$K_1 = 0,6; K_2 = 1,2; K_3 = 2,5; K_4 = 3; K_5 = 0,8; K_6 = 0,8; K_7 = 1,5; \\ P_1 = 8; P_2 = 3; P_3 = 4,5; P_4 = 5; P_5 = 2; P_6 = 1.$$

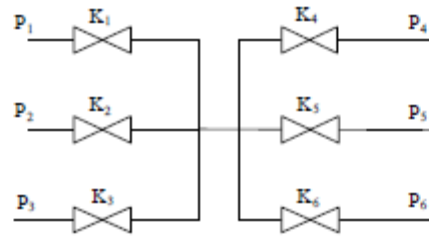
3.



$$K_1 = 2,5; K_2 = 1,4; K_3 = 2; K_4 = 1,3; P_1 = 7; P_2 = 8; P_3 = 2,2; P_4 = 3,5; P_5 = 2.$$



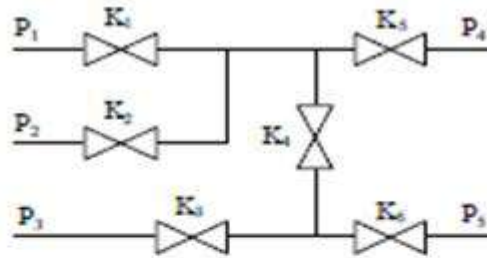
4.



$$K_1 = 1,6; K_2 = 0,8; K_3 = 2,5; K_4 = 2; K_5 = 1,3; K_6 = 1,4;$$

$$P_1 = 7; P_2 = 4; P_3 = 3,5; P_4 = 2; P_5 = 2,4; P_6 = 1,2.$$

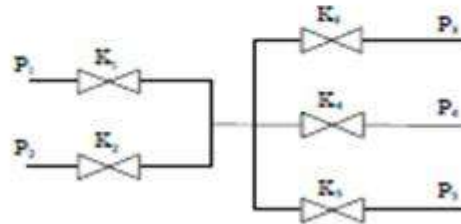
5.



$$K_1 = 2,9; K_2 = 1,8; K_3 = 1,5; K_4 = 2,5; K_5 = 4; K_6 = 3;$$

$$P_1 = 8; P_2 = 5; P_3 = 4; P_4 = 3; P_5 = 2.$$

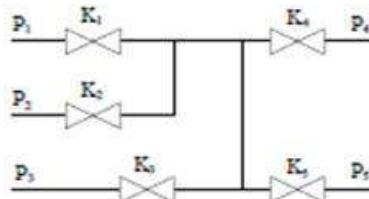
6.



$$K_1 = 2,2; K_2 = 1,6; K_3 = 0,5; K_4 = 1,1; K_5 = 0,3;$$

$$P_1 = 5; P_2 = 3; P_3 = 1,5; P_4 = 2; P_5 = 1,4.$$

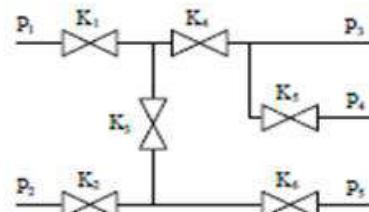
7.



$$K_1 = 2,3; K_2 = 1,2; K_3 = 1,4; K_4 = 1,5; K_5 = 3;$$

$$P_1 = 5; P_2 = 6; P_3 = 4; P_4 = 2; P_5 = 3.$$

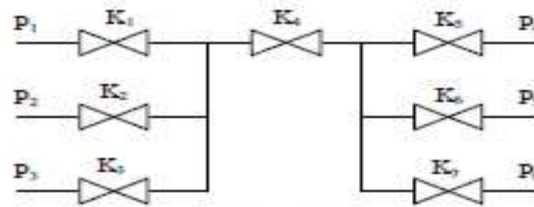
8.



$$K_{11} = 1; K_{12} = 1,5; K_3 = 0,6; K_4 = 1,5; K_5 = 0,5; K_6 = 0,8;$$

$$P_1 = 7; P_2 = 5; P_3 = 1,5; P_4 = 2; P_5 = 1,5.$$

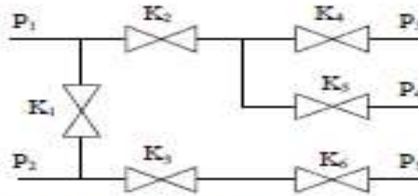
9.



$$K_1 = 0,7; K_2 = 0,4; K_3 = 0,8; K_4 = 1,5; K_5 = 2; K_6 = 1; K_7 = 2,1;$$

$$P_1 = 3; P_2 = 2,5; P_3 = 2; P_4 = 1; P_5 = 0,5; P_6 = 0,9.$$

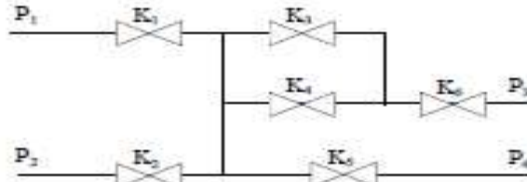
10.



$$K_1 = 0,9; K_2 = 2,4; K_3 = 1,8; K_4 = 1,5; K_5 = 2; K_6 = 1;$$

$$P_1 = 9; P_2 = 6; P_3 = 4; P_4 = 5; P_5 = 4.$$

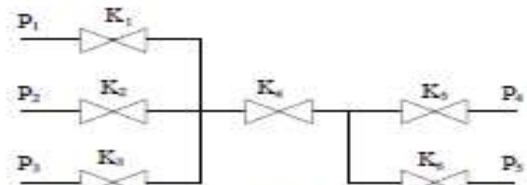
11.



$$K_1 = 1,4; K_2 = 2,3; K_3 = 0,4; K_4 = 1; K_5 = 3,8; K_6 = 2,1;$$

$$P_1 = 5; P_2 = 3; P_3 = 1; P_4 = 2.$$

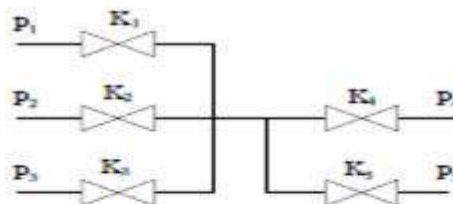
12.



$$K_1 = 2,7; K_2 = 1,4; K_3 = 1,8; K_4 = 2,5; K_5 = 1,8; K_6 = 0,8;$$

$$P_1 = 4; P_2 = 3,5; P_3 = 2; P_4 = 1; P_5 = 1,5.$$

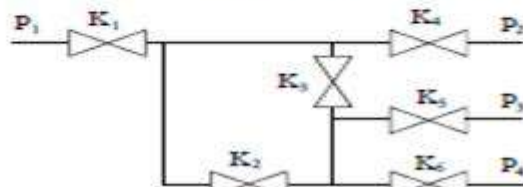
13.



$$K_1 = 2,2; K_2 = 2,4; K_3 = 1,2; K_4 = 0,8; K_5 = 2,8;$$

$$P_1 = 3; P_2 = 5,5; P_3 = 2; P_4 = 1; P_5 = 1,5.$$

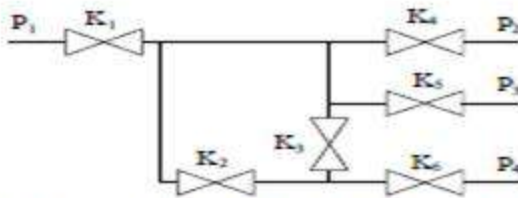
14.



$$K_1 = 0,8; K_2 = 1; K_3 = 1,2; K_4 = 1,5; K_5 = 2; K_6 = 1,4;$$

$$P_1 = 10; P_2 = 2; P_3 = 4; P_4 = 5.$$

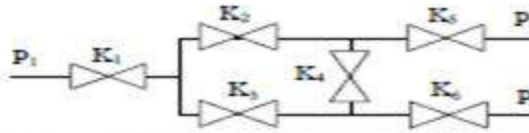
15.



$$K_1 = 1,8; K_2 = 1; K_3 = 2,2; K_4 = 0,5; K_5 = 2; K_6 = 1,4;$$

$$P_1 = 7; P_2 = 4; P_3 = 3; P_4 = 2.$$

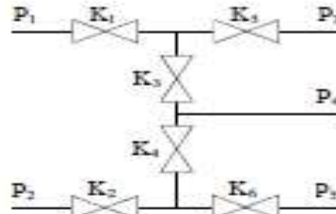
16.



$$K_1 = 0,9; K_2 = 1,1; K_3 = 1,4; K_4 = 2,5; K_5 = 2; K_6 = 2,4;$$

$$P_1 = 7,8; P_2 = 3,6; P_3 = 4.$$

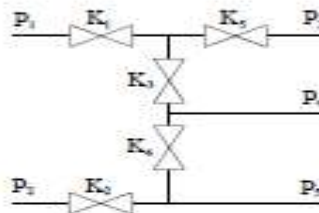
17.



$$K_1 = 2,6; K_2 = 2,1; K_3 = 0,4; K_4 = 1,5; K_5 = 1; K_6 = 2,4;$$

$$P_1 = 4; P_2 = 2,6; P_3 = 1; P_4 = 1,5; P_5 = 0,5.$$

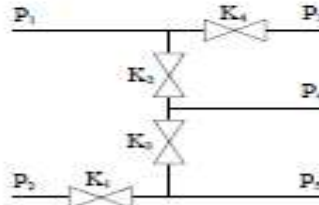
18.



$$K_1 = 1,6; K_2 = 2,1; K_3 = 3,4; K_4 = 1,5; K_5 = 1;$$

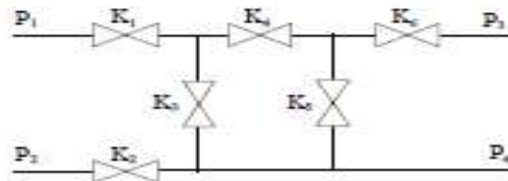
$$P_1 = 5; P_2 = 7,6; P_3 = 2; P_4 = 1,5; P_5 = 3,5.$$

19.



$$K_1 = 0,6; K_2 = 1,2; K_3 = 2,4; K_4 = 1,8; P_1 = 4; P_2 = 3; P_3 = 2; P_4 = 1; P_5 = 0,5.$$

20.



$$K_1 = 1,6; K_2 = 1,1; K_3 = 1,4; K_4 = 2,5; K_5 = 1; K_6 = 1,4; P_1 = 5; P_2 = 3,6; P_3 = 2; P_4 = 1,5.$$

### 17.5. საკონტროლო კითხვები

1. რა ძირითადი დაშვებები მიიღება მარტივი ჰიდრაულიკური სისტემის კომპიუტერული მოდელირების დროს?
2. როგორ აღიწერება სითხის ნაკადის მოძრაობა სარქველის გავლით?
3. როგორ და რა მიზნით იგება მათემატიკური აღწერის სისტემის განტოლებების ინფორმაციული მატრიცა?
4. რა მიზნით ტარდება მოდელის პარამეტრული მგრძობელობის ანალიზი?
5. როგორ ჩატარდეს კომპიუტერული მოდელის პარამეტრული მგრძობელობის ანალიზი?

## თავი 18

### ორთქლის მიღების პროცესის მოდელირება

თავში განხილულია რთული ტექნოლოგიური პროცესების კომპიუტერზე მათემატიკური მოდელების აგების და კომპიუტერზე რეალიზების საკითხები.

#### 18.1. შესასრულებელი სამუშაოს გეგმა

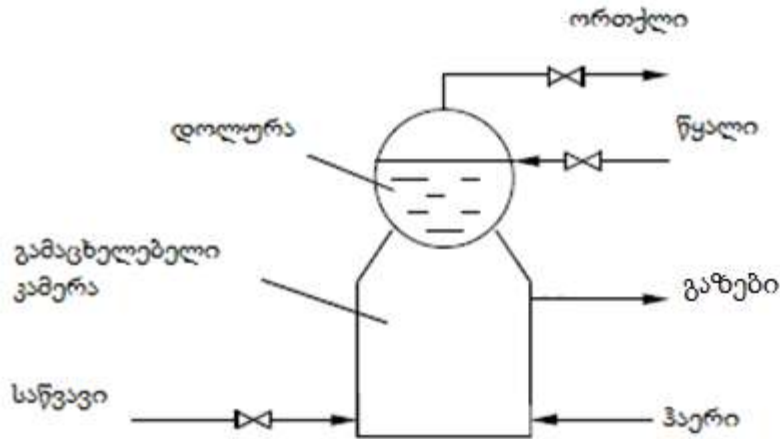
1. ბალანსური განტოლებების საფუძველზე მათემატიკური მოდელების აგების ძირითადი პრინციპების გაცნობა.
2. კონკრეტული ამოცანების შესრულება ანგარიშის შინაარსი:
  1. დავალების ვარიანტი
  2. პროცესის მათემატიკური მოდელი
  3. ობიექტის შესახებ მიღებული სტატისტიკური და დინამიკური მახასიათებლების შედეგების ანალიზი
  4. პროპორციულ-ინტეგრალურ-რეგულატორი (პირ) ანალოგურ-ციფრული გარდამქმნელის (აცგ) აწყობის შედეგების განსაზღვრა.
  5. აცგ-ში გარდამავალ პროცესების დარეგულირების პროგრამების ტექსტები
  6. რეგულატორის გამართვის პროცესის ზემოქმედება (პირ)-ის გარდამავალ პროცესებზე.

#### 18.2. მოკლე თეორიული დებულებები

ორთქლის სითბური ენერგია ფართოდ გამოიყენება გათბობისათვის, ვენტილაციასა და მოსახლეობისა და სამრწველო შენობების თბილი წყლით მომარაგებისათვის.

სამუშაოს რეჟიმის შერჩევისათვის, ორთქლის წარმოების დროს მიმდინარე პროცესების ავტომატური რეგულირების სისტემის ასაგებად აუცილებელია ჩატარდეს

ტექნოლოგიური პროცესის შემავალი და გამომავალი ნაკადების ანალიზი და მოხდეს ობიექტის მართვის მათემატიკური აღწერა.

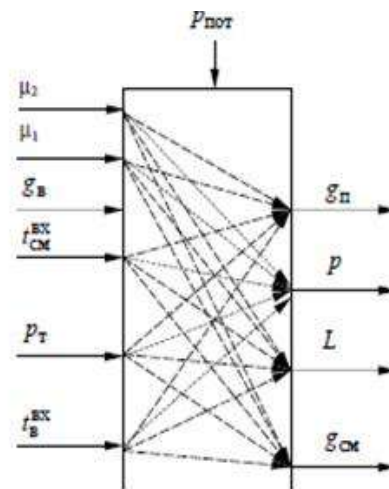


ნახ.18.1 ორთქლის ქვების გამარტივებული სქემა

განვახორციელოთ ორთქლის წარმოების პროცესის, როგორც მართვის ობიექტის ანალიზი.

ორთქლის წარმოების პროცესის ძირითად ხარისხოვან პარამეტრად ითვლება მაგენერირებელი ორთქლის  $P$  წნევა. გამომავალ მოცემული პროცესისათვის შემავალ ზემოქმედებებს (მარეგულირებელი და შემამფოთებელი). მოცემული პროცესისათვის საწვავის მიწოდების ხაზზე სარქველის გამტარიანობის მაჩვენებელია  $\mu_2$  წარმოადგენენ სარქველის გამტარიანობა საწვავის მიწოდების ხაზზე, სარქველის გამტარიანობა

$\mu_1$  ორთქლის მიწოდების ხაზზე (ან  $g_{\pi}$  გამოსაყენებელი ორთქლის ხარჯი), მისაწოდებელი საწვავი ნარევის  $t_{CM}^{BX}$  და მკვებავი ტემპერატურა  $t_B^{BX}$  ტემპერატურები, ხაზზე  $p_r$  საწვავის მიწოდების წნევა და გამოყენების ხაზში  $p_{\text{ორთქლი}}$  ორთქლის წნევა



ნახ.18.2 კავშირი შემავალ და გამომავალ პარამეტრებს შორის

მარეგულირებელ ზემოქმედებად შეიძლება შეირჩეს სარქველის გამტარიანობა საწვავის მიწოდების ხაზზე, სხვა ზემოქმედება წარმოადგენს შემფოთებას.

ორთქლის წარმოების პროცესზე ძირითად შემფოთებას წარმოადგენს წნევა ორთქლის მოხმარების ხაზზე

ჩატარებული ანალიზის საფუძველზე პროცესი მათემატიკურად აღიწერება.

მათემატიკური აღწერის შემუშავებისას შეიძლება შემდეგი დაშვებები:

1. წყლისა და ორთქლის სივრცის მოცულობა შეკრებილი პარამეტრებით ობიექტად ითვლება და მოცულობაში იდეალური შერევა მიიღება.
2. უგულველიყოფა გაცხელებული ზედაპირის სითბური ტევადობისა.
3. ორთქლის გარემო იდეალურ გაზად წარმოიჩინდება
4. დუღილის ტემპერატურაზე ნაკლებ ტემპერატურაზე ორთქლწარმოქმნა არ ხდება
5. სითბოს დაკარგვა ვერ ხდება გარეთ შემზღუდავის მეშვეობით
6. წყლისა და ორთქლის ტემპერატურები ერთმანეთის ტოლია
7. მუდმივია წყლის, ორთქლისა და გაზის ნაერთის სითბური ტევადობის ხვედრითი წონა
8. წვის კამერაში წნევა მუდმივია

შევადგინოთ ორთქლის წარმოების პროცესის ბალანსური განტოლებები.

ქვაბში წყლის მატერიალური ბალანსის განტოლებას შემდეგი სახე

$$\frac{dG_B}{d\tau} = g_B - g_{II}^H, \quad (18.1)$$

სადაც  $G_B$  - არის ქვაბში წყლის მასა კგ-ებში;  $g_B, g_{II}^H$  - შესაბამისად მკვებავი შემავალი და მიღებული ორთქლის ხარჯები კგ/სმ-ში.

ქვაბის დოლურაში ენერგეტიკული ბალანსის მართვას აქვს სახე:

$$c_B \frac{d(G_B t_B)}{d\tau} = kF(t_K - t_B) + g_B c_B t_B^{BX} - g_{II}^H i_{II}, \quad (18.2)$$

სადაც  $G_B$  - არის ქვაბში წყლის მასა კგ-ებში;  $C_B$  - წყლის ხვედრითი მოცულობა ჯ/(კგ/სმ<sup>2</sup>);

$t_B$  - ქვაბის დოლურაში წყლის ტემპერატურა C<sup>0</sup>;  $t_B^{BX}$  - მკვებავი წყლის ტემპერატურა C<sup>0</sup>;  $t_K$  -

ტემპერატურა გამაცხელებელ კამერაში  $C^0$ ;  $k$  – გახურების ზედაპირის სითბოგაცემის კოეფიციენტი  $\text{ბტ}/(\text{მ}^2 \text{C}^0)$ ;  $F$  – სითბოგაცემის ფართობი  $\text{მ}^2$ -ში;  $g_{II}^H$  – ორთქლის ხარჯი  $\text{კგ/სმ}$ ;  $i_{II}$  – ორთქლის ენტალპია,  $\text{ჯ/კგ}$ . ავიღოთ (65)-ის დიფერენციალი და ჩავსვათ (64)-ში.

$$c_B \frac{d(G_B t_B)}{d\tau} = c_B \frac{dG_B}{d\tau} t_B + c_B G_B \frac{dt_B}{d\tau} = c_B (g_B - g_{II}^H) t_B + c_B G_B \frac{dt_B}{d\tau}.$$

მაშინ გამოსახულება (65) ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$c_B G_B \frac{dt_B}{d\tau} = kF (t_K - t_B) - g_B c_B (t_B - t_B^{ex}) - g_{II}^H (i_{II} - c_B t_B).$$

იმის გათვალისწინებით, რომ გარდაქმნის ფარდობითი სიმბურვალის ცვლადი  $\lambda$  ტოლია:

$$\lambda = i_{II} - c_B t_B.$$

ენერგეტიკული ბალანსის განტოლება წყლისათვის დოლურაში ჩაიწერება ასე:

$$c_B G_B \frac{dt_B}{d\tau} = kF (t_K - t_B) - g_B c_B (t_B - t_B^{ex}) - g_{II}^H \lambda. \quad (18.3)$$

ქვაბში ორთქლის მატერიალური ბალანსის განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{dG_{II}}{d\tau} = g_{II}^H - g_{II}, \quad (18.4)$$

სადაც  $G_{II}$  – არის ორთქლის მასა ორქლის სივრცეში  $\text{კგ}$ -ებში;  $g_{II}$  – წართმეული ორთქლის მასა  $\text{კგ/სმ}$ -ებში.

მიღებული დაშვებების საფუძველზე ორთქლი ექვემდებარება იმ დაშვებებს რასაც ითვალისწინებს იდეალური გაზის მენდელეევი-კლაპეირონის კანონი:

$$pV_{II} = \frac{G_{II}}{M} R (t_B + 273), \quad (18.5)$$

სადაც  $p$  – ორთქლის წნევა ქვაბში;  $V_{II}$  – ორთქლის სივრცის მოცულობა  $\text{მ}^3$ -ში;  $M$  – წყლის მოლური მასა;  $R$  – გაზის უნივერსალური მუდმივა.

ორთქლის მოცულობა სივრცული მოცულობასთან ( ანუ წყლის მასით) ქვაბში გამოისახება დამოკიდებულებით:

$$V_{II} = V_O - V_B = V_O - \frac{G_B}{\rho_B} \quad (18.6)$$

სადაც  $V_O, V_B$  - ქვაბის და ქვაბში წყლის მოცულობა მ<sup>3</sup>.  $\rho_B$  - წყლის სიმკვრივე , კგ/მ<sup>3</sup>.  
წყლისა და ორთქლის დუდილის ტემპერატურა არის წნევის ფუნქცია:

$$t_B = f(p) \quad (18.7)$$

ორთქლის ხარჯი სარქველიდან შეიძლება აღიწეროს შემდეგი გამოსახულებით:

$$g_{II} = \mu_1 \sqrt{p^2 - p_{IIOT}^2} \quad (18.8)$$

სადაც  $\mu_1$  - არის სარქველის გამტარუნარიანობა.

ჰაერისა და გაზის გარემოში ენერგეტიკული ბალანსის განტოლება , რომელიც გათვალისწინებულია წვის საკანში ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$c_K G_K \frac{dt_K}{dt} = -kF(t_K - t_B) - g_{CM} c_K (t_K - t_{CM}^{BK}) + g_{CM} r, \quad (18.9)$$

სადაც  $c_K, G_K$  - არიან შესაბამისად ფარდობითი სითბოტევადობა და ჰაერისა და გაზის გარემოს მასა, წვის საკანში;  $g_{CM}$  - საწვავის ხარჯი;

r- საწვავის წვის ფარდობითი სიმბურვალე.

წვის საკნის ტემპერატურული მოცულობა, საგრძნობლად ნაკლებია გასაცხელებელი წყლის ტემპერატურულ მოცულობაზე. ამიტომ ტემპერატურის დინამიური ცვლილება  $t_K$  - ში შეიძლება უგულებელიყოს. ამ შემთხვევაში (9) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$-kF(t_K - t_B) - g_{CM} c_K (t_K - t_{CM}^{BK}) + g_{CM} r = 0 \quad (18.10)$$

საწვავის ხარჯი აგრეთვე შეიძლება აღიწეროს დამოკიდებულებით:

$$g_{CM} = \mu_2 \sqrt{p_T^2 - p_K^2}, \quad (18.11)$$

სადაც  $\mu_2$  - არის სარქველის გამტარუნარიანობა საწვავის მიწოდების ხაზზე.

**18.3. მართვის ობიექტის იმიტაციური კვლევა .** საწარმოების ავტომატიზაციის პროცესში სწორი გადაწყვეტილების მიღების უზრუნველსაყოფად განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია სარეგულირებელი ობიექტის შესახებ სტატისტიკური და დინამიკური მახასიათებლების გათვალისწინება, რაშიც მის მათემატიკურ აღწერას ვიყენებთ.



ორთქლის წარმოების პროცესის გამოსასვლელი პარამეტრების მგრძნობელობის ანალიზისას, შემავალი პარამეტრების ცვლილების პირობებში, ამასთან მარეგულირებელი ზემოქმედებების შერჩევისათვის უნდა აგებულ იქნას პროცესის სტატისტიკური მახასიათებლები.

ამ პროცესის გახორციელება მიმდინარეობს შემდეგნაირად განტოლებებში (18.1), (18.11) დიფერენციალურ განტოლებებში წარმოებულებები გავანულოთ, რის შედეგადაც ვიღებთ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$g_B - g_{\Pi}^{\text{H}} = 0, \quad (18.12)$$

$$kF (t_K - t_B) - g_B c_B (t_B - t_B^{\text{BK}}) - g_{\Pi}^{\text{H}} \lambda = 0, \quad (18.13)$$

$$g_{\Pi}^{\text{H}} - g_{\Pi} = 0, \quad (18.14)$$

$$pV_{\Pi} = \frac{G_{\Pi}}{M} R (t_B + 273), \quad (18.15)$$

$$V_{\Pi} = V_0 - V_B = V_0 - \frac{G_B}{\rho_B}; \quad (18.16)$$

$$t_B = f(p); \quad (18.17)$$

$$g_{\Pi} = \mu_1 \sqrt{P^2 - P_{\text{ნორ}}^2}; \quad (18.18)$$

$$-kF (t_K - t_B) - g_{\text{CK}} c_K (t_K - t_{\text{CK}}^{\text{BK}}) + g_{\text{CK}} r = 0; \quad (18.19)$$

$$g_{\text{CK}} = \mu_2 \sqrt{P_{\text{I}}^2 - P_K^2}. \quad (18.20)$$

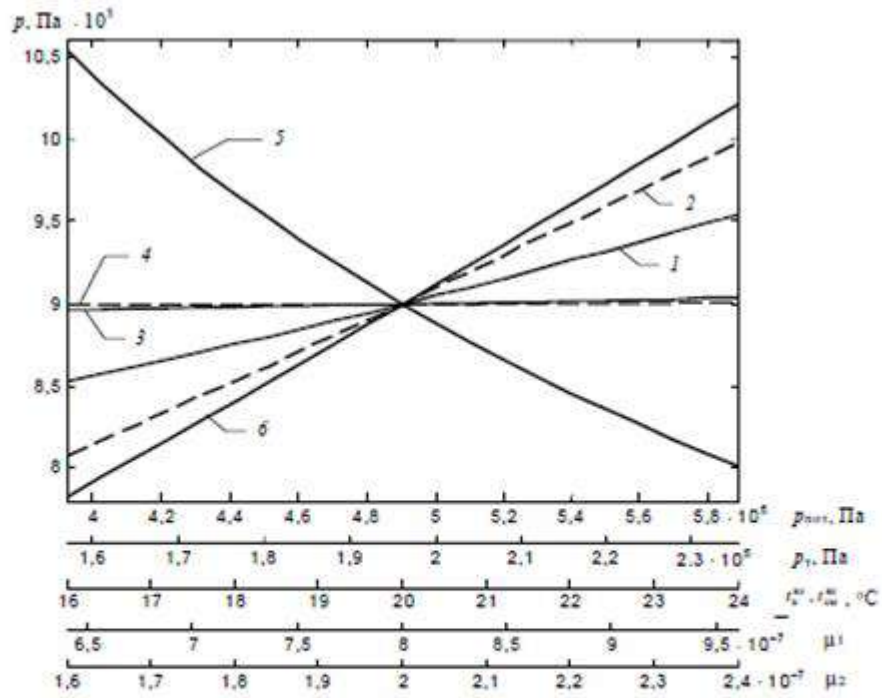
მართვის ობიექტის სტატისტიკური მახასიათებლების მისაღებად შესავალი პარამეტრები უნდა ვცვალოთ ნორმალურ რეჟიმში მათი მნიშვნელობის  $\pm 20\%$  დიაპაზონში.

სტატისტიკურ მახასიათებელთა გრაფიკი მოცემულია ნახ.16-ზე.

სტატისტიკურ მახასიათებელთა ანალიზის საფუძველზე შეიძლება გავაკეთოთ დასკვნა, რომ წნევა ყველაზე მგრძნობიარეა მილსადენების სარქველების გამტარუნარიანობისადმი, მილსადენებზე საწვავის მიწოდებასა, აგრეთვე ორთქლის გამოცალკევებისას საკანში. შესაბამისად სარქველების გამტარუნარიანობა შეიძლება გამოყენებულ იქნას მარეგულირებელი ზემოქმედებისათვის. საწვავის ხაზზე წნევა შეიძლება მუდმივად ჩაითვალოს. ძირითადი აღშფოთება მოსალოდნელია გამოსაყენებელი ორთქლის წნევისგან, რადგან ქვაბში ორთქლის წნევის ცვლილების მგრძნობელობა ამ პარამეტრისადმი მაქსიმალურია.

საკნის (ქვაბის) დინამიური მახასიათებლების ანალიზი განვახორციელოთ გარდამავალი ფუნქციებით, რომლებიც აგებული არიან განსაკუთრებულად ძლიერ

ზემოქმედებაზე  $\mu_2$  (ნახ.18.3). ამასთან შესასვლელი ზემოქმედებები იცვლებოდა 5% გადახრით ნომინალიდან.



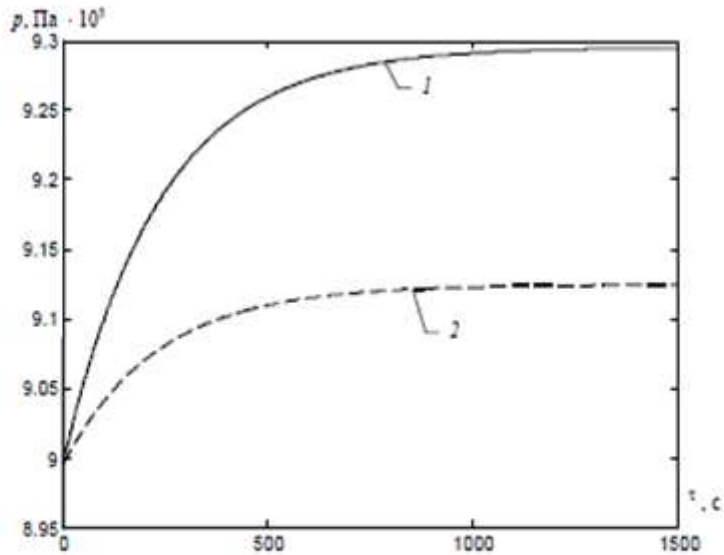
ნახ.18.3 ორთქლის საკნის (ქვაბის) სტატისტიკური მახასიათებლები

1 –  $p(p_{tot})$ ; 2 –  $p(p_{\tau})$ ; 3 –  $p(t_{\text{წ}}^{\text{წ}})$ ; 4 –  $p(t_{\text{ცმ}}^{\text{წ}})$ ; 5 –  $p(\mu_1)$ ; 6 –  $p(\mu_2)$

**18.4. საკანში (ქვაბში) წნევის რეგულირების ერთკონტურიანი სისტემის რეგულირების პროცესის მოდელირება.**

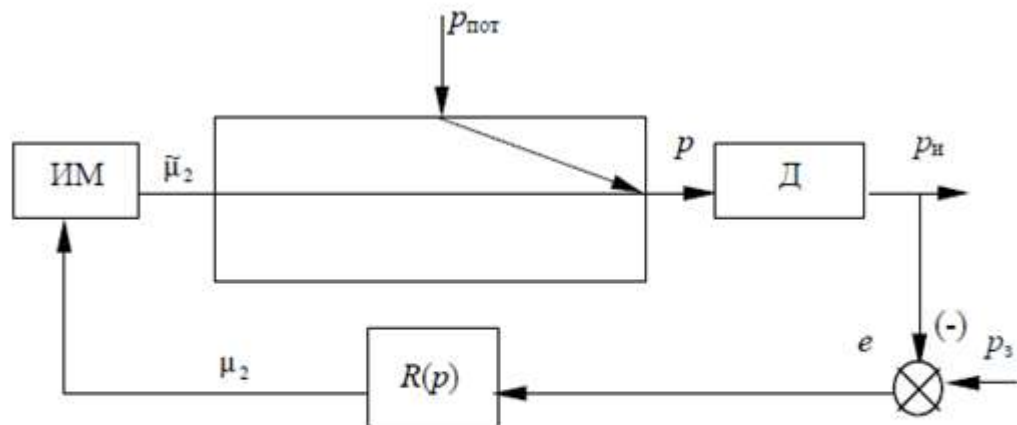
გარდამავალი ფუნქციების ანალიზის შედეგად შეიძლება გაკეთდეს შემდეგი დასკვნები:

- ობიექტს გააჩნია თვითგასწორების უნარი;
- ერთი მდგომარეობიდან მეორე მდგომარეობაში გადასვლის დრო 1300 წმ-ია. ერთკონტურიანის აცვ-ს სქემის ორთქლის წნევის სტუქტურა მოცემულია ნახ.18.5-ზე.



ნახ.18.4 გარდამავალი ფუნქციები საკნის (ქვების) ცვლილებებისას

1 -  $\mu_2$ ; 2 -  $p_{\text{ნორ}}$



ნახ.18.5 ორთქლის წნევის რეგულირების სისტემის სქემა

სადაც  $x$  — ობიექტზე შესასვლელია;  $p$  -წნევა გამოსასვლელზე რეგულირებადი სისდიდე;  $p_3$  - ტემპერატურის მოცემული მნიშვნელობა;  $p_u$  - ტემპერატურის გაზომილი მნიშვნელობა;  $\ell$  -რეგულირების შეცდომა.

გარდა ამისა რეგულირების სისტემაში შედიან მგრძობიარე ელემენტი (Д). შესრულებადი მექანიზმი მარეგულირებელი ორგანოთი (ИМ) და რეგულატორი (R). ამიტომ (აცვ)-ს მათემატიკურ აღწერაში, შედიან მომწოდებლის, შემსურებელი მექანიზმისა და რეგულატორის აღწერის მახასიათებლები.

მომწოდებლის და შემსურებელი მექანიზმის დინამიური მახასიათებლები მოიცემიან შემდეგი დიფერენციალური განტოლებებით:

$$T_{II} \frac{dp_{II}}{dt} + p_{II} = p; \quad (18.21)$$

$$T_{IIM} \frac{d\tilde{\mu}_2}{dt} + \tilde{\mu}_2 = \mu_2, \quad (18.22)$$

სადაც  $T_{II}, T_{IIM}$  - ს წნევის მაჩვენებლისა და შემსრულებელი მექანიზმისა დროითი მუდმივები;  $p_{II}$  - II-ს გაზომვის წნევა;

- სარქველის რეალური გამტარიანობა საწვავის მიწოდების ხაზზე.

$\tilde{\mu}_2$

წნევების მომწოდებლის დროითი მუდმივაა  $T_{II} = 0,5$  წთ, ხოლო შემსრულებელი მექანიზმისა  $T_{IIM} = 1$  წთ.

ერთკონტურიანი (აცვ)-ს ანგარიში დაიყვანება  $R_1(p)$  ფუნქციის აგების პარამეტრების განსაზღვრაზე. საწარმოო ობიექტების ავტომატიზაციის პრაქტიკაში ფართო გავრცელება ჰპოვეს ПИ რეგულატორებმა. ორთქლის საკანში (ქვაბში) წნევის რეგულირებისათვის ПИ რეგულატორის განტოლებას აქვს სახე:

$$\mu_2 = \mu_2^{\text{НОМ}} + K_p \left( e + \frac{1}{T_{II}} \int e dt \right), \quad (18.23)$$

სადაც  $K_p, T_{II}$  - რეგულატორის აგების პარამეტრები;  $e$  - რეგულირების შეცდომაა.

რეგულირების შეცდომა განისაზღვრება, როგორც სხვაობა ქვაბში მოცემულ და გაზომილ ტემპერატურებს შორის:

$$e = p_3 - p_{II}.$$

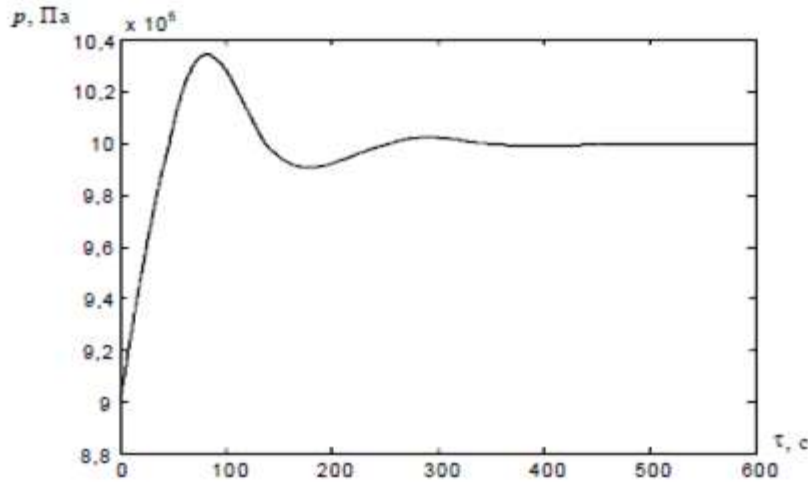
რეგულირების მოცემული წესისთვის ერთკონტურიანი (აცვ)-ს ანგარიში დაიყვანება ხარისხის რომელიმე კრიტერიუმის მიხედვით ოპტიმუმის მოძებნაზე სისტემის მდგრადობის შენარჩუნების გათვალისწინებით.

ძალიან ხშირად ხარისხის კრიტერიუმის როლში გამოდის ინტეგრალურ-კვადრატული კრიტერიუმი მიღვეადობის შეზღუდვის გათვალისწინებით:

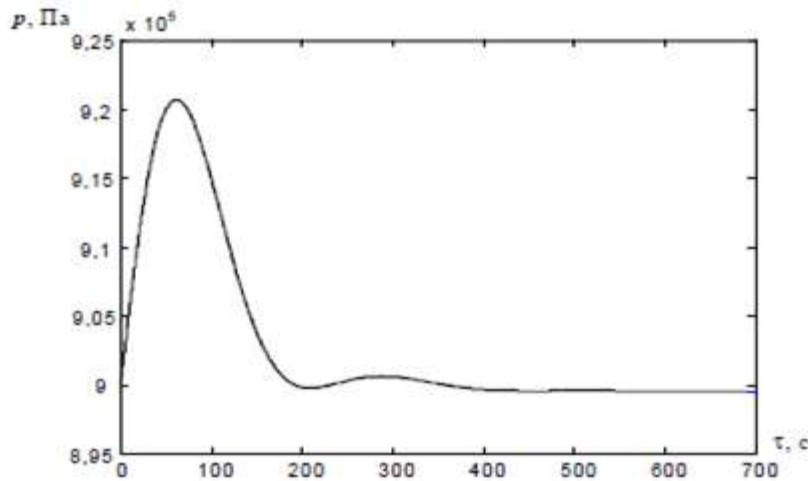
$$I = \int_0^{\tau_{\text{KOH}}} e^2 d\tau \rightarrow \min_{K_p, T_H}$$

სადაც  $\tau_{\text{KOH}}$  -არის რეგულირების დრო.

მე-19 და მე-20 ნახაზებზე ნაჩვენებია ერთკონტურიანი (აცგ)-ს გრაფიკები რეგულატორის მოძებნილ აწყობაზე. ამასთან რეგულატორში ორთქლის რეგულატორის წნევა იცვლება  $8,995 \cdot 10^5$  პასკალიდან  $9,995 \cdot 10^5$  პასკალამდე.



**ნახ.18.6 აცგ-ს გარდამავალი პროცესი დავალების ცვლილებისას**



**ნახ.18.7 აცგ-ს გარდამავალი პროცესი აღმუშავების შემოქმედების პირობებში**

**18.5. აცგ-ში გარდამავალი პროცესების ხარისხოვანი მაჩვენებლების ანალიზი.**

რეგულირების ხარისხი რიცხვებითი სახით შეფასებული შეიძლება იქნას ხარისხის პირდაპირი მაჩვენებლებით, რომლებიც განისაზღვრებიან უშუალოდ აცგ-ს გარდამავალი პროცესების გრაფიკებიდან.

ცხრილში 18.1 მოცემულია რეალური მაჩვენებლები აცგ-ს რეგულირების ( ПИ რეგულატორების შემთხვევაში).

**ცხრ.18.1 რეგულირების პროცესის ხარისხის პირდაპირი მაჩვენებლები**

გარე ზემოქმედება	$t_{per}, c$	$\xi$	$X_{st}$	$\psi$
აღშფოთება	420	–	0,1	0,86
დავალების ცვლილება	350	0,035	–	0,91

ქვემოთ მოცემულია აცგ-ს გარდამავალი პროცესების MATLAB პროგრამები

**18.6. სამუშაოს შესრულების თანმიმდევრობა**

1. გამოვიკვლიოთ პროცესის სტატისტიკური და დინამიკური მახასიათებლები ქვაბში ორთქლის მიღების პროცესისა. მოცემული ვარიანტისათვის.
2. განვსაზღვროთ რეგულატორის პარამეტრები და ავაგოთ აცგ-ს გარდამავალი პროცესები.
3. გამოვიკვლიოთ რეგულატორის გამართვის პარამეტრების ზემოქმედება გარდამავალ პროცესებზე. ამისათვის საჭიროა რეგულატორის აწყობილი ი მნიშვნელობების ცვლილება , გაზრდის ან შემცირების მიმართულებით

**18.7. აცგ-ს გარდამავალი პროცესების მათემატიკური მოდელის შესაბამისი განტოლე**

ბების ამოხსნა MATLAB პროგრამით.

```

clc % ბრძანებითი სტრიქონის გაწმენდა
dt=0.05; % ინტეგრირების დროითი ბიჯი
tk=1000; % ინტეგრირების შუალედის ბოლო
t=[0:dt:tk]; % დროის ვექტორი
n=length(t); % დროითი ვექტორის განზომილება

```

## % საწყისი მნიშვნელობები

```
t_v(1)=173.9754;  
t_k(1)=278.1349;  
p(1)=8.9951e+005;  
M_v(1)=2.5e+003;  
pi(1)=p(1);  
M_p(1)=32.6929;
```

% სითბო ფიზიკური მახასიათებლების აღწერა

```
c_v=1*4.193e3; % წყლის ფარდობითი სითბოტევადობა  
c_k=1500; % აირგაზური სივრცის ფარდობითი სითბოტევადობა  
M=18e-3; % წყლის მოლური მასა  
R=8.31; % უნივერსალური გაზის მუდმივა  
ro_p=8.4; % ორთქლის სიმკვრივე  
ro_k=1; % აირგაზური სივრცის სიმკვრივე  
ro_v=1000; % წყლის სიმკვრივე  
r_t=3.6e7 % საწვავის წვის ფარდობითი სიმბურვალე  
Lamda=1945e3; % ორთქლწარმოქმნის ფარდობითი სიმბურვალე
```

% ორთქლის საკანის მახასიათებლების აღწერა

% და მნიშვნელობები შესასვლელზე

```
V_0=10; % ორთქლის საერთო მოცულობა  
K=1500; % სითბოგადაცემის კოეფიციენტი  
F=10; % სითბოგადაცემის ზედაპირი  
G_v_n=0.6032; % ნორმალურ რეჟიმში წყლის ხარჯი  
t_v_vx=20; % წყლის ხარჯი ნომინალურ რეჟიმში  
t_t_vx=20; % შესასვლელზე გაზებიგასვლის ტემპერატურა  
p_t=2*9.81e4; % შესასვლელზე გაზებიგასვლის წნევა  
p_pot=5*9.81e4; % ორთქლის წნევა მოხმარების ხაზზე  
p_k=1*9.81e4; % წნევა წვის საკანში
```

% სარქველთა გამტარიანობა

```
mu1=0.0000008;
```

```
mu2_n=0.0000002;
```

% გაჯერებული ორთქლის მახასიათებლები

```
xx=[0.98 0.99 1 1.01 1.013 1.02 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20 40]*1e5;
```

% გაჯერებული ორთქლის წნევა

```
yy=[99.23 99.46 99.7 99.93 100 100.27 120 133 143 151 158 164 169 174 179 212  
250]; % გაჯერებული ორთქლის ტემპერატურა
```

% ПИ რეგულატორების ინტეგრალური შემადგენლების განსაზღვრის

```

% ცვლადები
sum=0;
sum2=0;
% ПИ რეგულატორების აწყობა
Kp2=0.000000000002;
Ti2=100;

Kp=20;
Ti=20;
p_z=9.9951e+005;      % ორთქლის წნევის მოცემული მნიშვნელობა
M_v_z=2500;          % წყლის ნომინალური (მოცემული) მასა

%HM გადამწოდის მანძისათებლები
Td=10;                % გადამწოდის დროის მუდმივა
Tim=20;               %HM -ის დროის მუდმივა
% ეილერის მეთოდით განტოლების ამოხსნის ციკლი
for i=2:n
    % ქვაბში წყლის ნომინალური მასის შენარჩუნება

    eps=M_v(i-1)-M_v_z; % რეგულირების შეცდომა
    sum=sum+eps;
    G_v=G_v_n-Kp*(eps+sum*dt/Ti); % რეგულატორის განტოლება

    % შეზღუდვა წყლის ხარჯზე
    if G_v<=0
        G_v=0;
    end
    if G_v>=5;
        G_v=5;
    end

    % წყლის ტემპერატურის მიხედვით ორთქლის წნევის გამოთვლა

    p(i-1)=interp1(yy,xx,t_v(i-1),'linear');

    % წნევის გაზომილი მნიშვნელობის განსაზღვრა
    pi(i)=pi(i-1)+dt*((p(i-1)-pi(i-1))/Td);

    eps2=-pi(i)+p_z; % რეგულირების შეცდომა

```



```

sum2=sum2+eps2;

mu2_ =mu2_ n+Kp2*(eps2+sum2*dt/Ti2); % რეგულატორის განტოლება
    % შეზღუდვა სარქველი გამტარიანობაზე
if mu2_ < 0
mu2_ =0;
end

if i==2
mu2_old=mu2_;
end
    % სარქველის რეალური გამტარიანობის განსაზღვრა

mu2=mu2_old+dt*(mu2_-mu2_old)/Tim;
mu2_old=mu2;
    % მოდელის განტოლებათა ამოხსნა

V_p=V_0-M_v(i-1)/ro_v;

M_p(i)=p(i-1)*V_p*M/(R*(t_v(i-1)+273));

if p_pot > p(i-1)
G_p(i-1)=0;
else G_p(i-1)=mu1*sqrt(p(i-1)^2-p_pot^2);
end

G_pi=G_p(i-1)+(M_p(i)-M_p(i-1))/dt;
if G_pi<=0
G_pi=0;
end

M_v(i)=M_v(i-1)+dt*(G_v-G_pi);

G_sm=mu2*sqrt(p_t^2+p_k^2);
if p_t < p_k
G_sm=0;
end

t_k(i)=(K*F*t_v(i-1)+G_sm*(c_k*t_t_vx+r_t))/(K*F+G_sm*c_k);

t_v(i)=t_v(i-1)+dt*(K*F*(t_k(i)-t_v(i-1))-G_v*c_v*(t_v(i-1)-t_v_vx)-
G_pi*Lamda)/(c_v*M_v(i));

end

```

% დამოკიდებულებათა გრაფიკების აგება

```
figure(1)
plot(t,t_v);
figure(2)
plot(t,t_k);
figure(3)
p(end)=p(end-1);
plot(t,p);
figure(4)
G_p(end)=G_p(end-1);
plot(t,G_p);
figure(5)
plot(t,M_v);
```

## თავი 19

### არაწრფივი სისტემების მდგრადობის გამოკვლევა ლიაპუნოვის მეთოდით

არაწრფივი სისტემების მდგრადობის ანალიზი წარმოადგენს მართვის სისტემების პროექტირების უმნიშვნელოვანეს ეტაპს, მაგრამ არაწრფივი სისტემების მდგრადობის კვლევა გართულებულია იმით, რომ ზოგიერთი სისტემისთვის აუცილებელი და საკმარისი პირობებიდან შეიძლება ვილაპარაკოთ მხოლოდ მდგრადობისათვის საკმარის პირობაზე. აქედან გამომდინარე ზოგიერთი სისტემისათვის მის მდგრადობაზე ლაპარაკი ძნელია.

მართვის კლასიკურ თეორიაში არსებობს ორი ძირითადი ანალიზური მეთოდი, ესენი არიან ლიაპუნოვის პირველი და ლიაპუნოვის მეორე მეთოდები, აგრეთვე ლიაპუნოვის მეორე მეთოდის მრავალი მოდიფიკაცია

განვიხილოთ ლიაპუნოვის მეთოდების გამოყენების სხვადასხვა ასპექტები

#### 19.1. ლიაპუნოვის პირველი მეთოდი.

ეს მეთოდი გვამძლევს საშუალებას გაწრფივებული განტოლებებისათვის წონასწორობის მდგომარეობის მდგრადობის საკითხს. ეს მეთოდი ემყარება შემდეგ მტკიცებულებებს:

- თუ გაწრფივებული სისტემის საკუთრივი მნიშვნელობების ნამდვილ ნაწილებს შორის არიან უარყოფითი ნამდვილი მნიშვნელობები (გაწრფივებული სისტემა ასიმპტოტურად მდგრადია) მაშინ არაწრფივი სისტემის მდგრადია **„მცირედ“**;
- თუ გაწრფივებული სისტემის საკუთრივ მნიშვნელობებს შორის არიან „მარჯვენები“ მაშინ სისტემის წონასწორობის მდგომარეობა **არამდგრადია**;
- თუ წარმოსახვით ღერძზე არიან ზოგიერთი საკუთრივი მნიშვნელობები, ხოლო დანარჩენები „მარცხენებია“, მაშინ გაწრფივებული სისტემის ამ კრიტიკული მდგომარეობის მიხედვით **ვერ ვიმსჯელებთ არაწრფივი სისტემის წონასწორული მდგომარეობის მდგრადობაზე.**

აქედან გამომდინარე ლიაპუნოვის პირველი მეთოდით სისტემის მდგრადობაზე ანალიზისათვის შეიძლება აუცილებელია:

1. მოვძებნოთ სისტემის წონასწორობის მდგომარეობა, როცა მოძრაობა არ არის( ანუ სიჩქარე და აჩქარება ორივე ნოლია)

$$\frac{dv_i}{dt} = 0$$

2. წონასწორობის წერტილის მიდამოში სისტემა გავაწრფივოთ.
3. გაწრფივებული სისტემის დიფერენციალური განტოლებები ჩავწეროთ მატრიცული ფორმით (შევადგინოთ **A** მატრიცა).
4. ავავოთ გაწრფივებული სისტემის მახასიათებელი პოლინომი:

$$D(s) = \det(sE - A)$$

5. ვიპოვოთ მახასიათებელი პოლინომის ფესვები. ამ ფესვების მიხედვით ვიმსჯელოთ სისტემაში მიმდინარე პროცესების ხასიათზე.

**ლიაპუნოვის პირველი მეთოდით** სისტემის ანალიზის უარყოფით მხარეს მიეკუთვნება ის,რომ:

- თუ წარმოსახვით ღერძზე არის ფესვი, მაშინ სისტემის ყოფაქცევაზე ვერ ვიმსჯელებთ;
- შესაძლებელია მხოლოდ ვიმსჯელოდ სისტემის მხოლოდ მცირედ მდგრადობაზე, ანუ სისტემის წონასწორობის მდგომარეობიდან დიდი გადახრის დროს სისტემა არამდგრადია.  
განვიხილოთ მაგალითები:

### მაგალითი 1.

გამოვიკვლიოთ სისტემა, რომელიც მოცემულია შემდეგი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემით:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -v_1 - 2v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} = 2v_1 - v_2 - v_1^3 \end{cases}$$

### ნაბიჯი 1. წონასწორობის მდგომარეობა:

წონასწორობის წერტილების მოსაძებნად განტოლებათა მარჯვენა მხარეები უნდა გავუტოლოთ 0-ს, რაც იმის ექვივალენტურია, რომ მდგომარეობათა ცვლადები წარმოადგენენ მუდმივებს, ხოლო მათი წარმოებულები კი 0-ის ტოლებია.

$$v_1 = \text{const} \text{ Type equation here.}$$

$$v_2 = \text{const}$$

$$v_1^* = v_2^* = 0$$

### ნაბიჯი 2. გაწრფივება მცირე გადახრების შემთხვევაში:

წონასწორობის წერტილში მცირე გადახრების გაწრფივებისათვის, განტოლებაში შემავალი ცვლადების უმაღლესი ხარისხები უტოლდებიან ნოლებს.

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -v_1 - 2v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} = 2v_1 - v_2 \end{cases}$$

ნაბიჯი 3. გაწრფივებული განტოლებათა სისტემა წარმოვადგინოთ მატრიცული სახით:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ნაბიჯი 4. ავაგოთ მახასიათებელი პოლინომი:

$$\begin{aligned} \det(sE - A) &= s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s - (-1) & 0 - (-2) \\ 0 - 2 & s - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + 1 & 2 \\ -2 & s + 1 \end{bmatrix} = (s + 1)(s + 1) + 4 = (s + 1)^2 + 4 \end{aligned}$$

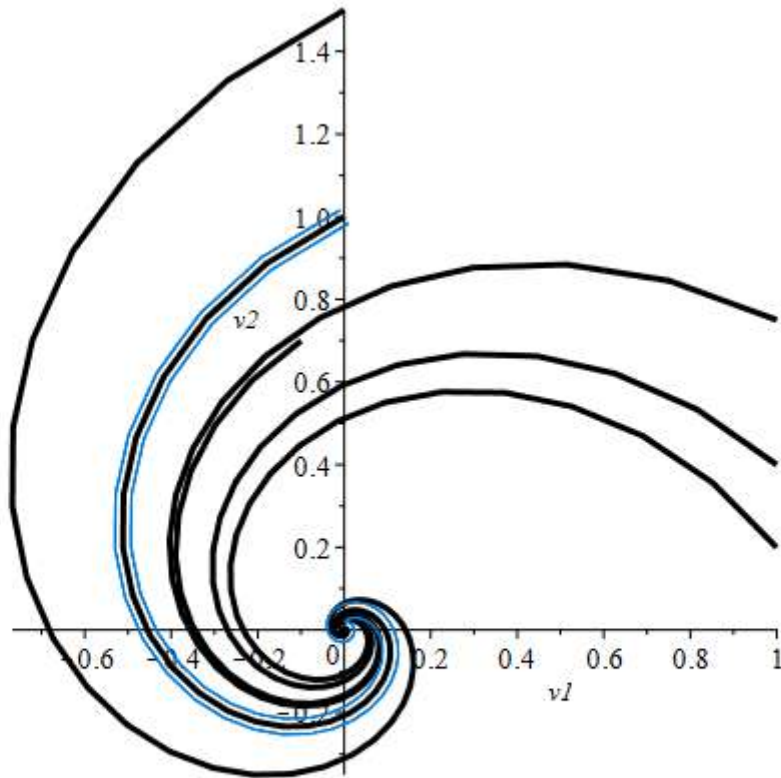
ნაბიჯი 5. მოვძებნოთ მახასიათებელი პოლინომის ფესვები:

$$\begin{aligned} (s + 1)^2 + 4 &= 0 \\ (s + 1)^2 &= -4 \\ s + 1 &= \pm 2j \\ s_{1,2} &= -1 \pm 2j \end{aligned}$$

**დასკვნა სისტემის მდგრადობის შესახებ**

განხილულ მაგალითში სისტემის გაწრფივების დროს მივიღეთ ორი ფესვი რომლებსაც აქვთ უარყოფითი ნამდვილი ნაწილები, რაც გვამბლევს საშუალებას ვთქვათ, რომ მართვის სისტემა „მცირედად“ მდგრადია (დიდი გადახრების დროს კი სისტემა შესაძლებელია იყოს არამდგრადი).

ავაგოთ მაგალითი 1 -ის ფაზური პორტრეტი პროგრამა MAPLE-ს საშუალებით (ნახ.19.1) ამასთან უნდა აღინიშნოს, რომ თუ საწყისი მნიშვნელობები მოშორებული არიან წონასწორობის წერტილს, მაშინ სისტემა ხდება არამდგრადი.



ნახ.19.1 მაგალითი 1-ის ფაზური პორტრეტი

## მაგალითი 2. არაწრფივი ოსცილატორი

არაწრფივი ოსცილატორის საკითხი განვიხილოთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის საფუძველზე:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} = -v_1 - v_2^3 \end{cases}$$

პირველი მაგალითის მსგავსად შევასრულოთ კვლევა ნაბიჯ-ნაბიჯ.

ნაბიჯი 1. წონასწორობის მდგომარეობა:

$$v_1 = \text{const} \text{ Type equation here.}$$

$$v_2 = \text{const}$$

$$v_1^* = v_2^* = 0$$

ნაბიჯი 2. გაწრფივება მცირე გადახრების შემთხვევაში:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} = -v_1 \end{cases}$$

ნაბიჯი 3. გაწრფივებული განტოლებათა სისტემა წარმოვადგინოთ მატრიცული სახით:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ნაბიჯი 4. ავაგოთ მახასიათებელი პოლინომი:

$$\begin{aligned} \det(sE - A) &= s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s - 0 & 0 - 1 \\ 0 - (-1) & s - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 + 1 \end{aligned}$$

ნაბიჯი 5. მოვძებნოთ მახასიათებელი პოლინომის ფესვები:

მახასიათებელი პოლინომი გავუტოლოთ ნოლს მივიღებთ განტოლების ფესვებს

$$\begin{aligned} s^2 + 1 &= 0 \\ s_{1,2} &= \pm j \end{aligned}$$

დასკვნა სისტემის მდგრადობის შესახებ

განხილული სისტემა წარმოადგენს კრიტიკულ შემთხვევას და მისი მდგრადობის შესახებ არ არის ლაპარაკი ანუ შეუძლებელია ლიაპუნოვის პირველი მეთოდის (გაწრფივების საშუალებით) საშუალებით. ამიტომ განვიხილოთ ლიაპუნოვის მეორე მეთოდი (პირდაპირი მეთოდი)

## 19.2. ლიაპუნოვის მეორე მეთოდი.

ლიაპუნოვის მეორე მეთოდი არ უკავშირდება სისტემის გაწრფივებას, ამიტომაც მას სხვანაირად ლიაპუნოვის პირდაპირ მეთოდსაც უწოდებენ.

სანამ უშუალოდ ამ მეთოდს განვიხილავთ მანამ უნდა გავარკვიოთ **ნიშანგანსაზღვრული** და **ნიშანცვლადი ფუნქციების** რაობა.

ვთქვათ მოცემული გვაქვს მრავალი ცვლადის ფუნქცია

$$V = V(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

ფუნქცია  $V$  -ს ეწოდება **ნიშანგანსაზღვრული** გარკვეულ მიდამოში თუ იგი ამ მიდამოს ნებისმიერ წერტილში კორდინატთა სათავის გარშემო ინარჩუნებს ნიშანს (ერთნაირი ნიშანი აქვს) და არსად არ ხდება ნოლის ტოლი გარდა კორდინატთა სათავისა.

$$V(\bar{0}) = 0$$

ფუნქცია  $V$ -ს ეწოდება **ნიშანმუდმივი**, თუ ის ინარჩუნებს ნიშანს, მაგრამ შესაძლებელია გაუტოლდეს ნოლს არამხოლოდ კორდინატთა სათავეში არამედ ამ მიდამოს სხვა წერტილებშიც.

ფუნქცია  $V$ -ს ეწოდება **ნიშანცვლადი**, თუ ის თუ ამ მიდამოში (კორდინატთა სათავეს გარშემო იცვლის ნიშანს.

### ლიაპუნოვის თეორემა არაწრფივი სისტემის მდგრადობაზე

თუ მოცემული გვაქვს შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \varphi_1(v_1, v_2, \dots, v_n) \\ \frac{dv_2}{dt} = \varphi_2(v_1, v_2, \dots, v_n) \\ \vdots \\ \frac{dv_n}{dt} = \varphi_n(v_1, v_2, \dots, v_n) \end{cases}$$

**n-ური** რიგის სისტემის განტოლებებს შორის შეიძლება შევარჩიოთ ისეთი ლიაპუნოვის ნიშანგანსაზღვრული ფუნქცია

$$V(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

რომ მისი წარმოებული დროში

$$W(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

იყოს აგრეთვე ნიშანგანსაზღვრული (ანუ მუდმივნიშნა), ოღონდ უნდა ქონდეს  $V$  ფუნქციის საწინააღმდეგო ნიშანი. ამ შემთხვევაში მოცემული სისტემა **მდგრადია**.

სიმარტივისათვის შეიძლება ითქვას, რომ ლიაპუნოვის ფუნქცია უნდა იყოს დადებითი, ნიშანგანსაზღვრული ფუნქცია. მაშინ ლიაპუნოვის თეორემა მიიღებს სახეს. სისტემის წონასწორობის მდგომარეობის მდგრადობისათვის საკმარისია არსებობდეს დიფერენცირებადი ლიაპუნოვის ფუნქცია

$$V(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

რომელიც კორდინატთა სათავეს მახლობლად უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

1.  $V(v_1, v_2, \dots, v_n) \geq 0$  ამასთან  $V = 0$  მხოლოდ შემდეგი პირობებში, რომ ფუნქციას აქვს მკაცრად მინიმალური მნიშვნელობა კორდინატთა სათავეში

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \bar{0}$$

2. ფუნქციის წარმოებული დროში

$$\frac{dV(\bar{v})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial v_1} \frac{dv_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial v_2} \frac{dv_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial v_n} \frac{dv_n}{dt} =$$

$$= \left( \frac{\partial V}{\partial v_1} \quad \frac{\partial V}{\partial v_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial v_n} \right) \begin{bmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dv_n}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\varphi}(\bar{v})$$

დიფერენციალური გამომდინარე არის უარყოფითი და ნიშანმუდმივი ფუნქცია, ანუ

$$\frac{dV(\bar{v})}{dt} = \text{grad} \bar{V} * \frac{d\bar{v}}{dt} = \text{grad} \bar{V} * \bar{\varphi}(\bar{v}) \leq 0$$

$t \geq t_0$  - თვის.

მაშასადამე მდგრადობის პირობები შეიძლება ჩამოვყალიბოთ შემდეგნაირად:

1.  $\frac{dV(\bar{v})}{dt} \leq 0$  და ფუნქცია  $V(v_1, v_2, \dots, v_n)$  უნდა იყოს დადებითი და ნიშანგანსაზღვრული, ეს არის მდგრადობის საკმარისი პირობა.
2.  $\frac{dV(\bar{v})}{dt}$  უნდა იყოს უარყოფითად განსაზღვრული, ეს არის ასიმპტოტური მდგრადობის საკმარისი პირობა.
3.  $\|v\| \rightarrow \infty : \frac{dV(\bar{v})}{dt} \rightarrow \infty$  ეს კი არის მთლიანად საკმარისი პირობა.

აქედან გამომდინარე მართვის სისტემის მდგრადობის შესაფასებლად ლიაპუნოვის მეორე მეთოდის მიხედვით საჭიროა:

1. ვიპოვოთ ლიაპუნოვის ფუნქცია  $\mathbf{n}$  ცვლადისათვის.
2. ვიპოვოთ თითოეული ცვლადის მიხედვით კერძოწარმოებულები.
3. გამოვთვალოთ  $\frac{dV(\bar{v})}{dt}$  წარმოებულ ფუნქცია და გავაანალიზოთ მისი ნიშანი.

იმის გამო, რომ ლიაპუნოვის მეორე მეთოდი არ არის დაკავშირებული გაწრფივებასთან, იგი ითვლება უნივერსალურ მეთოდად. მიუხედავად ამისა ამ მეთოდს გააჩნია რიგი ხარვეზები:

- არ გვაქვს ზოგადი მოთხოვნები  $V$  ფუნქციის არჩევისათვის
- თუ პირობები არ სრულდება, მდგრადობაზე ვერ ვისაუბრებთ, აქ შეიძლება მხოლოდ სხვა  $V$  ფუნქციის არჩევა.



### მაგალითი 3. არაწრფივი ოსცილატორი

განვიხილოთ ამ მიზნით ისევ მაგალითი 2

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} = -v_1 - v_2^3 \end{cases}$$

#### ნაბიჯი 1. ლიაპუნოვის ფუნქცია

დასაწყისისთვის უნდა შევარჩიოთ ლიაპუნოვის ფუნქცია ორი ცვლადისთვის

$$V(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2)$$

#### ნაბიჯი 2. კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial V}{\partial v_1} = \frac{1}{2}(2v_1 + 0) = v_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_2} = \frac{1}{2}(0 + 2v_2) = v_2$$

#### ნაბიჯი 3. ფუნქციის წარმოებული

$$\frac{dV(\bar{v})}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial V}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial v_1} \frac{dv_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial v_2} \frac{dv_2}{dt} = v_1 \frac{dv_1}{dt} + v_2 \frac{dv_2}{dt}$$

მაგალითი 2 - დან ვიცით, რომ

$$\frac{dv_1}{dt} = v_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = -v_1 - v_2^3$$

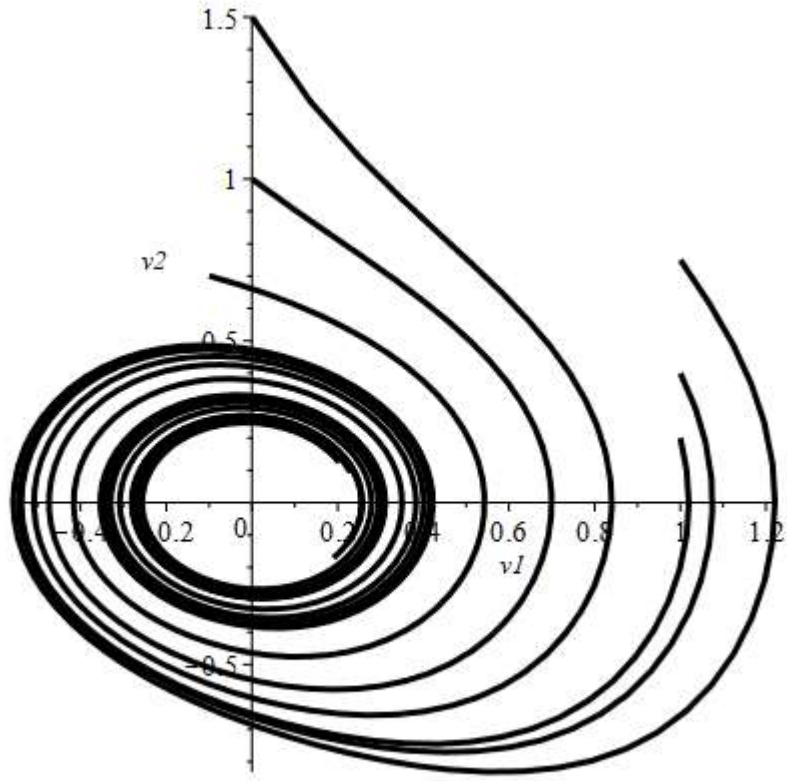
შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები ფუნქციის წარმოებულის ფორმულაში მივიღებთ:

$$\frac{dV(\bar{v})}{dt} = v_1 v_2 + v_2(-v_1 - v_2^3) = v_1 v_2 - v_1 v_2 - v_2^4 = -v_2^4 \leq 0$$

#### დასკვნა სისტემის მდგრადობის შესახებ

ლიაპუნოვის პირველი მეთოდით ჩვენ ვერ გავაკეთეთ დასკვნა სისტემის მდგრადობის შესახებ, ამიტომ გამოვიყენეთ ლიაპუნოვის მეორე მეთოდი და მივედით დასკვნამდე, რომ სისტემა ასიმპტოტურად მდგრადია.

მაგალითი 2 -ის შესაბამისი ფაზური პორტრეტი შესრულებული პროგრამა MAPLE-ზე წარმოდგენილია ნახ.19.2-ზე



ნახ.19.2 მაგალითი 3 - ის ფაზური პორტრეტი.

**მაგალითი 4.**

განვიხილოთ შისტემა, რომელიც მოცემულია შემდეგი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -v_1 v_2^2 \\ \frac{dv_2}{dt} = 3v_2 v_1^2 \end{cases}$$

ამ სისტემიდან ნათლად ჩანს, რომ ლიაპუნოვის პირველი მეთოდის გამოყენება შეუძლებელია, რადგან  $A$  მატრიცა შედგება ნოლებისაგან, რაც გამოიწვევს საკუთრივი მნიშვნელობების ნულოვან მნიშვნელობებს. ამიტომ გამოვიყენოთ ლიაპუნოვის მეორე მეთოდი:

**ნაბიჯი 1. ლიაპუნოვის ფუნქცია**

შევარჩიოთ ლიაპუნოვის ფუნქციად მეორე რიგის შემდეგი ფუნქცია

$$V(v_1, v_2) = av_1^2 + v_2^2$$

ნაბიჯი 2. ფუნქციის კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial V}{\partial v_1} = 2av_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_2} = 2v_2$$

ნაბიჯი 3. ფუნქციის წარმოებულები

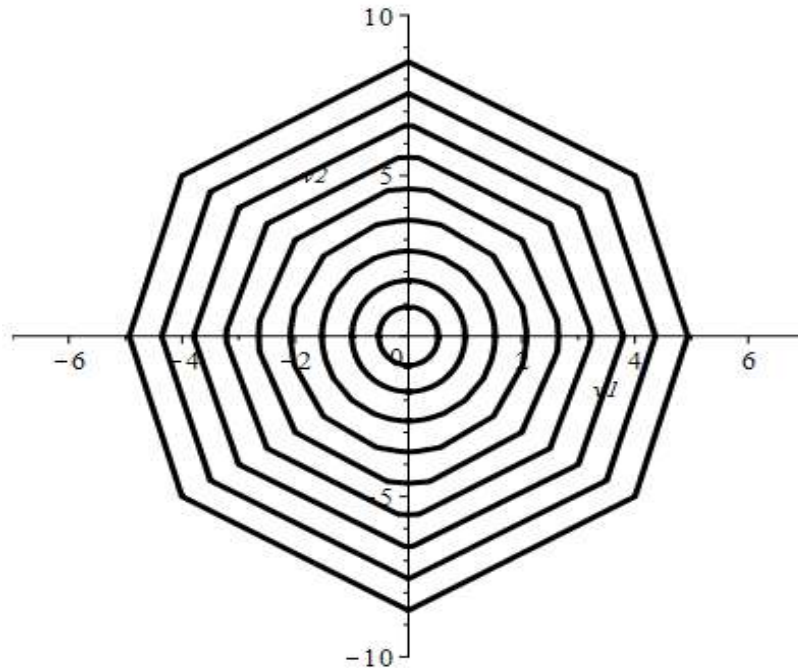
$$\frac{dV(\bar{v})}{dt} = 2av_1(-v_1v_2^2) + 2v_2 3v_2v_1^2 = -2av_1^2v_2^2 + 6v_1^2v_2^2 \leq 0$$

როცა  $a = 3$  ადგილი აქვს ასიმპტოტურ მდგრადობას.

დასკვნა სისტემის მდგრადობის შესახებ

სისტემა მდგრადია

ფაზურ პორტრეტს აქვს სახე:



ნახ.19.3 მაგალითი 4 - ის ფაზური პორტრეტი.

ლიტერატურა:

1. ა.გუგუშვილი , რ.ხუროძე, მ.ახობაძე მართვის თეორია (I და II ნაწილები) თბილისი 1999 წ. გამომცემლობა ტექნიკური უნივერსიტეტი ISBN 99928-36-52-0 860 გვ.
2. ნ. მჭედლიშვილი. მართვის ინჟინერიის საფუძვლები. ლექციების კურსი. 2019. 115გვ. CD-5699
3. თ.იმედაძე, ნ.მჭედლიშვილი. მართვის სისტემების ინჟინერია. თბილისი: სტუ, 2009. გვ. 14-41; 166-263; 681.51(02)/16
4. ჭიკაძე გელა, სესაძე ვალიდა. ვლადიმერ კვეცაძე. მათემატიკა კომპიუტერზე. თბილისი.. გვ. 234. ISBN 978-9941-4816-9. 2017 წ.
5. Кудинов Ю.И, Пашенко Ф.Ф.,Келина Ф.Ю. Теория автоматического управления ( с использованием MATLAB---SIMULINK).Практикум ISBN 978-5-8114-3771-9; 2020 г. 280 стр.
6. Гаидук А.Р. , Беляев В.Е., Пьявченко Т.А.,Теория автоматического управления в примерах и задачах. Учебное пособие ISBN 978-5-8114-4200-3; 2019 г. 464 стр.