საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ბესარიონ შანშიაშვილი

ოპტიმალური სისტემები

ლექციების კურსის კონსპექტი

თბილისი 2018

ლექციების კურსში ფორმულირებულია ოპტიმალური მართვის ამოცანა, მოცემულია დახასიათება იმ პირობებისა და მოთხოვნების, რომლებიც წაეყენება ოპტიმალური მართვის სისტემებს.

მოცემულია ოპტიმალური მართვის ცნება და მისი განზოგადება. განხილულია ოპტიმალური პროგრამული მართვისა და ოპტიმალური მასტაბილიზირებელი მართვის ცნებები, განტოლებები და თავისებურებები.

განხილულია კლასიკური ვარიაციული აღრიცხვის ცნებები, ელემენტები და მეთოდები. წარმოდგენილია ვარიაციული ამოცანები დამაგრებული და მოძრავი სასაზღვრო წერტილებით, ამოცანები პირობით ექსტრემუმზე, მაიერისა და ბოლცის ამოცანები.

ოპტიმალური მართვის ამოცანა განიხილება როგორც მაიერის ამოცანა. განხილულია მაქსიმუმის პრინციპისა და მისი პრაქტიკული გამოყენებს თავისებურებები.

ლექციების კონსპექტში გადმოცემულია მასალის ნაწილი, რომელიც წლების განმავლობაში ავტორი უკითხავდა შესაბამისი სპეციალობის ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის სტუდენტებს.

სარჩევი

თავი 1

ოპტიმალური მართვის ამოცანები

1.1. ოპტიმალური მართვის ამოცანის დასმა

რიგ ტექნიკურ გამოყენებებში წარმოიშვება ამოცანა – განხორციელდეს ოპტიმალური, ანუ რაიმე მახასიათებლის ან კრიტერიუმის აზრით საუკეთესო, მართვა. მართვის დინამიკურ სისტემებში ოპტიმიზაციის ამოცანა წარმოიშვება შემდეგი დასმით.

ცნობილია ძირითადი ამოცანა, რომელიც დასმულია მართვის სისტემის წინაშე, მაგალითად მართვადი ცვლადების ცვლილების მოცემული კანონის შენარჩუნება. თუ სისტემის მდგომარეობა განსხვავდება საჭირო მდგომარეობისაგან (ჩართვის მომენტში ან აღმშფოთი შემოქმედების ზეგავლენით), მაშინ მართვის ძირითადი ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ სისტემა ფაქტიური მდგომარეობიდან გადაყვანილი იყოს საჭირო მდგომარეობაში. თუ ამ ამოცანას გააჩნია ამონახსნთა გარკვეული სიმრავლე, მაშინ შეიძლება დაისვას ამოცანა ამ სიმრავლიდან საუკეთესო ამონახსნის ამორჩევის შესახებ ანუ ოპტიმიზაციის ამოცანა.

ვთქვათ სისტემის ან ობიექტის მდგომარეობა განისაზღვრება მდგომარეობის $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ ვექტორით. $\mathbf{x}$ ვექტორის ცვლილება დროის მიხედვით გამოისახება მსგომარეობის სივრცეში $\mathbf{x}(t)$ ტრაექტორიით . ობიექტის გადაყვანისათვის ერთი მდგომარეობიდან მეორე მდგომარეობაში ან ერთი ტრაექტორიიდან მეორე ტრაექტორიაზე ობიექტს მოეწოდება მმართველი ზემოქმედება , ანუ მოკლედ მართვა რომელიც განისაზღვრება $\mathbf{u}=(u_1,u_2,...,u_m)$ ვექტორით.

1.2. სასაზღვრო პირობები

მართვის მიზანი ხშირ შემთხვევაში მოიცემა სასაზღვრო პირობებით, რომლებიც განსაზღვრავენ საწყის მდგომარეობის $\mathbf{x}(t_0)$ ვექტორს $t=t_0$ მომენტში და საბოლოო მდგომარეობის $\mathbf{x}(t_j)$ ვექტორს $t=t_j$ მომენტში. ამ ვექტორების რიცხვითი მნიშვნელობები შეესაბამება მდგომარეობის სივრცეში სასაზღვრო წერტილებს ან ტრაექტორიის ბოლოებს. როგორც ლიტერატურაში არის მიღებული საწყის მდგომარეობაში $\mathbf{x}(t_0)$-ს ვუწოდებთ მარცხენა, ხოლო $x(t_j)$ მარჯვენა ბოლოს. სასაზღვრო პირობები მოიცემა სხვადასხვანაირად, მაგრამ ყველა შემხთხვევაში ისინი განსაზღვრავენ სასაზღვარო

$\mathbf{x}(t_0)$ და $\mathbf{x}(t_j)$ მნიშვნელობების მიკუთვნებას რაიმე მოცემულ $\mathbf{X}_0$ და $\mathbf{X}_j$ სიმრავლეებს, ამიტომ ზოგადად $\mathbf{x}(t_\mathbf{0}) \in \mathbf{X}_0$, $\mathbf{x}(t_\mathbf{j}) \in \mathbf{X}_j$.

ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება ამოცანები ტრაექტორიების დამაგრებული ბოლოებით, როდესაც ორივე $\mathbf{X}_0$ და $\mathbf{X}_j$ სიმრავლე შედგება ერთი წერტილისგან, და ამოცანები მოძრავი ერთი ან ორივე ბოლოებით, როდესაც შესაბამისი სიმრავლე წარმოადგენს წირს, ზედაპირს ან ჰიპერზედაპირს, რომლებზედაც მდებარეობენ $\mathbf{x}(t_0)$ და $\mathbf{x}(t_j)$. ასეთ შემთხვევაში სასაზღვრო პირობები მოიცემა განტოლებებით:

$$g_l[\mathbf{x}(t_0)] = 0, \quad \ell = 1, ..., p \le n$$

$$h_s[\mathbf{x}(t_j)] = 0, \quad s = 1, ..., q \le n. \qquad (1.2.1)$$

თუ მოძრავია ორივე ბოლო, ან (1)–ის ერთერთი განტოლებით , თუ მოძრავია ერთი ბოლო. თუ t_0 და t_j დროის მომენტები არ არის მოცმული, მაშინ ზოგად შემთხვევაში ისინი შეიძლება შედიოდნენ განტოლებებში, რომლებიც განსაზღვრავენ სასაზღვრო პირობებს.

შესაძლებელია ასევე ამოცანა თავისუფალი ბოლოთი, როდესაც ტრაექტორიის მარჯვენა ბოლოს არავითარი პირობა არ ედება (მაგალითად ამოცანა

რაკეტის მიერ მაქსიმალური სიმაღლის მიღწევა დროის მოცემულ მომენტში).

1.3. ოპტიმალურობის კრიტერიუმები

ოპტიმალური მართვის ამოცანებში ძირითადად „ტექნოლოგიურ“ მიზანს ემსახურება ოპტიმიზაციის მიზანი, რომელსაც მათემატიკურად გამოისახება როგორც მოთხოვნილება თვისობრიობის რაიმე მაჩვენებლის ექსტრემუმის მიღწევისა. ეს მაჩვენებელი გამოისახება ფუნქციონალით ანუ ცვლადით, რომლის რიცხვითი მნიშვნელობა დამოკიდებულია გარკვეული ფუნქციის სახეზე, რომელიც წარმოადგენს ფუნქციონალის არგუმენტს. მართვის პრაქტიკულ ამოცანებში, ზოგად შემთხვევაში, როდესაც ობიექტი აღიწერება პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით, გვხვდება ფუნქციონალები, რომლებიც დამოკიდე-ბულია ცვლადებზე $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_j), t_0, t_j, t, \tau$ ე.ი.

$$J = J\lfloor \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_j), t_0, t_j, t \rfloor. \quad (1.3.1)$$

კერძო შემთხვევაში, ჩვეულებრივად ფუნქცი-ონალში შედის ამ ცვლადების მხოლოდ ნაწილი.

J ფუნქციონალს უწოდებენ ხარისხის მაჩვენე-ბელს, ოპტიმალობის კრიტერიუმს, მიზნობრივ

ფუნქციას. პრაქტიკულად J უნდა გამოსახავდეს მოგების სიდიდეს (მიღებული შემოსავალი მარგი ქმედების კოეფიციენტი პროდუქციის რაოდენობა მოცემული რესურსის დროს და ა.შ.), ან კარგვების სიდიდეს (ენერგიის, დროის , ფულადი და სხვა რესურსების დანახარჯები და ა.შ.). პირველი შემთხვევაში ოპტიმალურმა მართვამ უნდა უზრინველყოს J ფუნქციონალის მაქსიმუმი, მეორე შემთხვევაში მინიმუმი. შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ საჭიროა J–ს მინიმიზირება. ეს არ ზღუდავს ზოგადობას, ვინაიდან თუ ამოცანის აზრით საჭიროა J ფუნქციონალის მაქსიმიზირება, ჩვენ მოვახდენთ მისი მოპირდაპირე - J ფუნქცონალის მინიმიზაციას.

ზოგიერთ შემთხვევაში ოპტიმალობის კრიტე-რიუმების დადგენა ხდება მარტივად ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე. მაგალითად, თვით-მფრინავი რაც შეიძლება ღრმა რეისის შესაძლებლობის უზრუნველყოფისათვის მოწინააღ-მდეგის ზურგში, საჭიროა ფრენის მაქსიმალური სიშორის უზრუნველყოფა საწვავის მოცემული რაოდენობის დროს. მრავალ რეალურ შემთხვევაში J-ს არჩევა ხდება საკმაოდ რთული ამოცანა. ეს ხშირად დაკავშირებულია დამკვეთის ან კონსტრუქტორის სურვილების არასაკმარისად მკაფიოდ ჩამოყალიბებაზე. მაგალითად სასურველია

მიღებული იქნას კონსტრუქცია, რომელიც რაც შეიძლება უნდა იყოს იაფი, ზუსტი მწარმოებლური, სწრაფადმოქმედი. ასეთი დასმის დროს ამოცანის გადაწყვეტა შეუძლებელია, ვინაიდან ზოგიერთი სურვილი ერთმანეთს ეწინააღმდეგება, მაგალითად, სიზუსტის გაზრდა დაკავშირებულია გაძვირებას-თან. ასეთ შემთხვევაში გვიხდება ამოირჩიოთ ერთერთი ყველაზე არსებითი სურვილი და ფორმალიზება გავუკეთოთ ფუნქციონალის სახით, ან ჩამოვაყალიბოთ უპირატესობების სისტემა წონითი კოეფიციენტების სახით და ჩამოვაყალიბოთ „თავისუფალი კრიტერიუმი“ სასურველებიდან ან მათი ნაწილებიდან.

ასე მაგალითად, თუ შესაძლებელია თითოეული $J_1, J_2, \ldots, J_n$ მაჩვენებლიდან მოგების შეფასება ერთსა და იმავე ერთეულებში, მაგალითად ფულადში, მაშინ თავისუფალი კრიტერიუმი შეიძლება შევადგინოთ შემდეგნაირად.

ვთქვათ $c_i\left(J_i\right)$ ფუნქციაა, რომელიც გამოსახავს მოგების ღირებულებას J_i კრიტერიუმის მნიშვნელობებისაგან და ვთქვათ J_i –ების მნიშვნელობები ერთმანეთზე არ არის დამოკიდებული, მაშინ ოპტიმიზაცია დაიყვანება

$$J = \sum_{i=1}^{l} c_i(J_i) \qquad (1.3.2)$$

ფუნქციონალის მაქსიმუმის უზრუნველყოფაზე, სადაც l კერძო მიზნობრივი ფუნქციების რიცხვია.

კერძო შემთხვევაში, თუ მოგებების ღირებულებები პროპორციულია J_i მაშინ

$$J = \sum_{i=1}^{l} p_i J_i \, . \qquad (1.3.3)$$

ასეთ შემთხვევაში შემოყავთ ფარდობითი წონითი კოეფიციენტი $\alpha_i = p_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i$ და ცდილობენ შემდეგი კრიტერიუმის მაქსიმუმი მიღწევას:

$$J = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i J_i \, , \qquad (1.3.4)$$

სადაც

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i = 1.$$

თუ J_i-ის მნიშვნელობების შეფასება გართულებულია, α_i-ის საპოვნელად იყენებენ ექსპერტულ შეფასებებს.

ზოგიერთ შემთხვევაში ამოცანის მათემატიკური გადაწყვეტისათვის J კრიტერიუმის გამოსახულება

მიიღება რთული სახით. ამ შემთხვევაში J –ის აპროქსიმირებას უკეთებენ უფრო მარტივი ფუნქციონალის სახით და პოულობენ მიახლოებულ ოპტიმალურ (სუბოპტიმალურ) ამონახნს.

ოპტიმალობის კრიტერიუმის როლში ხშირად გამოიყენება წრფივი ფუნქციონალი შემდეგი სახისა:

$$J = \sum_i \left(a_i x_i + b_i u_i \right), \qquad (1.3.5)$$

რომელიც ხშირად გამოიყენება ეკონომიკური ამოცანების გადაწყვეტისას ან კვადრატული:

$$J = \int_{t_0}^{t_i} \sum_i \left(a_i x_i^2 + b_i u_i^2 \right) dt\,, \qquad (1.3.6)$$

მართვის დინამიკურ ამოცანებში გამოყენებისათვის.

ეს ფუნქციონალები დგება ისეთნაირად, რომ მათ ბევრად თუ ნაკლებად ზუსტად ასახონ ფაქტიური კარგვები თუ მოგებები სისტემაში.

ასეთი ფუნქციონალების შემოტანისას ამოცანის ანალიტიკური გადაწყვეტა მიიღება არც ისე რთული სახით.

თუ ფიზიკური მოსაზრებებიდან ოპტიმალობა კრიტერიუმის გამაჯერებლად ფორმულირება ვერ ხერხდება, მაშინ ოპტიმალური ამოცანის დასმის მიზანშეწონილება ხდება საეჭვო.

1.4. ობიექტის განტოლება

მართვის ძირითადი მიზნისა და ოპტიმალობის მიზნის ჩამოყალიბება სასაზღვრო პირობებისა და ოპტიმალობის კრიტერიუმის სახით ჯერ კიდევ არ არის საკმარისი ოპტიმალური მართვის ამოცანის სრული დასმისთვის. გარდა აღნიშნულისა, საჭიროა შეზუდვების ამოცანის შემოტანა, რომლებიც დაედება კოორდინატებს და მართვის ფიზიკურ პირობებს.

უპირველეს ყოვლისა თვით ობიექტისა და მართვის აპარატურის თვისებები ედება კოორდინა-ტებზე და მართვაზე შეზღუდვების სახით. ეს შეზღუდვები დინამიკურ სისტემაში გამოისახება დიფერენციალური განტოლებებით

$$F_i\left(x_1, ..., x_n, \dot{x}_1 ..., \dot{x}_n, u_1, ..., u_m, \dot{u}_1, ..., \dot{u}_m\right) = 0,\ i = 1,2, ..., n \tag{1.4.1}$$

უფრო კომპაქტური ფორმით კი:

$$F_i\left(x, \dot{x}, u, \dot{u}\right) = 0,\quad i = 1,2, ..., n. \tag{1.4.2}$$

ასეთ შეზღუდვებს უწოდებენ არაჰოლონომურ კავშირებს. მათ რიცხვებს მიაკუთვნებენ უპირველეს ყოვლისა ობიექტის და მმართველი მოწყობილებების განტოლებათა სისტემას, რომელიც წინასწარ მოცემულია (ცხადია ოპტიმიზაციის განტოლება ამ

განტოლებაში ვერ შევა). შემდგომში ობიექტის ცნების გავაფართოებთ და ობიექტის განტოლებას ვუწოდებთ მოცემული დიფერენციალური განტოლებების მთელ სისტემას.

აქ მიღებულია, რომ ობიექტი შეიძლება აღწერილი იყოს პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემით. ეს არ ზღუდავს ზოგადობას, ვინაიდან შეიძლება ნებისმიერი მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლება შეიძლება დაყვანილი იყოს ასეთ სისტემაზე.

1.5. შეზღუდვები

კოორდინატებს და მართვას ედება ასევე არადიფერენციალური შეზღუდვები. ყველაზე ზოგად შემთხვევაში ეს შეზღუდვები მიიღება $\mathbf{x}$ და $\mathbf{u}$–ს მიკუთვნებით $\mathbf{X}_t$ და $\mathbf{U}_t$ სიმრავლეებს: $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_t$, $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_t$.

უფრო დეტალურად შემდგომში განვიხილავთ შეზღუდვებს, რომლებიც გამოსახულია ტოლობების ან უტოლობების სახით

$$\varphi_i(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 0\,, \quad i = 1,2,\dots,l\,, \qquad (1.5.1)$$

$$\varphi_k(\mathbf{x},\mathbf{u}) \le 0\,, \quad k = l+1,\dots,V\,. \qquad (1.5.2)$$

ფუნქციონალების ექსტრემუმის მიღწევის ამოცანები განიხილება ვარიაციულ აღრიცხვაში და

ჰქვია მათ ვარიაციული ამოცანები. ვარიაციულ ამოცანას ჰქვია კლასიკური თუ ის არ შეიცავს შეზღუდვებს უტოლობების სახით და არაკლასიკური საწინააღმდეგო შემთხვევაში.

პრაქტიკულ ამოცანებში ხშირად გვხვდება შეზღუდვების კიდევ ერთი ტიპი – იზოპერიმეტრული - განსაზღვრული ინტეგრალების სახით (მაგალითად შეზღუდვები ენერგიის პხარჯვაზე). ამ შეზღუდვებმა მიიღეს ეს დასახელება ერთ და იგივე პერიმეტრის ყველა ფიგურებს შორის მაქსიმალური ფართობის მქონე ფიგურის მოძებნის ამოცანიდან გამომდინარე. დღეისათვის ეს სახელი გამოიყენება ტრადიციის შესაბამისად. იზოპერიმეტ-რულ შეზღუდვას აქვს შემდეგი სახე

$$\int_{t_0}^{t_k} f_{n+k}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)dt = B_k\ ,\quad k = 1,2,\ldots,r\ . \qquad (1.5.3)$$

უნდა აღინიშნოს რომ x_{n+k} დამატებითი კოორდინატების შემოტანით იზოპერიმეტრული შეზღუდვები შეიძლება დავიყვანოთ დიფერენცი-ალურზე.

$$\dot{x}_{n+k} = f_{n+k}(\mathbf{x},\mathbf{u},t),\quad k = 1,2,\ldots,\tau\ , \qquad (1.5.4)$$

სასაზღვრო პირობების დროს

$$x_{n+k}(t_0) = 0\ ,\quad x_{n+k}(t_j) = B_k\ ,\quad k = 1,2,\ldots,\tau\ . \qquad (1.5.5)$$

1.6. ოპტიმალური მართვის ამოცანის ფორმულირება

ზევით განხილულ პირობებში ოპტიმალური მართვის ამოცანა შეიძლება ფორმულირებული იყოს ასეთნაირად: ვიპოვოთ $\mathbf{u}^*(t)$ და $\mathbf{x}^*(t)$ ფუნქციები, ისეთები რომლებიც უზრუნველყოფენ ფუნქციონალის

$$J = J\left[\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\dot{\mathbf{x}}(t),\dot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{x}(t_0),\mathbf{x}(t_j),t_0,t_j,t\right] \qquad (1.6.1)$$

მინიმუმს (მაქსიმუმს), შემდეგი პირობებისას:

$$F_i(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\mathbf{u},\dot{\mathbf{u}},t) = 0\,, \quad i = 1,2,\ldots,n\,, \qquad (1.6.2)$$

$$\int_{t_0}^{t_j} f_{n+k}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)dt = B_k\,, \quad k = 1,2,\ldots,r\,, \qquad (1.6.3)$$

$$\mathbf{x}(t_0) \in \mathbf{X}_0\,, \quad \mathbf{x}(t_j) \in \mathbf{X}_j \qquad (1.6.4)$$

და კოორტინატებზე და მართვაზე შეზღუდვების დროს

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}_t \;\;,\;\; \mathbf{u} \in \mathbf{U}_t\,. \qquad (1.6.5)$$

$\mathbf{u}^*(t)$ მართვას და $\mathbf{x}^*(t)$ ტრაექტორიას, რომელიც არის ფორმულირებული ამოცანის ამონახსნი, უწოდებენ ოპტიმალურ მართვას და ოპტიმალურ ტრაექტორიას, შესაბამისად.

თავი 2

ოპტიმალური მართვის ცნება

2.1. ოპტიმალური პროგრამული მართვა

განვიხილოთ მართვის ობიექტი, რომელიც აღიწერება შემდეგი განტოლებით:

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \ , \qquad (2.1.1)$$

სადაც $\mathbf{x}(t)$ ობოექტის მდგომარეობის ცვლადების n-განზომილებიანი ვექტორია, $\mathbf{u}(t)$ – მართვის m-განზომილებიანი ვექტორია.

გაშლილი სახით (2.1.1) განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m, t) \ \ (i = 1,2,...,n),$$

სადაც $\varphi_i(x_1,...,x_n,u_1,...,u_m,t)$ $(i = 1,2,...,n)$ – მოცემული ფუნქციებია. იგულისხმება, რომ ისინი არიან უწყვეტი და დიფერენცირებადი $x_1,...,x_n,u \ ,...,u_m,t$ –თი საჭირო რიგამდე.

(2.1.1) განტოლებაში ითვლება, როცა მართვები არიან დროის უცნობი ფუნქციები, რომლებიც განისაზღვრებიან შემდეგი პირობებიდან:

1. მოცემულია (1.1.1) ობიექტის საწყისი

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} \tag{2.1.2}$$

და ბოლო

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^{(1)} \tag{2.1.3}$$

მდგომარეობა, სადაც t_0 – ობიექტის ფუნქციონირების დაწყების, ხოლო t_1 – დამთავრების დროა.

2. მართვის ეფექტურობა ფასდება შემდეგი ინტეგრალით:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt\,, \tag{2.1.4}$$

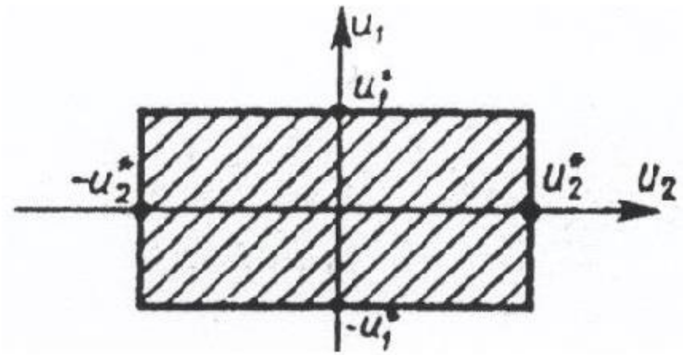
სადაც $\varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ – თავისი არგუმენტების მოცემული (ცნობილი) უწყვეტი ფუნქციაა. შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ მართვის ეფექტურობა მით უფრო მაღალია, რაც უფრო მცირეა ამ ინტერვალის მნიშვნელობა.

3. მართვაზე და მდგომარეობის ცვლადებზე გვაქვს შეზღუდვები, რომლებიც გამოსახავენ მართვის რესურსებზე შეზღუდვებს და მდგომარეობის ცვლადების ცვლილებების დასაშვებ ზღვრებზე შეზღუდვებს. ხშირად შეზღუდვებს მართვაზე აქვთ შემდეგი სახე:

$$|\mathbf{u}_k(t)| \le \mathbf{u}_k^* \;\; (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{2.1.5}$$

სადაც $\mathbf{u}_k^*$ $(k=1,2,\ldots,m)$ – მოცემული რიცხვებია.

$m=2$ დროს $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ ვექტორის წერტილები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ამ უტოლობებს, ავსებენ დაშტრიხულ მართკუთხედს, რომელიც მოცემულია ნახ. 2.1.1. – ზე



ნახ. 2.1.1.

ზოგად შემთხვევაში ვიგულისხმებთ, რომ ობიექტის კონსტრუქციის შესაბამისად, და ასევე ექსპლუატაციის პირობების მიხედვით მოცემულია $u_1,u_2,...,u_m$ – ის სივრცეში ჩაკეტილი სიმრავლე $\mathbf{U}$ და მართვამ შეიძლება მიიღოს დროის თითოეულ მომენტში მნიშვნელობა მხოლოდ ამ სიმრავლედან. სიმრავლის ჩაკეტილობა ნიშნავს, რომ მართვა შეიძლება იმყოფებოდეს არა მხოლოდ სიმრავლის

შიგნით არამედ მის საზღვრებზეც, მაგალითად: $\left(u_1(t)=u_1^*\right)$.

ოპტიმალურ პროგრამულ მართვას უწოდებენ $u_k(t)=u_k^{\circ}(t)$ დროის ფუნქციებს, რომლებიც იღებენ მნიშვნელობებს **U** სიმრავლიდან, რომელთა დროს (2.1.1) ობიექტი (2.1.2) მდგომარეობიდან გადადის (2.1.3) მდგომარეობაში და ამავე დროს (2.1.4) ფუნქციონალი იღებს უმცირეს მნიშვნელობას.

2.2. ოპტიმალური მასტაბილიზირებელი მართვა

2.2.1 აღშფოთებული მოძრაობის განტოლება

დავუშვათ ოპტიმალური პროგრამული მართვა ნაპოვნია. ეს ნიშნავს, რომ ცნობილია ფუნქციები $u_k^*(t)=u_k^0(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$. თუ ჩავსვამთ ამ ფუნქციებს (2.1.1) განტოლებაში და ამოვხსნით განტოლებას (2.1.2) საწყისი პირობების დროს, მივიღებთ ფუნქციებს $x_i^*(t)$ $(i=1,2,\ldots,m)$, რომლებსაც ვუწოდებთ ოპტიმალურ პროგრამულ მოძრაობას, ან ოპტიმალურ პროგრამულ ტრაექტორიას.

სისტემის რეალური მოძრაობა ყოველთვის განსხვავდება პროგრამული მოძრაობისგან შემდეგი მიზეზების გამო:

ა) (2.1,2) საწყისი პირობების არაზუსტი რეალიზაცია;

ბ) სისტემაზე მოქმედი გარე აღშფოთებებზე არასრული ინფორმაცია.;

გ) პროგრამული მართვის არაზუსტი რეალიზაცია და სხვა.

ამიტომ რეალური მოძრაობა აღიწერება ფუნქციებით:

$$x_i(t)=x_i^*(t)+\delta x_i(t);\ u_k(t)=u_k^*+\delta u_k(t)\ \ (i=1,2,...,n),$$

$$(k=1,2,...m), \qquad (2.2.1)$$

სადაც $\delta x_i(t)$ $(i=1,2,...,n)$ – ფაქტიური მოძრაობის პროგრამულიდან გადახრაა. $\delta x_i(t_0)$ $(i=1,2,..n)$ რიცხვები საკმაოდ მცირე, მაგრამ უცნობი რიცხვებია და წარმოადგენენ შემთხვევით ცდომილებებს (2.1.2) საწყისი მნიშვნელობების რეალიზაციის დროს. ამ ცდომილებებზე ჩვეულებრივად ცნობილია მხოლოდ ის, რომ ისინი აკმაყოფილებენ უტოლობას:

$$\sum_{i=1}^{n} dx_i^2(t_0)\le\varepsilon^2, \qquad (2.2.2)$$

სადაც ε ცნობილი რიცხვია.

არ არის რთული აღშფოთებული მოძრაობის განტოლებების მიღება, რომელიც აღწერს ფაქტიური მოძრაობის პროგრამულოვან გადახრას. პროგრამულ მართვას უწოდებენ არააღშფოთებულ მოძრაობას.

მართლაც, თუ მხედველობაში მივიღებთ იმ ფაქტს, რომ (2.2.1) ფუნქციები აკმაყოფილებენ (2.1.1)-ს და განტოლებებს

$$\dot{x}_i^*(t)+\delta\dot{x}_i(t)=\varphi_i\left[x_1^*(t)+\delta x_1(t),\ldots,x_n^*(t)+\delta x_n(t),u_1^*(t)+\right.$$

$$\left.+\delta u_1(t),\ldots,u_m^*(t)+\delta u_m(t),t\right]\quad(i=1,2,\ldots,n)$$

გამოვაკლებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\dot{x}_i^*(t)=\varphi_i\left(x_1^*(\;),\ldots,x_n^*(t),u_1^*(t),\ldots,u_m^*(t),t\right)\quad(i=1,2,\ldots,n)$$

მივიღებთ აღშფოთებული მოძრაობის განტოლე-ბას:

$$\delta\dot{x}_i(t)=\delta\varphi_i\left(\delta x_1,\ldots,\delta x_n,\delta u_1,\ldots,\delta u_m,t\right)\quad(i=1,2,\ldots,n)\tag{2.2.3}$$

სადაც

$$\delta\varphi_i\left(\delta x_1,\ldots,\delta x_n,\delta u_1,\ldots,\delta u_m,t\right)=\varphi_i\left[x_1^*+\delta x_1,\ldots,x_n^*+\delta x_n,u_1^*+\right.$$

$$\left.+\delta u_1,\ldots,u_m^*+\delta u_m,t\right]-\varphi_i\left(x_1^*,\ldots,x_n^*,u_1^*,\ldots,u_m^*,t\right).$$

თუ $\delta\varphi_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ფუნქციებს დავშლით ტეილორის მწკრივად $\left(x_1^*,\ldots,x_n^*,u_1^*,\ldots,u_m^*\right)$ წერტილის მიდამოში, მაშინ (2.2.3) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\delta\dot{x}_i(t)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(t)\delta x_j+\sum_{k=1}^{m}b_{ik}(t)\delta u_k+$$

$$+o_i\left(\delta x_1,\ldots,\delta x_n,\delta u_1,\ldots,\delta u_m,t\right)\;(i=1,2,\ldots n),\tag{2.2.4}$$

სადაც

$$a_{ij}(t)=\left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right|^*;\;\; b_{ik}(t)=\left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_k}\right|^*,$$

სიმბოლო $\big|^*$ – ნიშნავს, რომ კერძო წარმოებულები გამოითვლება წერტილებში $x_1=x_i^*$, $u_k=u_k^*$ $(i=1,2,...n;\ k=1,2,...m)$; $o_i(\partial x_1,...,\partial x_n,\partial u_1,...,\partial u_m,t)$, $(i=1,2,...n)$ - ფუნქციებია, რომელთა დაშლა ტეილორის მწკრივად იწყება მეორე რიგის მცირე-ებიდან.

თუ (2.2.4) განტოლებაში მხედველობაში არ მივიღებთ არაწრფივ წევრებს, მივიღებთ პირველი მიახლოების განტოლებას:

$$\delta\dot{x}_i(t)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(t)\delta x_j+\sum_{k=1}^{m}b_{ik}(t)\delta u_k\;\;(i=1,2,...n).\quad(2.2.5)$$

2.2.2. ცნება ოპტიმალური მასტაბილიზირებელი მართვის შესახებ

(2.2.4) განტოლებების ამონახსნები (2.2.2) სიმრავლიდან აღებული საწყისი პირობების დროს, აღწერს რეალური მოძრაობის პროგრამულიდან გადახრას დროის ყოველ მომენტში. ამ გადახრების რაოდენობრივი დახასიათებისათვის ხშირად იყენებენ ინტეგრალს:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} q_{ii} \delta x_i^2 \right) dt \,, \qquad (2.2.6)$$

სადაც $q_{ii}\ (i = 1,2,...,n)$ – დადებითი რიცხვებია. (2.2.6) ინტეგრალი წარმოადგენს ფართობების ჯამს, რომლებიც „აწონილია“ $q_{ii}\ (i = 1,2,...,n)$ კოეფიციენ-ტებით. ეს ფართობები შეზღუდულია თითოეული მდგომარეობის ცვლადისათვის პროგრამული მოძრაობიდან ფაქტიური მოძრაობის გადახრის კვადრატით. (2.2.6) ინტეგრალი ახასიათებს რეალური მოძრაობის „დაშორებას“ პროგრამულიდან და წარმოადგენს ამ მოძრაობების სიახლოვის „ზომას“.

გამოვიყენოთ $\delta u_k(t)\ (k = 1,2,...,m)$ ამ მოძრაობების დაახლოებისათვის. მაშინ $\delta u_k(t)$-ს $(k = 1,2,...,m)$ უწოდებენ მასტაბილიზირებელ მართვას. ამრიგად, მარეგულირებელი მართვა

$$u_k(t) = u_k^*(t) + \delta u_k(t) \ \ (k = 1,2,...,m)$$

შედგება პროგრამული და მასტაბილიზირებელი მართვებისგან. თუ ამ გამოსახულებას ჩავსვავთ (2.1.5)–ში, მივიღებთ მასტაბილიზირებელ მართვაზე შეზღუდვებს:

$$-u_k^* - u_k^*(t) \le \delta u_k^*(t) \le u_k^* - u_k^*(t) \,. \qquad (2.2.7)$$

ჩვეულებრივად

$$\left|u_k^*(t)\right| \geq \left|\delta u_k(t)\right| \quad (k = 1,2,\dots,m).$$

ეს აიხსნება იმით რომ პროგრამული მართვა უზრუნველყოფს სისტემის ძირითად (პროგრამულ) მოძრაობას, ხოლო მასტაბილიზირბელი მართვა მხოლოდ „აბათილებს" პროგრამული მოძრაობიდან მცირე გადახრებს, უზრუნველყოფს რა მდგრადობას, როცა $t_1 \to \infty$ და პროგრამული მოძრაობის საჭირო სიზუსტეს. ამასთან დაკავშირებით, (2.2.7) შეზღუდვების მაგივრად, რომელიც განსაზღვრავს მასტაბილიზირებელი მართვის დასაშვებ „გასავალს" დროის თითოეულ მომენტში, მასტაბილიზირებელ მართვაზე ადებენ ინტეგრალურ შეზღუდვებს (შეზღუდვა „ენერგიაზე"):

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta u_k^2(t)dt \leq J_{u_k}^* \quad (k = 1,2,\dots,m) \tag{2.2.8}$$

(2.2.8) შეზღუდვების გათვალისწინებისათვის (2.2.6) – ის მაგივრად განიხილავენ სტაბილიზაციის ხარისხის კრიტერიუმს

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^{n} q_{ii} \delta x_i^2 + \sum_{k=1}^{m} \gamma_{kk} \delta u_k^2 \right] dt \tag{2.2.9}$$

სადაც γ_{kk} $(k=1,2,\ldots,m)$ რიცხვები განისაზღვრება გამოსახულებებით J_{uk}^{*} $(k=1,2,\ldots,m)$.

მასტაბილიზირბელი მართვა გამიზნულია (2.2.9) ინტეგრალის მინიმიზაციისათვის. გარდა ამისა, თუ $t_1 \to \infty$, მაშინ ამ ინტეგრალის არსებობისათვის მასტაბილიზირებელმა მართვამ უნდა უზრუნველყოს (2.2.4) სისტემას ნულოვანი ამონახსნის ასიმპტოტური მდგრადობა.

თუ განვსაზღვრავთ მასტაბილიზირებელ მართვას როგორც დროის ცხად ფუნქციას (პროგრამულ მართვის ანალოგიურად), მაშინ ყოველი საწყისი პირობისათვის (2.2.2) სიმრავლიდან მივიღებთ მართვებს $\delta u_k[t,\delta x_1(t_0),\ldots,\delta x_n(t_0)]$ $(k=1,2,\ldots,m)$ რომელთა რეალიზაციისათვის აუცილებელია გავზომოთ მდგომარეობის ცვლადები $t=t_0$ მომენტში, ვინაიდან $\delta x_i(t_0)$ რიცხვები $(i=1,2,\ldots,n)$ უცნობია. გარდა ამისა ფუნქციები $\delta x_k(t,\delta x_1(t_0),\ldots,\delta x_k(t_0))$ იქნება სხვადასხვა თოთოეული $\delta x_i(t_0)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ერთობლიობისათვის.

ამასთან დაკავშირებით ბუნებრივია მოვძებნოთ მასტაბილიზირებელი მართვა, როგორც არა დროის ცხადი ფუნქცია, არამედ მდგომარეობის ცვლადების ფუნქცია

$$\delta u_k(t)=r_k[\delta x_1(t),\ldots,\delta x_n(t),t] \ (k=1,2,\ldots,n). \quad (2.2.10)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ფუნქციების სახე არ არის დამოკიდებული საწყის პირობებზე (2.2.2) სიმრავლიდან. ავხსნათ ეს გარემოება დაწვრილებით.

დავუშვათ, რომ ნაპოვნია მართვა $\delta u_k^0 = r_k^0\left[\delta x_1,...,\delta x_n,t\right]$ $\left(k=1,2,...,m\right)$ რომლის დროსაც (2.2.9) იღებს უმცირეს მნიშვნელობას (2.2.4) სისტემის მოძრაობებზე და ვთქვათ დასაწყისში ოპტომალური სისტემის მოძრაობები რეალიზებული იყო საწყისი პირობების დროს $\delta x_i^*\left(t_0\right)$ $\left(i=1,2,...,n\right)$. ჩავსვათ $\delta u_k^0 = r_k^0$ $\left(k=1,2,...,n\right)$ (1.2.4)–ში, ამოვხსნათ ეს განტოლება და მისი ამონახსნი ჩავსვათ (2.2.9) და გამოვთვალოთ ინტეგრალის მნიშვნელობა. მივიღებთ რიცხვს $J\left(t_0,t_1,\delta x_1^*\left(t_0\right),...,\delta x_n^*\left(t_0\right)\right)$. ის წარმოადგენს (2.2.9) ინტერვალის მნიშვნელობებს შორის უმცირესს, როცა $du_k^0 \neq r_k^0$ $\left(k=1,2,...,m\right)$. დავუშვათ ახლა, რომ (2.2.4) სისტემის მოძრაობის დასაწყისში რეალიზირებული იყო საწყისი პირობები $\delta x_{ii}^{**}\left(t_0\right) \neq \delta x_i^*\left(t_0\right)$ $\left(i=1,2,...,n\right)$, მაშინ $du_k^0 = r_k^0$ $\left(k=1,2,...,m\right)$ – დროს მივიღებთ (2.2.9)–ის სხვა მნიშვნელობას, რომელიც განისაზღვრება, როგორც $J\left(t_0,t_1,\delta x_1^{**}\left(t_0\right),...,\delta x_n^{**}\left(t_0\right)\right)$. ეს რიცხვი ისევ უნდა იყოს უმცირესი ინტერვალის მნიშვნელობებს შორის

(2.2.4) სისტემის ტრაექტორიებზე $u_k \neq r_k^0$ $(k=1,2,...,m)$ და საწყისი პირობების $\delta x_i^{**}(t_0)$ $(i=1,2,...,n)$ დროს.

ახლა შეიძლება განისაზღვროს ოპტიმალური მასტაბილიზირებელი მართვის ცნება, როგორც დროის და მდგომარეობის ცვლადების ფუნქცია, რომლების დროსაც (2.2.4) სისტემის მოძრაობებზე, რომლებიც აღგზნებულია (2.2.2) სიმრავლიდან ნებისმიერი საწყისი გადახრებით, ხარისხის მაჩვენებელი – მაგალითად (2.2.9) იღებს უმცირეს მნიშვნელობას. თუ (2.2.9)–ში ზედა საზღვარი t_1 არ არის შეზღუდული, მაშინ მასტაბილიზირებელმა მართვამ უნდა უზრუნველყოს სისტემის ასიმპტოტური მდგრადობა.

<u>შენიშვნა</u>. მასტაბილიზირებელი მართვა რეალიზირდება რეგულატორის საშუალებით, რომელიც წარმოადგენს რთულ დინამიკურ მოწყობილობას, რომელიც ჩვეულებრივად შედგება სამი კომპონენტისგან: გამზომი ორგანოებისგან, მართვის ალგორითმის რეალიზაციის მოწყობილო-ბისგან და შემსრულებელი ორგანოებისგან.

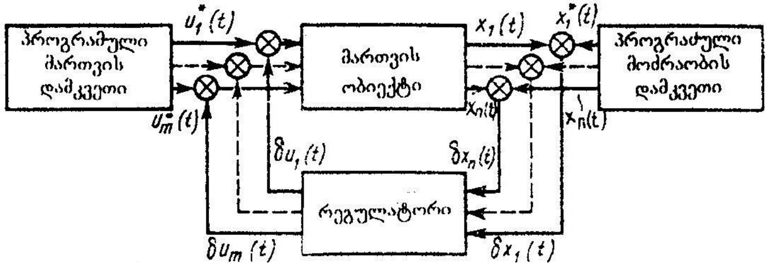
დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც აღწერენ გამზომ და შემსრულებელ ორგანოებს, შედიან (2.2.4) განტოლებაში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ (2.2.4) განტოლება არის ფიზიკური

ობიექტის განტოლება რეგულატორის გამზომი და შემსრულებელი მოწყობილობებით. მაშინ $\delta x_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ გამზომი მოწყობილობების გამოსავალებებია, ხოლო $du_k(t)$ $(k = 1,2,...,m)$ – შემსრულებელი ორგანოების შესავალებია. (2.2.10) განტოლება აღწერს მართვის ალგორითმების რეალიზაციის მოწყობილობას.

2.2.3. პროგრამული მართვისა და სტაბილიზაციის ოპტიმალური სისტემების თავისებურებანი

განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით პროგრამულ და მასტაბილიზირებელ მართვებს შორის კავშირი და განსხვავება. განვიხილოთ ამ მართვების რეალიზაციის საერთო სტრუქტურული სქემა (ნახ. 2.2.1) , რომელშიც მართვის ობიექტი აღიწერება (2.1.1) განტოლებით, ხოლო რეგულატორი რეალიზებს მასტაბილიზირებელ (2.2.10) მართვას

ობიექტი პროგრამული მართვის და მოძრაობის დამკვეთებთან ერთად ქმნის პროგრამული მართვის სისტემას. (ნახ. 2.2.1.)–ზე არ არის ნაჩვენები შემსრულებელი და გამზომი მოწყობილობები, რომლებიც ჩართული არიან ობიექტის მათემატიკურ მოდელში.



ნახ. 2.2.1

პროგრამული მართვის სისტემის და სტაბილიზაციის სისტემის ფუნქციონირების ხერხებს შორის განსხვავება მდგომარეობს შემდეგში:

1. ამ სისტემებიდან პირველისათვის საწყისი პირობები (2.1.2) ცნობილია დაპროექტების დაწყებამდე, ხოლო მეორესათვის საწყისი პირობები უცნობია, ცნობილია, მხოლოდ, რომ ისინი იმყოფებიან ზღვრებში, რომლებიც მყარდებიან (1.2.2.) უტოლობით.
2. პირველ შემთხვევაში მართვები წარმოადგენენ დროის ცხად ფუნქციებს, ხოლო მეორე შემთხვევაში გაზომვადი მდგომარეობის ცვლადების ფუნქციებს (ზოგად შემთხვევაში ასევე დროის). ამრიგად, პირველ შემთხვევაში მართვა ხორციელდება გახსნილი ციკლით, მეორე შემთხვევაში – უკუკავშირის პრინციპით.

3. პროგრამული მართვის სისტემის მუშაობის ეფექტურობა ფასდება განსაზღვრული (2.1.4) ინტერვალით, რომელშიც $\varphi_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$ ფუნქცია განისაზღვრება მართვის ობიექტის ფიზიკური ბუნებით.

სტაბილიზაციის სისტემაში მისი ფუნქციონირების ხარისხის მაჩვენებელი (2.2.9) ხშირად არ არის დაკავშირებული მართვის ობიექტის ფიზიკურ ბუნებასთან, ხოლო მისი კოეფიციენტები q_{ii} $(i=1,2,...,n)$ განისაზღვრება საინჟინრო მოთხოვნებისგან გამომდინარე (გარდამავალი პროცესის დრო რეალურიდან პროგრამულ მოძრაობამდე, გადარეგულირების სიდიდე ამ მოძრაობისას, პროგრამული მოძრაობის დროს დამყარებული ცდომილებები და სხვა). ოპტიმალური მართვის თეორიაში იგულისხმება, რომ მოცემულია (2.2.9) კრიტერიუმი (2.1.4)–ის ანალოგიურად, ხოლო მისი კოეფიციენტების არჩევის საკითხი რჩება ამ თეორიის მიღმა

4. მასტაბილიზირებელი (2.2.10) მართვის აგებისას ჩვეულებრივად გამოიყენება პირველი მოახლოების განტოლებები (2.2.5) ეს აიხსნება იმით, რომ მასტაბილიზირებელი მართვა გამიზნულია δx_i $(i=1,2,...,n)$ გადახრების შემცირებისათვის, ხოლო ამ გადახრების მცირე

მნიშვნელობების დროს (2.2.4) და (5.2.5) განტოლებებს აქვთ ერთმანეთთან მიახლოებული ამონახსნები, ვინაიდან o_i $(i = 1,2,...,n)$ ფუნქციები დამოკიდებულნი არიან ამ გადახრების კვადრატებზე, კუბებზე და ა.შ. და ისინი შეიძლება არ მივიღოთ მხედველობაში.

პირველი მოახლოებების განტოლებების წრფივი ხასიათი არსებითად ამცირებს (2.2.10) მასტაბილიზირებელი მართვის აგების პროცედურებს. პირველი მოახლოების განტოლე-ბების გამოყენება პროგრამული მართვის აგებისათვის, როგორც წესი დაუშვებელია.

2.3. ოპტიმალური მართვის ცნების განზოგადოება

2.3.1. მასტაბილიზირებელი მართვა გარე ზემოქმედებების დროს

აღშფოთებული მოძრაობის მიზეზს წარმოადგენს პროგრამულ რეჟიმში მართვის ობიექტზე მოქმედი გარე ზემოქმედებების შესახებ ცოდნის არასისრულე.

(2.1.1) განტოლებას გარეშე ზემოქმედებების გათვალიწინების დროს აქვს შემდეგი სახე:

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}, t), \tag{2.3.1}$$

სადაც $\mathbf{f}(t)$ - μ განზომილების გარეშე ზემოქმედების ვექტორია.

ვიგულისხმოთ, რომ ამ ფუნქციებს აქვთ ორი მდგენელი: ცნობილი - $f_i^*(t)$ $(i=1,2,...,\mu)$ და უცნობი - $\delta f_i(t)$ $(i=1,2,...,\mu)$.

2.2.1. პუნქტში გადმოცემული მსჯელობის მსგავსად მივიღებთ აღშფოთებული მოძრაობის განტოლებას გარეშე ზემოქმედებების გათვალისწინებით.

პირველ მიახლოებაში ამ განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\delta \dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)\delta x_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(t)\delta u_k + \sum_{\rho=1}^{\mu} \phi_{i\rho}\delta f_\rho \quad (i=1,2,...,n).$$

(2.3.2)

სადაც

$$\phi_{i\rho}(t) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_\rho} \quad (i=1,2,...,n,\ 1,2,\ldots,\mu).$$

$\delta f_i(t)$ ფუნქციების შესახებ ინფორმაციის მოცულობასთან დამოკიდებულებით შეიძლება გავარჩიოთ სამი შემთხვევა:

ა) სრული ინფორმაცია (ეს ნიშნავს, რომ ფუნქციები ცნობილია წინასწარ, მაშინ ისინი შეიძლება ჩართული იყოს $f_i^*(t)$ $(\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mu)$-ების

შემადგენლობაში ან ისინი ზუსტად იზომება ობიექტის მოძრაობის პროცესში);

ბ) $f_i^*(t)$ $(\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mu)$ - შემთხვევითი პროცესია ცნობილი სტატისტიკური მახასიათებლებით;

გ) არ არსებობს რაიმე ინფორმაცია $f_i^*(t)$ $(\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mu)$ ფუნქციების შესახებ, მაგრამ ცნობილია რომ ისინი შეზღუდული არიან რაიმე ცნობილი $\delta\bar{f}$ რიცხვებით:

$$\left|\delta f_i(t)\right| \leq \delta\bar{f}_i,\ (\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mu)\ .$$

გარეშე ზემოქმედებებზე ინფორმაციის მოცულობის მიხედვით შეიძლება გავარჩიოთ ოპტიმალური სისტემების შემდეგი ტიპები:

ა) თანაბრად-ოპტიმალური;

ბ) სტატისტიკური ოპტიმალური;

გ) მინიმაქსური ოპტიმალური.

პირველი ტიპის სისტემებისათვის მასტაბილიზირებელი მართვა მოიძებნება (2.2.9) ფუნქციონალის მინიმუმის პირობიდან (2.3.2) სისტემის ამოხსნებზე. მეორე ტიპის სისტემებში გარეშე ზემოქმედების თითოეულ ზემოქმედებას შეესაბამება (2.2.9) ინტეგრალის თავისი მნიშვნელობა (2.2.10) ცნობილი მართვების დროს, ამიტომ მასტაბილიზირებელი მართვის ეფექტურობის ზომად გამოიყენება ამ ინტეგრალის მათემატიკური ლოდინი:

$$J_1 = M\left\{\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n} q_{ii}\delta x_i^2 + \sum_{k=1}^{m}\gamma_{kk}\delta u_k^2\right)dt\right\}. \qquad (2.3.3)$$

J_1-ის ფიზიკური აზრი მდგომარეობს იმაში, რომ შემთხვევითი ზემოქმედებები აღაგზნებენ შემთხვევით მოძრაობებს $\delta x_i(t)$ $(\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mu)$ ორდინატებზე. თუ გამოვითვლით (2.2.9) ინტეგრალის მნიშვნელობას შემთხვევითი მოძრაობის თითოეული რეალიზაციისათვის და შემდეგ განვსაზღვრავთ „საშუალო ართმეტიკულს“, მაშინ მივიღებთ J_1-ს მნიშვნელობას. მართვა, რომლის დროსაც J_1 მიაღწევს მინიმუმს, არის ოპტიმალური საშუალოში, რის გამოც სტაბილიზაციის სისტემას უწოდებენ სტატისტიკურად ოპტიმალურს.

გარეშე ზემოქმედებებზე ინფორმაციის არარსებობის დროს გამოიყენება თამაშური მიდგომა ოპტიმალური მართვის განსაზღვრისათვის. ასეთი მიდგომის თანახმად ფუნქციები $\delta f_i(t)$ $(\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mu)$ ითვლება „მართვებად“ და განისაზღვრებიან (2.2.9) ინტეგრალის მაქსიმიზაციის პირობიდან. ეს მართვები უზრუნველყოფენ საუკეთესო შედეგს ყველაზე უარესი გარეშე ზემოქმედების დროს ((1.2.9) ფუნქციონალის მაქსიმალური მნიშვნელობის მინიმუმი). ამიტომ სისტემებს ასეთი მართვით უწოდებენ მინიმაქსურად ოპტიმალურს.

2.3.2. მასტაბილიზირებელი მართვის განტოლების ზოგადი ფორმა

ზოგად შემთხვევაში მასტაბილიზირებელი მართვა აღიწერება არა (2.2.10) ალგებრული განტოლებებით, არამედ შემდეგი სახის დიფერენციალური განტოლებებით:

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \varphi_p\left(\mathbf{x}_p, \delta\mathbf{x}, t\right), \qquad (2.3.4)$$

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{r}_p\left(\mathbf{x}_p, \delta\mathbf{x}, t\right), \qquad (2.3.5)$$

სადაც $\mathbf{x}_p$ - მმართველი მოწყობილობის (რეგულატორის) მდგომარეობის ცვლადების n_p განზომილების ვექტორია, $\varphi_p\left(\mathbf{x}_p, \delta\mathbf{x}, t\right)$, $\mathbf{r}_p\left(\mathbf{x}_p, \delta\mathbf{x}, t\right)$ - n_p და m განზომილების ვექტორებია, შესაბამისად.

რიგ შემთხვევაში არ არის შესაძლებელი გაიზომოს მართვის ობიექტის ყველა მდგომარეობის ცვლადი.

დავუშვათ იზომება ზოგიერთი $y_1(t), \ldots, y_r(t)$ ცვლადი, რომლებიც დაკავშირებული არიან ობიექტის მდგომარეობის ცვლადებთან შემდეგი თანაფარდობებით:

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}\left(\delta\mathbf{x}, t\right), \qquad (2.3.6)$$

სადაც $\mathbf{y}(t)$ - გაზომილი ცვლადების r განზომილებიანი ვექტორია.

ასეთ შემთხვევაში რეგულატორის განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \varphi_p\left(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}, t\right), \tag{2.3.7}$$

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{r}_p\left(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}, t\right). \tag{2.3.8}$$

შემდგომში გამოვტოვებთ δ სიმბოლოს (2.2.2), . . ., (2.2.5), (2.2.9), (2.2.10) გამოსახულებებში, რომლებიც მიეკუთვნებიან სტაბილიზაციის სისტემებს. თუ განზოგადოების თვალსაზრისით (2.2.9) ინტეგრალის ინტეგრალქვეშ მდგომ ფუნქციას შევცვლით φ_0 ფუნქციით, მაშინ მართვის ობიექტის მოდელი და მართვის მიზნების მოდელი (მართვის თვისებრიობის კრიტერიუმი) პროგრამული მართვის და სტაბილიზაციის სისტემებში ერთმანეთს დაემთხვევა. ეს ბუნებრივია, რადგან მათემატიკური თვალსაზრისით არ არის არსებითი ამ მოდელების წარმოშობა.

δ სიმბოლოს უგუნველყოფით პირველი მიახლოების (2.3.2) განტოლება სარეგულირო ცვლადებისათვის შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგ მატრიცულ ფორმაში:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \boldsymbol{\psi}(t)\mathbf{f}\,, \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{N}(t)\mathbf{x}\,, \tag{2.3.9}$$

სადაც $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ - მატრიცებია, რომელთა ელემენტებია დროის ცნობილი ფუნქციები. ამ მატრიცებს აქვთ განზომილებები - $n\times n$, $n\times m$, $n\times\mu$, $m\times n$, შესაბამისად.

(2.3.6) კავშირი ობიექტის მდგომარეობის ცვლადებსა და გაზომილ ცვლადებს შორის ხშირ შემთხვევაში შესაძლებელია გაწრფევებული იყოს და მაშინ ის გაზომვების ხმაურის გათვალისწინებით იღებს შემდეგ სახეს:

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}(t)\mathbf{x} + \boldsymbol{\chi}(t), \tag{2.3.10}$$

სადაც $\boldsymbol{\chi}(t)$ - გაზომვის ხმაურის r განზომილებიანი ვექტორია, $\mathbf{D}(t)$ - მოცემული მატრიცაა $n\times r$ განზომილების.

მმართველი მოწყობილობა (რეგულატორი) ხშირად აღიწერება არა (2.3.7) - (2.3.8) განტოლებებით, არამედ შემდეგი სახის წრფივი განტოლებებით:

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p(t)\mathbf{x}_p + \mathbf{B}_p(t)\mathbf{y}, \tag{2.3.11}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}_p(t)\mathbf{x}_p + \mathbf{F}_p(t)\mathbf{y}, \tag{2.3.12}$$

სადაც $\mathbf{A}_p(t)$, $\mathbf{B}_p(t)$, $\mathbf{D}_p(t)$, $F_p(t)$ - მატრიცებია, განზომილებებით - $n_p\times n_p$, $n_p\times r$, $m\times n_p$, $m\times r$, შესაბამისად.

ხშირ შემთხვევაში რეგულატორი შეიცავს ეგმ-ს. ასეთ შემთხვევაში ის აღიწერება სხვაობითი განტოლებით:

$$\mathbf{x}_p[(k+1)T] = \mathbf{\Phi}_p(kT)\mathbf{x}_p(kT) + \mathbf{R}_p(kT)\mathbf{y}(kT) \quad (i = 0,1,2,\ldots), \tag{2.3.13}$$

$$\mathbf{u}(kT) = \mathbf{D}_p(kT)\mathbf{x}_p(kT) + \mathbf{F}_p(kT)\mathbf{y}(kT), \tag{2.3.14}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT), \quad kT \le t \le (k+1)\mathrm{T} \ \ (\mathrm{k} = 0,1,2,\ldots), \tag{2.3.15}$$

სადაც T - რეგულატორის დისკრეტიზაციის ინტერვალია, $\mathbf{\Phi}_p$, $\mathbf{R}_p$, $\mathbf{D}_p$, $\mathbf{F}_p$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ - შესაბამისი განზომილების რიცხვითი მატრიცებია. ვინაიდან (2.3.13) – (2.3.15) რეგულატორის მუშაობისათვის საკმარისია $\mathbf{y}$ - ვექტორის გაზომვა დროის დისკრეტულ მომენტებში $0, T, 2T, 3T$ და ა.შ., ამიტომ დისკრეტული რეგულატორის პარამეტრების განსაზღვრისათვის ბუნებრივია ვისარგებლოთ ობიექტის დიკრეტულუ მოდელით (2.3.9) და (2.3.10). ასეთ მოდელს $\mathbf{f}(t) = \boldsymbol{\chi}(t) = 0$ დროს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{\Phi}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{R}(kT)\mathbf{u}(kT), \\ &\boldsymbol{\theta}(kT) = \mathbf{N}(kT)\mathbf{x}(kT), \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{D}(kT)\mathbf{x}(kT) \ \ (\mathrm{k} = 0,1,2,\ldots). \tag{2.3.17}$$

$\mathbf{\Phi}(kT)$ და $\mathbf{\Phi}(kT)$ $(k = 0,1,2,...)$ - მატრიცები შეიძლება აგებული იყოს $\mathbf{A}(t)$ და $\mathbf{B}(t)$ მატრიცების საფუძველზე, თუ ვისარგებლებთ კოშის ფორმულით:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}(t_0, t)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{H}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (2.3.18)$$

სადაც $\mathbf{H}(t, t_0)$ - ნორმირებული ფუნდამენტური მატრიცაა. ეს $n \times n$ განზომილების მატრიცა შედგენილია n განზომილებიანი ვექტორებით, რომლებიდანაც პირველი ვექტორი არის

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$

ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი

$$x_1(t_0) = 1, \; x_2(t_0) = \cdots = x_n(t_0) = 0$$

საწყისი მნიშნელობების დროს. მეორე ვექტორი არის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი

$$x_1(t_0) = 0, \; x_2(t_0) = 1, \; x_3(t_0) = \cdots = x_n(t_0) = 0$$

საწყისი მნიშნელობების დროს და ა.შ.

ნამრავლი $\mathbf{H}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)$ - ობიექტის იმპულსური გარდამავალი მატრიცაა. ის შეიძლება მიღებული იყოს ექსპერიმენტალურად, თუ ობიექტის

შესასვლელებზე მივაწოდებთ δ ფუნქციებს (τ მომენტში).

თუ (2.3.18)-ში დავუშვებთ, რომ $t = (k+1)T,\ t_0 = kT$ და მხედველობაში მივიღებთ (2.3.15)-ს, მივიღებთ:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{H}[(k+1)T, kT]\mathbf{x}(kT) + \\ + \left[\int_{kT}^{(k+1)T} \mathbf{H}[(k+1)T, \tau]\mathbf{B}(\tau)d\tau\right]\mathbf{u}(kT), \tag{2.3.19}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\mathbf{\Phi}[(k+1)T] = \mathbf{H}[(k+1)T, kT],\ \mathbf{R}(kT) = \\ = \int_{kT}^{(k+1)T} \mathbf{H}[(k+1)T, \tau]\mathbf{B}(\tau)d\tau\ (\mathrm{k} = 0,1,2,\ldots). \tag{2.3.20}$$

დისკრეტულ შემთხვევაში ხარისხის კრიტერიუმს აქვს შემდეგი შემდეგი სახე:

$$J = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}'(kT)\mathbf{Q}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{u}'[(k+1)T]\mathbf{u}[(k+1)T], \tag{2.3.21}$$

სადაც $\mathbf{Q}(kT)$ $(k = 0,1,2,\ldots,N)$ - მოცემული დადებითად განსაზღვრული რიცხვითი მატრიცებია.

სტაციონარულ შემთხვევაში, როდესაც ობიექტის პარამეტრები დროში არ იცვლებიან, მისი (2.3.9) განტოლება ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{\psi}\mathbf{f},\ \boldsymbol{\theta} = \mathbf{N}\mathbf{x}, \tag{2.3.22}$$

სადაც $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\boldsymbol{\psi}$, $\mathbf{N}$ - მოცემული რიცხვითი მატრიცე-ბია.

ობიექტის დისკრეტული მოდელს, რომელიც აღიწერება (2.3.22) განტოლებით, აქვს შემდეგი სახე ($\mathbf{f}=0$ დროს):

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}[(k+1)T]=\mathbf{\Phi x}(kT)+\mathbf{Ru}(kT),\\&\boldsymbol{\theta}(k)=\mathbf{Nx}(kT),\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

სადაც

$$\mathbf{\Phi}=e^{\mathbf{A}T}=\mathbf{E}+\mathbf{A}T+\frac{1}{2!}(\mathbf{A}T)^2+\cdots+\frac{1}{\mu!}(\mathbf{A}T)^\mu+\cdots, \tag{2.3.24}$$

$$\mathbf{R}=\left[\mathbf{E}T+\frac{1}{2!}\mathbf{A}T^2+\cdots+\frac{\mathbf{A}^{\mu-1}T^\mu}{\mu!}+\cdots\right]\mathbf{B}. \tag{2.3.25}$$

(2.3.24) - (2.3.25) თანაფარდობების დამტკიცება არ არის ძნელი, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ სტაციონარულ შემთხვევაში შეიძლება ნორმირებული ფუნდამენტური მატრიცა წარმოდგე-ნილი იყოს შემდეგი ფორმით:

$$\mathbf{H}(t,t_0)=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}.$$

თავი 3

ვარიაციული აღრიცხვის მეთოდები

3.1. ვარიაციული აღრიცხვის მეთოდების შესახებ

ოპტიმალური პროგრამული და მასტაბილიზირებელი მართვის აგების ამოცანები მათი მათემატიკური შინაარსით მიეკუთვნება ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანებს.

ვარიაციული აღრიცხვის მეთოდები პირობითად შეიძლება დაიყოს კლასიკურ და თანამედროვე მეთოდებად.

კლასიკურ მეთოდებს მიეკუთვნება მეთოდები, რომლებიც დაფუძნებულია ეილერის, ლაგრანჟის, იაკობის, ვაიერშტრასის განტოლებებზე. კლასიკურ მეთოდებს მიკუთვნება ასევე პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპი და ბელმანის დინამიკური პროგრამირების მეთოდი.

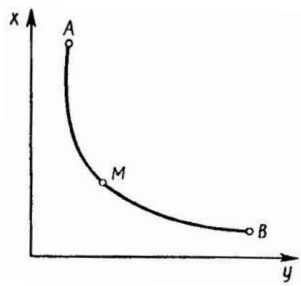
თანამედროვე მეთოდები შემუშავებული იქნა ოპტიმალური მართვის თეორიის ამოცანებისაგან დამოკიდებულებით. მათ ღირსებად კლასიკურთან შედარებით უნდა ჩაითვალოს მართვაზე და მდგომარეობის ცვლადებზე შეზღუდვების გათვალისწინება, მართვის ფუნქციების უფრო ფართო კლასის გამოყენების შესაძლებლობა,

შემგუებლობა გამოთვლითი ტექნიკის გამოყენებას-თან და ა.შ.

3.2. კლასიკური ვარიაციული აღრიცხვის ელემენტები

3.2.1. ვარიაციული აღრიცხვის წარმოშობა

1696 წელს იოჰან ბერნულმა გამოაქვეყნა შენიშვნა „ახალი ამოცანა, რომლის გადასაწყვეტად მოწვეულნი არიან მათემატიკოსები“. მასში დასმული იყო ამოცანა: ვერტიკალურ სიბრტყეში მოცემულია ორი A და B წერტილი (ნახ. 3.1.1). საჭიროა განისაზღვროს AMB წირი, რომლის გასწვრივაც თავისი სიმძიმის მოქმედების გამო მოძრაობისას M სხეული A წერტილიდან B წერტილში მივა უმოკლეს დროში.



ნახ. 3.1.1.

ამ ამოცანის ამონახსნი მიიღეს თვითონ იოჰან ბერნულმა, ასევე ლეიბნიცმა, იაკობ ბერნულმა და ნიუტონმა. უმოკლესი დაშვების წირი აღმოჩნდა ციკლოიდა (ბრახისტოხრონი). ამ სამუშოს შემდეგ გამოჩნდასხვა ასეთი ტიპის სამუშაოები. იოჰან ბერნულმა თავის მოწაფეს ეილერს დაუსვა ამოცანა ასეთი ამოცანების გადაწყვეტისათვის დაემუშავებინა ზოგადი ხერხი - მეთოდი. 1744 წელს გამოვიდა ეილერის შრომა - „მაქსიმუმის და მინიმუმის თვისებების მქონე მრუდე წირების განსაზღვრის ანუ ფართო აზრით იზოპერიმეტრული ამოცანის გადაწყვეტის მეთოდი“. 1759 წელს გამოქვეყნდა ლაგრანჟის შრომა, რომელშიც მოცემული იყო კვლევის ახალი მეთოდები, რომლებმაც შეადგინეს მათემატიკის ახალი ნაწილი, რომელსაც ეილერმა უწოდა ვარიაციულული აღრიცხვა.

3.2.2. ვარიაციული აღრიცხვის ცნებები

$x(t)$ ფუნქციაზე დამოკიდებულ $J[x(t)]$ ცვლად სიდიდეს უწოდებენ ფუნქციონალს, თუ თითოეული $x(t)$ ფუნქციას (ფუნქციათა გარკვეული კლასიდან) შეესაბამება J რიცხვი. ანალოგიურად განისაზ-ღვრება ფუნქციონალები, რომლებიც დამოკიდებულ-ნი არიან რამოდენიმე ფუნქციაზე.

ფუნქციონალი $J[x(t)]$ აღწევს $x^0(t)$-ზე მინიმუმს, თუ მისი მნიშვნელობა $x^0(t)$-თან ახლო ნებისმიერ $\bar{x}(t)$-ზე არ არის ნაკლები, ვიდრე $J[x(t)]$. ე.ი.

$$\delta J = J[\bar{x}(t)] - J[x^0(t)] \geq 0 .$$

ანალოგიურად განისაზღვრება წირი, რომელზე-დაც რეალიზირდება მაქსიმუმი. ასეთ შემთხვევაში $\delta J \leq 0$ ყველა წირისათვის, რომლებიც ახლოს არიან $x^0(t)$-თან.

დავაზუსტოდ წირების სიახლოვის ცნება. წირები $x(t)$ და $\bar{x}(t)$ ახლოს არიან ნულოვანი სიახლოვის აზრით, თუ $x(t) - \bar{x}(t)$ სხვაობის მოდული მცირეა. წირები $x(t)$ და $\bar{x}(t)$ ახლოს არიან პირველი რიგის სიახლოვის აზრით, თუ $x(t) - \bar{x}(t)$ და $\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)$ სხვაობების მოდულები მცირეა. $x(t)$ და $\bar{x}(t)$ ახლოს არიან k-ური რიგის სიახლოვის აზრით, თუ

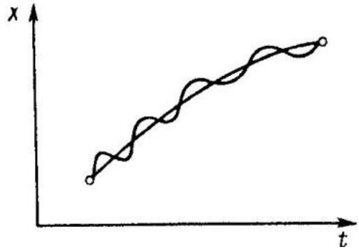
$$\left| x^{(i)}(t) - \bar{x}^{(i)}(t) \right| \leq \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

სადაც $x^{(i)}(t)$ - i-ური რიგის წარმოებულია, ε - საკმაოდ მცირე სიდიდეა.

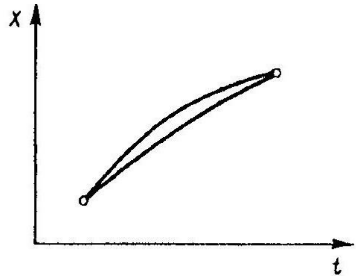
3.1.2 ნახაზზე გამოსახულია წირები, რომლებიც ახლოს არიან ერთმანეთთან ნულოვანი რიგის სიახლოვის აზრით (მათი კოორდინატები ახლოს

არიან, ხოლო მხებების მიმართულებები არსებითად განსხვავდებიან).

3.1.3 ნახაზზე გამოსახულია წირები, რომლებიც ახლოს არიან ერთმანეთთან პირველი რიგის სიახლოვის აზრით.



ნახ. 3.1.2.



ნახ. 3.1.3.

თუ $J[x(t)]$ ფუნქციონალი აღწევს მინიმუმს (ან მაქსიმუმს) $x^0(t)$ წირზე ყველა წირის მიმართ,

რომლებიც ახლოს არიან $x^0(t)$-თან ნულოვანი რიგის სიახლოვით, მაშინ ასეთ მინიმუმს (ან მაქსიმუმს) უწოდებენ ძლიერს.

თუ $J[x(t)]$ ფუნქციონალი აღწევს მინიმუმს (ან მაქსიმუმს) $x^0(t)$ წირზე მხოლოდ იმ $x(t)$ წირების მიმართ, რომლებიც ახლოს არიან $x^0(t)$-თან პირველი რიგის სიახლოვით, მაშინ ასეთ მინიმუმს (ან მაქსიმუმს) უწოდებენ სუსტს. ცხადია, თუ მიიღწევა ძლიერი მინიმუმი (მაქსიმუმი), მაშინ მიიღწევა სუსტიც. შემდგომში, თუ წინასწარ არ არის ნათქვამი საწინააღმდეგო, ვიგულისხმებთ სუსტ მინიმუმს (მაქსიმუმს).

ფუნქციების სხვაობას $x(t)-\bar{x}(t)=\delta x(t)$ უწოდებენ $J[x(t)]$ ფუნქციონალის $x(t)$ არგუმენტის ვარიაციას (ნაზრდს).

3.3. კლასიკური ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანები

3.3.1. ვარიაციული ამოცანა დამაგრებული სასაზღვრო წერტილებით. ექსტრემუმის პირველი აუცილებელი პირობა (ეილერის განტოლება)

გამოვიკვლიოთ ექსტრემუმზე (მინიმუმზე ან მაქსიმუმზე) ფუნქციონალი:

$$J[x(t)]=\int_{t_0}^{t_1}\varphi_0[t,x(t),\dot{x}(t)]dt\,, \qquad (3.3.1)$$

სადაც $\varphi_0[t,x(t),\dot{x}(t)]$ - თავისი არგუმენტების მიმართ უწყვეტი და სამჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

საძებნი ფუნქცია (რომლისთვისაც ეს ფუნქციონა-ლი იღებს ექსტრემალურ მნიშვნელობას) აკმაყოფი-ლებს სასაზღვრო პირობებს:

$$x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1\,. \qquad (3.3.2)$$

(3.3.2) პირობებში (3.3.1) ფუნქციონალის ექსტრემუმის მოძებნის ამოცანას, როდესაც x_0 და x_1 მოცემული რიცხვებია, უწოდებენ ვარიაციულ ამოცანას დამაგრებული სასაზღვრო წერტილებით. უწყვეტ დიფერენცირებად $x(t)$ ფუნქციებს, რომლებიც განსაზღვრული არიან $[t_0,t_1]$-ზე და აკმაყოფილებენ (3.3.2) პირობებს, უწოდებენდასაშვებ ფუნქციებს.

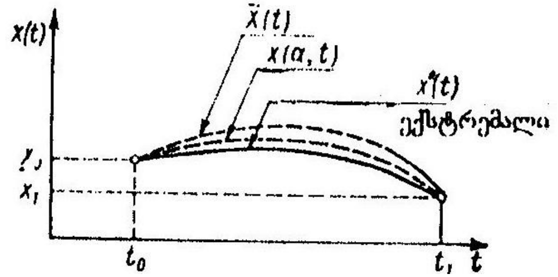
ვარიაციულ ამოცანის ამოხსნაზე გადასვლისას, დავუშვათ, რომ მისი ამონახსნი $x^0(t)$ ნაპოვნია. ავიღოთ რაიმე $\overline{x}(t)$ ფუნქცია და და ჩავრთოდ ის ერთპარამეტრიანი წირების ოჯახში:

$$x(t,\alpha)=x^0(t)+\alpha[\overline{x}(t)-x^0(t)], \qquad (3.3.3)$$

სადაც α - რაიმე რიცხვია.

ბუნებრივია, რომ ვარირებადი წირების ბოლოები დავამაგროთ (3.3.2) წერტილებში (ნახ. 3.3.1), ამიტომ

$$x(t_0,\alpha)=x_0,\ \ x(t_1,\alpha)=x_1. \qquad (3.3.4)$$



ნახ. 3.3.1.

განვიხილოთ მნიშვნელობები, რომელსაც იღებს (3.3.1) ფუნქცონალი წირების (3.3.3) ოჯახზე:

$$J(\alpha)=\int_{t_0}^{t_1}\varphi_0\left[t,\, x^0(t)+\alpha\delta x(t),\, \dot{x}(t)+\alpha\delta\dot{x}(t)\right]dt\,, \quad (3.3.5)$$

სადაც

$$\delta x(t)=\bar{x}(t)-x^0(t),\ \ \delta\dot{x}(t)=\dot{\bar{x}}(t)-\dot{x}^0(t).$$

არ არის ძნელი იმის დანახვა, რომ ცნობილი $x^0(t)$ და $\bar{x}(t)$ წირების დროს (3.3.1) ფუნქციონალი ხდება α -ს ფუნქცია. ეს ფუნქცია აღწევს თავის ექსტრემუმს $\alpha=0$ დროს, ვინაიდან განსაზღვრის თანახმად

$x(t,0)=x^0(t)$. $J(\alpha)$ ფუნქციის ექსტრემუმის აუცილებელ პირობას, როგორც ცნობილია წარმოადგენს ტოლობა:

$$\left.\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=0\,. \qquad (3.3.6)$$

თუ ამ პირობას ჩავსვამთ (3.3.5)-ში, მივიღებთ:

$$\left.\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial x(t,\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial\dot{x}}\frac{\partial\dot{x}(t,\alpha)}{\partial\alpha}\right]dt=$$

$$=\left.\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\delta x(t)+\frac{\partial\varphi_0}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}(t)\right]dt\right|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right|_{\alpha=0}\delta x(t)+\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial\dot{x}}\right|_{\alpha=0}\delta\dot{x}(t)\right]dt=0.$$

ნაწილობრივი ინტეგრირების შემდეგ, გვექნება:

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}(t)dt=\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial\dot{x}}\delta x(t)\right|_{t=t_0}^{t=t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\dot{x}}\delta x(t)dt\,,$$

მაშინ

$$\delta x(t_0)=\delta x(t_1)=0$$

სასაზღვრო პირობების გათვალიწინებით, (3.3.6) შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial \mathrm{x}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\dot{\mathrm{x}}}\right)\delta x(t)dt=0\,. \qquad (3.3.7)$$

ამ გამოსახულებაში $\frac{\partial\varphi_0}{\partial \mathrm{x}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\dot{\mathrm{x}}}$ მამრავლი $x^0(t)$ წირზე, რომელიც რეალიზებს ექსტრემუმს, წარმოადგენს მოცემულ უწყვეტ ფუნქციას, ხოლო მეორე მამრავლი $\delta(t)$ - ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა ($\bar{x}(t)$ ფუნქციის ნებისმირად არჩევის გამო).

ამ პირობებში (3.3.7)-დან გამომდინარეობს ტოლობა:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial \mathrm{x}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\dot{\mathrm{x}}}\equiv 0\,, \qquad (3.3.8)$$

რომელიც სრულდება $x^0(t)$ ექსტრემალზე.

დამტკიცება იმისა, რომ (3.3.8) გამომდინარეობს (3.3.7)-დან, ეყრდნობა ვარიაციული აღრიცხვის ძირთად ლემას, რომელიც ფორმულირდება შემდეგნაირად: თუ ყოველი უწყვეტი $\eta(t)$ ფუნქციისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\eta(t_0)=\eta(t_1)=0$, სრულდება პირობა:

$$\int_{t_0}^{t_1}\mu(t)\eta(t)dt=0\,, \qquad (3.3.9)$$

სადაც $\mu(t)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[t_0,t_1]$ შუალედში, მაშინ $\mu(t)\equiv 0$ ამავე შუალედში.

ლემის დამტკიცებისათვის დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $\bar{t}\in[t_0,t_1]$ წერტილში $\mu(\bar{t})\neq 0$. მაშინ მივიღებთ წინააღმდეგობას ლემის პირობასთან. მართლაც, $\mu(t)$ ფუნქციის უწყვეტობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\mu(\bar{t})\neq 0$, მაშინ $\mu(t)$ ინარჩუნებს ნიშანს $\bar{t}$-ის რაიმე $\bar{t}_0\le\bar{t}\le\bar{t}_1$ მიდამოში. თუ ამოვირჩევთ $\eta(t)$ ფუნქციას ისეთნაირად, რომ ის ინარჩუნებდეს ნიშანს $[\bar{t}_0,\bar{t}_1]\subset[t_0,t_1]$-ში და ნულის ტოლი იყოს ამ შუალედის გარეთ, მაშინ დავასკვნით, რომ ნამრავლი $\mu(t)\eta(t)$ ინარჩუნებს ნიშანს $[\bar{t}_0,\bar{t}_1]$-ში და ნულის ტოლია მის გარეთ, ამიტომ

$$\int_{t_0}^{t_1}\mu(t)\eta(t)dt=\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1}\mu(t)\eta(t)dt\neq 0,$$

ხოლო ეს წინააღმდეგობა ამტკიცებს ლემას.

ამრიგად $x^0(t)$ არის

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial \mathrm{x}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\dot{\mathrm{x}}}=0 \qquad (3.3.10)$$

განტოლების ამონახსნი.

(3.3.10) განტოლებას უწოდებენ ეილერის განტოლებას.

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0(t,x(t),\dot{x}(t))}{\partial\dot{x}}=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t\partial\dot{x}}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial\dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\dot{x}\partial\dot{x}}\ddot{x},$$

მაშინ ეილერის განტოლება (3.3.10) შეიძლება ჩავწეროთ გაშლილი სახით:

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\dot{x}\partial\dot{x}}\ddot{x}-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial\dot{x}}\dot{x}-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t\partial\dot{x}}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}=0\,. \qquad (3.3.11)$$

(3.3.11)-ის ამონახსნებს $x(t,c_1,c_2)$-ს, სადაც c_1 და c_2 - მუდმივებია, რომლებიც განსაზღვრულია (3.3.2) სასაზღვრო პირობებით, უწოდებენ ექსტრემალებს.

მაგალითი 3.3.1. ვიპოვოთ წირი $x^0(t)$, რომელიც გადის მოცემულ x_0 და x_1 წერტილებზე t_0 და t_1 მომენტში, და რომელზეც აღწევს ექსტრემუმს ფუნქციონალი:

$$J=\int_0^t\left(x^2+\tau^2\dot{x}^2\right)dt\,, \qquad (3.3.12)$$

სადაც τ - მოცემული რიცხვია.

ამ შემთხვევაში

$$\varphi_0=x^2+\tau^2\dot{x}^2,$$

ამიტომ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}=2\tau^2\dot{x},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\dot{x}}=0,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\dot{x}\partial\dot{x}}=2\tau^2\ .$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობებს გავითვალისწინებთ (3.3.11)-ში მივიღებთ:

$$-2\tau^2\ddot{x}+2x=0 .$$

ამ ტოლობიდან მივიღებთ, რომ (3.3.12) ფუნქციონალის ექსტრემალებისათვის ეილერის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\ddot{x}-\frac{1}{\tau^2}x=0 . \qquad (3.3.13)$$

ამ განტოლების ამონახსნს წარმოადგენს წირი (რაშიც უშუალო ჩასმით დარწმუნდებით):

$$x(t)=c_1e^{t/\tau}+c_2e^{-t/\tau} . \qquad (3.3.14)$$

სასაზღვრო პირობების გამოყენებით, განვსაზღვროთ c_1 და c_2 მუდმივები მნიშვნელობები განტოლე-ბებიდან:

$$x_0=c_1e^{t_0/\tau}+c_2e^{-t_0/\tau} ,$$

$$x_1=c_1e^{t_1/\tau}+c_2e^{-t_1/\tau} .$$

მივიღებთ:

$$c_1=\frac{x_0e^{-t_1/\tau}-x_1c_2e^{-t_0/\tau}}{e^{(t_0-t_1)/\tau}-e^{-(t_0-t_1)/\tau}},\ c_2=\frac{x_1e^{-t_1/\tau}-x_0c_2e^{-t_0/\tau}}{e^{(t_0-t_1)/\tau}-e^{-(t_0-t_1)/\tau}} .$$

(3.3.15)

3.3.2. ეილერ-პუასონის განტოლება

გამოვიკვლიოთ ექსტრემუმზე ფუნქციონალი:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0[t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)]dt\ , \qquad (3.3.16)$$

რომელშიც φ_0 ფუნქცია ითვლება დიფერენცირებად ფუნქციად თავისი არგუმენტების მიმართ საჭირო რიცხვჯერ.

დავუშვათ სასაზღვრო პირობებს აქვს სახე:

$$x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = x_0^{(1)},\ x(t_1) = x_1,\ \dot{x}(t_1) = x_1^{(1)}, \qquad (3.3.17)$$

სადაც $x_0,\ x_0^{(1)},\ x_1,\ x_1^{(1)}$ - მოცემული რიცხვებია.

თუ გავიმეორებთ ეილერის განტოლების გამოყვანისას ჩატარებულ თანმიმდევრობას, შეიძლება იმის ჩვენება, რომ (3.3.16) ფუნქციონალის ექსტრემალები წარმოადგენენ შემდეგი განტოლების ამონახსნს:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathrm{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{\mathrm{x}}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \ddot{\mathrm{x}}} = 0\ , \qquad (3.3.18)$$

(3.3.18) განტოლებას უწოდებენ ეილერ-პუასონის განტოლებას. ეს არის მეორე რიგის განტოლება, მისი ამონახსნი $x(t, c_1, c_2, c_3, c_4)$ შეიცავს c_1, c_2, c_3, c_4

მუდმივებს, რომლებიც განისაზღვრებიან (3.3,17) სასაზღვრო პირობებიდან.

მაგალითი 3.3.2. ვიპოვოთ ფუნქციონალის:

$$J=\int_0^t\left(x^2+\tau^4\ddot{x}^2\right)dt\ ,$$

ექსტრემალები (3.3.17) სასაზღვრო პირობების დროს.

პირველ რიგში გამოვთვალოთ;

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial \mathrm{x}}=2x\,,\quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial\ddot{\mathrm{x}}}=2\tau^4\ddot{x}\,,$$

მაშინ ეილერ-პუასონის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$x+\tau^4x^{(4)}=0\ .$$

ამ განტოლების მახასიათებელი პოლინომია:

$$d(s)=\tau^4s^4+1=\left(\tau^2s^2-\sqrt{2}\tau s+1\right)\left(\tau^2s^2+\sqrt{2}\tau s+1\right).$$

მისი ფესვებია:

$$s_{1,2}=-\frac{1}{\sqrt{2}\tau}\pm j\frac{1}{\sqrt{2}\tau},\ s_{3,4}=\frac{1}{\sqrt{2}\tau}\pm j\frac{1}{\sqrt{2}\tau}\ .$$

ამრიგად, ფუნქცონალის ექსტრემალს აქვს სახე:

$$x(t)=c_1e^{-\frac{1}{\sqrt{2}\tau}(1+j)}+c_2e^{-\frac{1}{\sqrt{2}\tau}(1-j)}+c_3e^{\frac{1}{\sqrt{2}\tau}(1+j)}+c_4e^{\frac{1}{\sqrt{2}\tau}(1-j)}\ ,$$

სადაც c_1, c_2, c_3, c_4 მუდმივები განისაზღვრება (3.3.17) სასაზღვრო პირობებიდან.

3.3.3. ვარიაციული ამოცანა მოძრავი საზღვრებით

აქამდე (3.3.1) ფუნქციონალის გამოკვლევისას იგულისხმებოდა, რომ სასაზღვრო წერტილები (t_0, x_0), (t_1, x_1) მოცემული იყო. ეხლა ვგულისხმობთ, რომ ერთი ან ორივე სასაზღვრო წერტილები შეიძლება გადაადგილდნენ. ასეთ შემთხვევაში დასაშვებ წირთა კლასი ფართოვდება, ვინაიდან დასაშვები წირების გარდა, რომლებსაც აქვთ საერთო სასაზღვრო წერტილები საკვლევ წირთან, შეიძლება აღებული იყოს წირები გადაადგილებული სასაზღვრო წერტილებით. ეს ნიშნავს, რომ თუ რაიმე $\mathrm{x}^0(t)$ წირზე (3.3.1) ფუნქციონალი აღწევს ექსტრემუმს ამოცანაში მოძრავი წერტილებით, მაშინ ექსტრემუმი მით უფრო მიიღწევა წირების უფრო ვიწრო კლასისათვის, რომლებსაც გააჩნიათ საერთო სასაზღვრო წერტილები $\mathrm{x}^0(t)$ წირთან, და მაშასადამე $\mathrm{x}(t)$ უნდა იყოს ეილერის (3.3.10) განტოლების ამონახსნი.

ეილერის განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიცავს ორ ნებისმიერ მუდმივს, რომლებიც განისაზღვრებიან სასაზღვრო პირობებიდან დამაგრებული წერტილებიანი ამოცანისათვის, ხოლო მოძრავი

სასაზღვრო წერტილებისას - ტრანსვერსალობის პირობიდან.

ამ პირობებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\left[\varphi_0\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) - \dot{x}(t)\frac{\partial \varphi_0\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)}{\partial \dot{x}}\right]\Bigg|_{t=t_0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_0},$$

(3.3.19)

$$\left[\varphi_0\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) - \dot{x}(t)\frac{\partial \varphi_0\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)}{\partial \dot{x}}\right]\Bigg|_{t=t_1} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1}.$$

(3.3.20)

თუ მარჯვენა სასაზღვრო წერტილი (t_1, x_1) უნდა გადაადგილდეს რაიმე $x_1 = \rho_1(t_1)$ წირზე, მაშინ (3.3.20) პირობები იღებენ სახეს:

$$\left[\varphi_0\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) + \left(\frac{d\rho_1}{dt} - \frac{dx}{dt}\right)\frac{\partial \varphi_0\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)}{\partial \dot{x}}\right]\Bigg|_{t=t_1} = 0.$$

ანალოგიურ სახეს იღებენ (3.3.19) პირობები, თუ მარცხენა სასაზღვრო წერტილი (t_0, x_0) გადაადგილდება $x_0 = \rho_0(t_0)$ წირზე.

(3.3.19), (3.3.20) თანაფარდობები წარმოადგენენ ოთხ განტოლებას ოთხი უცნობის - t_0, t_1 და ნებისმიერი ცვლადების c_1 და c_2 განსაზღვრისათვის, რომლებიც შედიან ეილერის ზოგად განტოლებაში. ხშირ შემთხვევაში t_0 და t_1 მოცემულია, ე.ი. (t_0, x_0) და (t_1, x_1) წერტილებს შეუძლიათ გადაადგილდნენ მხოლოდ ვერტიკალურად. ასეთ შემთხვევაში (3.3.19), (3.3.20) პირობები იღებს შემდეგ სახეს:

$$\left.\frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_0} = 0\,, \quad \left.\frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1} = 0\,. \tag{3.3.21}$$

მაგალითი 3.3.3.

ვიპოვოთ (3.3.12) ფუნქციონალის ექსტრემალი მოცემული t_0, t_1 და ნებისმიერი x_1 და x_2 დროს. (3.3.21)-ის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$\left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_0} = 2\tau^2 \dot{x}(t_0) = 0\,, \quad \left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1} = 2\tau^2 \dot{x}(t_1) = 0\,.$$

თუ ჩავსვამთ ამ ტოლობებში (3.3.14) ამონახსნს, გვექნება:

$$c_1 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t_0}{\tau}} + c_2 \frac{1}{\tau} e^{--\frac{t_0}{\tau}} = 0\,,$$

$$c_1 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t_1}{\tau}} + c_2 \frac{1}{\tau} e^{--\frac{t_1}{\tau}} = 0 .$$

აქედან გამოდინარეობს, რომ $c_1 = c_2 = 0$, ამრიგად (3.3.12) ფუნქციონალის ექსტრემალს მოძრავი საზღვრებისას წარმოადგენს $x(t) \equiv 0$.

თუ ვიგულსხმებთ ეხლა, რომ x_1 და x_2 ერთად არ არის ფიქსირებული t_0 და t_1, მაშინ (3.3.19), (3.3.20)-ის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$x^2(t_0) + \tau^2 \dot{x}(t_0) - 2\tau^2 \dot{x}(t_0) x(t_0) = 0, \; 2\tau^2 \dot{x}(t_0) = 0 ,$$

$$x^2(t_1) + \tau^2 \dot{x}(t_1) - 2\tau^2 \dot{x}(t_1) x(t_1) = 0, \; 2\tau^2 \dot{x}(t_1) = 0 .$$

ამ განტოლებებიდან გამომდინარეობს, რომ $x(t_0) = x(t_1) = 0$ t_0 და t_1-გან დამოუკიდელად, ამიტომ (3.3.15)-დან კვლავ მივიღებთ $c_1 = c_2 = 0$. ამრიგად, ამ შემთხვევაშიც ექსტრემალს წარმოადგენს $x(t) \equiv 0$.

3.3.4. ექსტრემუმის მეორე აუცილებელი პირობა (ლეჟანდრის პირობა)

დამაგრებული ბოლოიანი (3.3.1) ფუნქციონალის ექსტრემალები აკმაყოფილებენ (3.3.10) განტოლებას, რომელიც გამოსახავს ექსტრემუმის პირველ აუცილებელ პირობას. მაგრამ რჩება გასარკვევი, ანიჭებენ ისინი (3.3.1) ფუნქციონალს მინიმუმს თუ მაქსიმუმს? პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა ლეჟანდრის

თეორემა, რომელიც გამოსახავს ექსტრემუმის მეორე აუცილებელ პირობას.

თეორემა (ლეჟანდრის). იმისათვის, რომ (3.3.1) ფუნქციონალი ამოცანაში დამაგრებული ბოლოებით აღწევდეს $x(t)$ წირზე მინიმუმს (მაქსიმუმს), აუცილებელია, რომ ამ წირის გასწვრივ სრულდებოდეს პირობა:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \geq 0 \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \leq 0 \right) \quad (3.3.22)$$

მაგალითი 3.3.4.

გამოვიკვლიოთ სრულდება თუ არა ეს პირობა (3.3.12) ფუნქციონალის (3.3.14) ექსტრემალისათვის. მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} = 2\tau^2 \geq 0$$

და მაშასადამე (3.3.14) წირებზე (3.3.12) ფუნქციონალი აღწევს მინიმუმს.

3.3.5. ვარიაციული ამოცანები პირობით ექსტრემუმზე. ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება

ვარიაციულ ამოცანებს პირობით ექსტრემუმზე უწოდებენ ამოცანებს, რომლებიც ანიჭებენ ექსტრემუმს ფუნქციონალს, ამასთან სასაზღვრო პირობების გარდა მათ უნდა დააკმაყოფილონ

ზოგიერთი პირობა. მაგალითად, ამ წირებს უნდა ჰქონდეთ განსაზღვრული სიგრძე (იზოპერიმეტრული ამოცანა), ან უნდა რაიმე მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას (ლეჟანდრის ამოცანა), ან მდებარეობდეს გარკვეულ ზედაპირზე.

ადრე განხილული ამოცანა ოპტიმალური პროგრამული მოძრაობის შესახებ წარმოადგენს თავისი მათემატიკური შინაარსით ამოცანას პირობით ექსტრემუმზე, რომელშიც მოითხოვება ისეთი $\mathbf{u}(t)$ და $\mathbf{x}(t)$ ვექტორ-ფუნქციების მოძებნა, რომლებიც მიანიჭებენ (2.1.4), ანუ ფუნქციონალს

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\varphi_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t)dt$$

მინიმუმს და ამავე დროს მათ უნდა დააკმაყოფილონ დიფერენციალური განტოლება:

$$\dot{\mathbf{x}}=\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u},t), \qquad (3.3.23)$$

და ასევე ინტეგრალური შეზღუდვები:

$$\int_{t_0}^{t_1}u_k^2(t)dt\le J_{u_k}^*\,(k=1,2,\ldots,m),\ \int_{t_0}^{t_1}x_i^2(t)dt\le J_{x_i}^*\,(i=1,2,\ldots,n)$$

და (2.1.5) შეზღუდვები, ანუ

$$|u_k(t)|\le u_k^*\ \ (k=1,2,\ldots,m).$$

ჯერჯერობით, მხედველობაში არ მივიღოთ ეს შეზღუდვები და ფუნქციონალში შევიტანოთ მდგომარეობის ვექტორისა და მართვის წარმოებულები.

ამრიგად მოითხოვება ვიპოვოთ ფუნქციონალის

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)dt \tag{3.3.24}$$

ექსტრემალები, რომლებიც აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} \tag{3.3.25}$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^{(1)} \tag{3.3.26}$$

და წარმოადგენს (3.3.23) განტოლების ამონახსნ. უნდა აღინიშნოს, რომ თუ (3.3.24) ფუნქცონალში არ მონაწილეობს $\mathbf{u}(t)$ და $\mathbf{x}(t)$ ვექტორების რომელიმე კომპონენტის წარმოებული, მაშინ ზემოთ მოცემული სასაზღვრო პირობები მისთვის არ იქნება მოცემული.

გადავდივართ რა ამოცანის ამოხსნაზე, შემოვიტ-ანოთ განსახილველად ახალი ფუნქცონალი:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\varphi}_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\psi}, t)dt\,, \tag{3.3.27}$$

რომელშიც

$$\widetilde{\varphi}_0 = \varphi_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) + \boldsymbol{\psi}'(t)[\dot{\mathbf{x}} - \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)], \quad (3.3.28)$$

სადაც $\boldsymbol{\psi}(t)$ - n-ური რიგის ვექტორია, რომლის კომპონენტებია ჯერჯერობით განუსაზღვრელი ფუნქციებია, რომლებსაც უწოდებენ ლაგრანჟის მამრავლებს. ამ მამრავლების დახმარებით (3.3.24) ფუნქციონალის პირობით ექსტრემუმის ამოცანა დაიყვანება (3.3.27) უპირობო ექსტრემუმზე. (3.3.27) ფუნქციონალის უპირობო ექსტრემალებისათვის ეილერის განტოლებებს აქვთ სახე:

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}_0}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left[\psi_i(t) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_i}\right] = 0 \ \ (i = 1,2,\ldots,n),$$

$$(3.3.29)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}_0}{\partial u_k} - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_j}{\partial \dot{u}_k} = 0 \ \ (k = 1,2,\ldots,m),$$

$$(3.3.30)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}_0}{\partial \psi_i} = \dot{x}_i - \varphi_i = 0 \ \ (i = 1,2,\ldots,n). \qquad (3.3.31)$$

განტოლებები (3.3.29), (3.3.30) და (3.3.31) ქმნიან სისტემას $(2n + m)$ განტოლებით, რომლებსაც უწოდებენ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებებს იმავე რაოდენობის $x_i(t), \psi_i(t)(i = 1,2,\ldots,n), u_k(t)(k = 1,2,\ldots,m)$ უცნობების განსასაზღვრავად.

თუ წირები $x_i(t),\ (i=1,2,\ldots,n), u_k(t)(k=1,2,\ldots,m)$ ანიჭებენ უპირობო ექსტრემუმს (3.3.27) ფუნქციონალს, მაშინ მიიღწევა (3.3.24) ფუნქციონალის პირობითი ექსტრემუმი. მართლაც, თუ აღნიშნულ წირებზე მიიღწევა (3.3.27) ფუნქციონალის უპირობო ექსტრემუმი, მაშინ ისინი აკმაყოფილებენ ეილერის განტოლებებს (3.3.29), (3.3.30) და (3.3.31). ეს ნიშნავს (იხილეთ (3.3.28)), რომ ამ წირებზე ფუნქციონალის მნიშვნელობა $J_1 = J$. თუ ისინი ანიჭებენ უპირობო ექსტრემუმს (3.3.27)-ს, მაშინ მიანიჭებენ ექსტრემუმს ასევე წირების უფრო ვიწრო კლასში, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებებს (3.3.23).

შებრუნებული დებულება იმის შესახებ, რომ ფუნქციები $x_i(t),\ (i=1,2,\ldots,n), u_k(t)(k=1,2,\ldots,m)$, რომლებიც ანიჭებენ (3.3.24) ფუნქციონალს პირობით ექსტრემუმს (3.3.23) განტოლების დაკმაყოფილების პირობებში, იქნებიან (3.3.27) ფუნქციონალის უპირობო ექსტრემალები, მოიცემა შემდეგი თეორემის სახით:

თეორემა 3.3.1. თუ ფუნქციები $x_i(t),\ (i=1,2,\ldots,n),$ $u_k(t)(k=1,2,\ldots,m)$ ანიჭებენ (3.3.24) ფუნქციონალს ექსტრემუმს, აკმაყოფილებს (3.3.23) განტოლებებს და (3.3.25), (3.3.26) სასაზღვრო პირობებს, მაშინ არსებობენ ისეთი მამრავლები $\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)$, რომ ეს

ფუნქციები აკმაყოფილებენ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებებს (3.3.27) ფუნქციონალისათვის.

ამოცანებს პირობით ექსტრემუმზე მიეკუთვნება ასევე იზოპერიმეტრული ამოცანა, რომელიც ფორმულირდება შემდეგნაირად: ყველა წირებს შორის, რომლებიც აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს (3.3.25), (3.3.26) და ტოლობებს:

$$\int_{t_0}^{t_1} l_i(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\mathbf{u},\dot{\mathbf{u}},t)dt = J_{l_i}^* \quad (i=1,2,\ldots,\alpha),$$

სადაც $l_i(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\mathbf{u},\dot{\mathbf{u}},t)$ - მოცემული ფუნქციებია, $J_{l_i}^*$ - მოცემული რიცხვებია $(i=1,2,\ldots,\alpha)$. მოითხოვება წირების $x_i(t)$, $u_k(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ $(k=1,2,\ldots,m)$ მოძებნა, რომლებზეც მიიღწევა (3.3.24) ფუნქციონალის ექსტრემუმი.

იზოპერიმეტრული ამოცანა დამხმარე ψ_i მამრავლების შემოტანის გზით (აქ ψ_i - რაიმე რიცხვებია, $(i=1,2,\ldots,\alpha)$) დაიყვანება

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1}\left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^{n}\psi_i l_i\right)dt$$

ფუნქციონალის უპირობო ექსტრემუმის მოძებნის ამოცანაზე.

მაგალითი 3.3.5.

ვიპოვოთ ფუნქციონალის

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\left(qx^2+u^2\right)dt\ \ \left(q>0\right) \qquad (3.3.31)$$

ექსტრემუმი, რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{x}=ax+bu \qquad (3,3.32)$$

და სასაზღვრო პირობის

$$x\left(t_0\right)=x_0,\quad x\left(t_1\right)=x_1 \qquad (3.3.33)$$

პირობით ექსტრემუმზე ამოცანის გადაწყვეტის მეთოდის შესაბამისად შევადგინოთ ფუნქციონალი:

$$\begin{aligned}J&=\int_{t_0}^{t_1}\left[qx^2+u^2+\psi\left(t\right)\left(\dot{x}-ax-bu\right)\right]dt=\\&=\int_{t_0}^{t_1}\tilde{\varphi}_0\left(x,u,\psi\right)dt\end{aligned}. \qquad (3.3.34)$$

ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებებს, ამ ფუნქციონალის უპირობო ექსტრემალებისათვის, აქვთ შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_0}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\tilde{\partial}\varphi_0}{\partial\dot{x}}=0,\quad \frac{\partial\tilde{\varphi}_0}{\partial u}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\varphi}_0}{\partial\dot{u}}=0,\quad \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\psi}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\dot{\psi}}=0.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, იმას რომ

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_0}{\partial\dot{u}}=\frac{\partial\tilde{\varphi}_0}{\partial\dot{\psi}}=0\,,\quad \frac{\tilde{\partial}\varphi_0}{\partial\dot{x}}=\psi\,,$$

ჩავწეროთ ეს განტოლებები შემდეგი სახით:

$$\dot{\psi}=a\psi+2qx,\ 2u=b\psi,\ \dot{x}=ax+bu\,. \qquad (3.3.35)$$

u ცვლადის გამორიცხვით მივიღებთ სისტემას, რომელიც შედგება ორი განტოლებისაგან:

$$\dot{x}=ax+\frac{1}{2}b^2\psi,\ \dot{\psi}=-a\psi+2qx\,.$$

თუ მოვახდენთ პირველი განტოლების დიფერენცირებას, მეორის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\ddot{x}=a\dot{x}+\frac{1}{2}b^2\left(-a\psi+2qx\right).$$

თუ გამოვრიცხავთ ამ განტოლებიდან ცვლადს

$$\psi=\frac{2}{b^2}\left(\dot{x}-ax\right),$$

მივიღებთ საბოლოოდ განტოლებას $x(t)$ ექსტრემა-ლისათვის:

$$\ddot{x}-\left(a^2+qb^2\right)x=0\,. \qquad (3.3.36)$$

ამ განტოლების ამონახსნს აქვს სახე:

$$x(t)=c_1e^{-\frac{t}{\tau}}+c_2e^{--\frac{t}{\tau}}\,, \qquad (3.3.37)$$

სადაც

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{a^2 + qb^2}} .$$

(3.3.34) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინება იძლევა c_1 და c_2 მუდმივების განსაზღვრის საშუალებას.

3.3.6. მაიერისა და ბოლცის ამოცანები

უფრო ზოგად შემთხვევაში (3.3.24) ფუნქციონალს, (3.3.25) და (3.3.26) სასაზღვრო პირობებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$J = q_1 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{u}}, t) dt + q_2 \nu_0\left(\mathbf{x}^{(1)}, t_1\right), \qquad (3.3.38)$$

$$\begin{array}{l} \nu_{j0}\left(\mathbf{x}^{(0)}, t_0\right) = 0,\ \nu_{i1}\left(\mathbf{x}^{(1)}, t_1\right) = 0 \\ \left(\mathrm{j} = 1,2,\ldots,\mathrm{s} \le \mathrm{n},\ \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{p} \le \mathrm{n}\right) \end{array}, \qquad (3.3.39)$$

სადაც $\nu_0\left(\mathbf{x}^{(1)}, t_1\right)$ - მოცემული რიცხვებია, q_1, q_2 - უცნობი რიცხვებია.

თუ (3.3.38)-ში $q_1 \neq 0,\ q_2 \neq 0$, მაშინ ამ ფუნქციონალის ექსტრემალების მოძებნის ამოცანას, რომლებიც აკმაყოფილებენ (3.3.23) განტოლებას და სასაზღვრო პირობებს (3.3.39), უწოდებენ ბოლცის ამოცანას. თუ (3.3.38)-ში $q_1 \neq 0$, მაშინ მას უწოდებენ

მაიერის ამოცანას, ხოლო თუ $q_2 \neq 0$, მაშინ ეს ლაგრანჟის ამოცანაა.

ვაჩვენოთ, რომ ბოლცისა და ლაგრანჟის ამოცანები. მართლაც, თუ (3.3. 31) განტოლებებს დავუმატებთ განტოლებას $\dot{x}_0 = \varphi_0$, ხოლო სასაზღვრო (3.3.39) პირობებს - ტოლობას $x_0(t_0) = 0$, მაშინ (3.3.38) ფუნქციონალი მიიღებს სახეს:

$$J = q_1 x_0(t_1) + q_2 \nu_0 .$$

სამართლიანია შებრუნებულიც. მართლაც, განვიხილოთ

$$J = \nu_0\left(x^{(1)}, t_1\right) \tag{3.3.40}$$

ფუნქციონალის მაგივრად მაიერის ამოცანაში ფუნქციონალი:

$$J = \nu_0\left(x^{(1)}, t_1\right) - \nu_0\left(x^{(0)}, t_0\right). \tag{3.3.41}$$

ვინაიდან $\nu_0\left(x^{(0)}, t_0\right)$ - ცნობილი სიდიდეა, ამიტომ (3.3.40) და (3.3.41) ფუნქციონალების ექსტრემალები ერთმანეთს ემთხვევა.

მეორე მხრივ, არ არის ძნელი იმის დანახვა, რომ

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \nu_0(\mathbf{x}(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \nu_0}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \right) dt ,$$

და ამ ფუნქცონალის ექსტრემუმის ამოცანა (3.3.23) განტოლების დაკმაყოფილებასთან კავშირში, არის ლაგრანჟის ამოცანა.

ვაჩვენოთ ასევე, რომ ბოლცის ამოცანა ექვივალენტურია ლაგრანჟის ამოცანის. ამასთან დაკავშირებით (3.3.39) ფუნქციონალი წარმოვად-გინოთ შემდეგნაირად:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(q_1 \varphi_0 + q_2 x_{n+1} \right) dt \,,$$

(3.3.23) განტოლებებს დავუმატოდ განტოლება $\dot{x}_{n+1} = 0$, ხოლო სასაზღვრო (3.3.39) პირობებს - ტოლობა:

$$x_{n+1}(t_0) = {}^{v_0}\!\big/\!{}_{(t - t_0)} \,.$$

მაშინ კავშირის (3.3.23) განტოლებიდან გამომდინარეობს

$$x_{n+1}(t_0) = const = {}^{v_0}\!\big/\!{}_{(t - t_0)} \,,$$

და ცხადია, რომ ბოლცისა და ლაგრანჟის ამოცანები ექვივალენტურია. ვარიაციული ამოცანის ამა თუ იმ ფორმით არჩევა განისაზღვრება მისი ფორმული-რების მოხერხებულებაზე მოსაზრებით.

უნდა აღინიშნოს, რომ ოპტიმალური მართვის ამოცანებისაგან დაკავშირებით ეილერის, ეილერ-

ლაგრანჟის განტოლებები მიღებულია ასევე დისკრეტული და განაწილებულ პარამეტრებიანი სისტემებისათვის.

თავი 4

მაქსიმუმის პრინციპი

4.1. ოპტიმალური მართვის ზოგადი ამოცანის შესახებ

მართვის სისტემების განვითარებამ, მოთხოვნების გამკაცრებამ მათი სიზუსტისადმი გაბარიტების და რესურსებისადმი შეზღუდვებისას, გამოიწვია XX საუკუნის 40-50 წლებში ვარიაციული აღრიცხვის გამოყენება ოპტიმალური მართვის სიტემების აგებისათვის. თავდაპირველად გამოიყენებოდა კლასიკური ვარიაციული აღრიცხვის მეთოდები, მაგრამ მალე გახდა ცხადი, რომ ახალი ტექნიკის მართვის სისტემების (მაგალითად, რაკეტების გაშვების სისტემები, ოპტიმალური სისტემები სწრაფმოქმედების მიხედვით და ა.შ.) აგებისათვის აუცილებელი იყო ვარიაციული აღრიცხვის შემდგომი განვითარება და ოპტიმალური მართვის მათემატიკური თეორიის შექმნა. საქმე იმაში იყო, რომ მართვაზე შეზღუდვების გამო (მაგალითად, რაკეტის საწვავზე შეზღუდვა, ფრენის ხანგრძლი-ობაზე შეზღუდვა თვითმფრინავის ერთ პუნქტიდან გადაფრენისას და სხვა) ოპტიმალური მართვები აღმოჩნდა უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციები პირველი

გვარის წყვეტის წერტილებით, რომელთა რაოდენობა უცნობი იყო. ეს ეწინააღმდეგებოდა კლასიკურ ვარიაციულ აღრიცხვის დაშვებას ექსტრემალების უწყვეტობის შესახებ.

1954 წელს პროფ. ა. ფელდბაუმმა ინჟინრებისა და მათემატიკოსების ერთობლივ სემინარზე, რომელსაც ხელმძღვანელობდა აკად. ლ. პონტრიაგინი, დასვა ზოგადი ამოცანა ოპტიმალური მართვის პრობლემის შესახებ. 1956-1960 წლებში პონტრიაგინისა და მისი მოწაფეების მიერ შემუშავებული იქნა ოპტიმალური პროცესების მათემატიკური თეორია, რომელიც გადმოცემული იყო მსოფლიოში ცნობილ მონოგრაფიაში. ამ თეორიის ძირითად შედეგს წარმოადგენს „მაქსიმუმის პრინციპი“, რომელიც მიუთითებს ოპტიმალობის აუცილებელ პირობებზე, ოპტიმალური პროგრამული მართვის ამოცანების ფართო წრისათვის.

4.2. ოპტიმალური მართვის ამოცანა როგორც მაიერის ამოცანა

მასალის შემდგომი გადმოცემის მოხერხებულობის მიზნით, ოპტიმალური (პროგრამული) მართვის შესახებ ამოცანის ფორმულირებისას შემოვიფარგლოთ სიმარტივისათვის სტაციონარული (ავტონომური)

ობიექტით და წარმოვადგინოთ ის მაიერის ამოცანის ფორმის სახით.

დავუშვათ მართვის ობიექტი აღიწერება განტოლებით:

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{4.2.1}$$

მართვები $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ ყოველი t-თვის იღებენ მნიშვნელობებს რაიმე ჩაკეტილი $\mathbf{U}$ სიმრავლიდან. ასეთი სიმრავლის როლში შეიძლება ნაგულისხმები იყოს სიმრავლე: $\mathbf{U} = \{u_k(t)\ (\mathrm{k} = 1,2,\ldots,\mathrm{m})\}$ ისეთი, რომ

$$|u_k(t)| \le u_k^* \ (\mathrm{k} = 1,2,\ldots,\mathrm{m}), \tag{4.2.2}$$

სადაც u_k^* $(\mathrm{k} = 1,2,\ldots,\mathrm{m})$ - მოცემული რიცხვებია.

ვუწოდოთ დასაშვები მართვები იმ u_k-ს $(\mathrm{k} = 1,2,\ldots,\mathrm{m})$, რომლებიც წარმოაგენენ უბან-უბან უწყვეტ ფუნქციებს და იღებენ მნიშვნელობებს $\mathbf{U}$ სიმრავლედან.

დასაშვებ მართვებს შორის, რომლებსაც (4.2.1) ობიექტი გადაყავს

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} \tag{4.2.3}$$

მდგომარეობიდან სხვა მოცემულ

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^{(1)} \tag{4.2.4}$$

მდგომარეობაში, უნდა მოიძებნოს ისეთი, რომლისათვისაც ფუნქციონალი

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \tag{4.2.5}$$

იღებს უმცირეს მნიშვნელობას.

უნდა აღინიშნოს, რომ ლაგრანჟის ამოცანისაგან განსხვავებით, რომელიც ადრე 3.3.6 პუნქტში იყო განხილული, აქ ამ ამოცანაში ადგილი აქვს (4.2.2) შეზღუდვებს. გარდა ამისა (4.2.1) და (4.2.5) გამოსახულებებში ფუნქციები φ_0 და φ_i $(i = 1.2, \ldots n)$ არ არიან ცხადად დამოკიდებული დროზე. ობიექტის სტაციონარულობა არ ამცირებს განხილვის ზოგადობას, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში ახალი $x_{n+1} = t$ ცვლადის შემოტანით და (4.2.1)-ში $\dot{x}_{n+1} = 1$ განტოლების დამატებით, მივიღებთ სისტემას, რომლის მარჯვენა ნაწილი არ არის დამოკიდებული ცხადად t დროზე.

ფორმულირებული ამოცანა შეიძლება წარმოდგენილი იყოს როგორც მაიერის ამოცანა. მართლაც, შემოვიტანოთ მდგომარეობის ახალი კოორდინატი x_0, რომელიც აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\dot{x} = \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{4.2.6}$$

და დავუმატოთ (4.2.3) თანაფარდობას ტოლობა:

$$x_0(t_0) = 0, \tag{4.2.7}$$

მაშინ მივიღებთ მაიერის ამოცანას, რომელშიც მოითხოვებაისეთი დასაშვები მართვის მოძებნა, რომელსაც გადა(4.2.1), (4.2.6) „ობიექტი“ (4.2.3), (4.2.7) მდგომარეობიდან (4.2.4) მდგომარეობაში ისეთნა-ირად, რომ t_1 დროის მომენტში x_0 ცვლადმა მიიღოს უმცირესი მნიშვნელობა.

გამოვტოვოთ ჯერჯერობით მართვაზე შეზღუდვები (4.2.2) და დასაშვებ მართვებად მივიღოთ მართვის უწყვეტი ფუნქციები. ჩამოვწეროთ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები, რომლებიც იძლევიან ამ შემთხვევაში განხილული მაიერის ამოცანის გადაწყვეტის საშუალებას.

ეს განტოლებები შეიძლება მიღებული იყოს მარტივად (3.3.29), (3.3.30) განტოლებების საფუძველზე, იმის გათვალისწინებით, რომ φ_0 არ არის დამოკიდებული მართვისა და მდგომარეობის ცვლადების წარმოებულებზე. ამრიგად

$$\dot{\psi} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \psi_j ;\ \psi_0 = -1\ \left(i = 1,2,\ldots,n\right), \quad (4.2.8)$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k} \psi_j = 0\ \left(k = 1,2,\ldots,m\right). \quad (4.2.9)$$

$\psi_i\ \left(i = 1,2,\ldots,n\right)$ - ცვლადებს ხშირად უწოდებენ დამხმარე ცვლადებს, ხოლო მათ განმსაზღვრელ

(4.2.9) განტოლებებს უწოდებენ შეუღლებულ განტოლებათა სისტემას.

ჩავწეროთ (4.2.1), (4.2.8) და (4.2.9) განტოლებები უფრო კომპაქტურ ფორმაში. ამისათვის შემოვიტანოთ განსახილველად $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$, $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ ცვლადების H ფუნქცია:

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad (4.2.10)$$

რომლის გამოყენებით (4.2.1), (4.2.6), (4.2.8) და (4.2.9) შეიძლება წარმოვადგინოთ, რომ

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \qquad (4.2.11)$$

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \qquad (4.2.12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} \quad (k = 0, 1, \ldots, m). \qquad (4.2.13)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ ეს განტოლებები გამოსახავენ $x_0(t_1)$-ის ექსტრემუმის აუცილებელ პირობას, ხოლო მაიერის ამოცანაში მოითხოვება, რომ მოიძებნოს მისი უმცირესი მნიშვნელობა. ამასთან დაკავშირებით (4.2.12), (4.2.13) პირობებს

დავუმატოთ მინიმუმის აუცილებელი პირობა, რომელსაც უწოდებენ ვაიერშტრასის პირობას:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial u_k \partial u_i} \delta u_k \delta u_i \leq 0, \qquad (4.2.14)$$

სადაც δu_k $(\mathrm{k}=1,2,\ldots,m)$ - ოპტიმალური მრთვის უსარულოდ მცირე ვარიაციაა.

4.3. მაქსიმუმის პრინციპი

გავითვალისწინოთ (4.2.2) შეზღუდვა მართვაზე. თუ ოპტიმალური მართვის პროცესში $u_k(\mathrm{t})$ $(\mathrm{k}=1,2,\ldots,m)$ ფუნქციები არ აღწევენ (4.2.2) სიმრავლის საზღვრებს (რაც ნიშნავს $\left|u_k(\mathrm{t}) < u_k^* \;\; (\mathrm{k}=1,2,\ldots,m)\right|$), მაშინ მათთვის სრულდება თანაფარდობები (4.2.13), (4.2.14). მაგრამ ხშირ შემთხვევაში ოპტიმალური მართვა იღებს სასაზღვრო მნიშვნელობებს u_k^* ან $-u_k^*$ $(\mathrm{k}=1,2,\ldots,m)$. გარდა ამისა, ოპტიმალურ მართვას შეუძლია ნახტომით გადავიდეს ერთი საზღვრიდან მეორეზე. ასეთი მართვები უკვე წარმოადგენენ უბან-უბან უწყვეტ დროის ფუნქციებს.

ოპტიმალური მართვის მოხვედრისას **U** სიმრავლის საზღვარზე თანაფარდობები (4.2.13), (4.2.14) ირღვევა. ამ შემთხვევაში ოპტიმალური

მართვები აკმაყოფილებენ ლ. პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპს, რომელიც ჩამოყალიბებულია და დამტიცებულია ქვევით მოვანილი თეორემის სახით.

სანამ გადავალთ თეორემაზე, საჭიროა გარკვეული განმარტებების შემოტანა. ავიღოთ ნებისმიერი დასაშვები $\mathbf{u}(t)$ მართვა, საწყისი $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0,\ x_0(t_0)$ მნიშვნელობის დროს და ვიპოვოთ (4.2.1) ამონახსნი: $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$.

თუ ჩავსვამთ ამ ამონახსნს და $\mathbf{u}(t)$ მართვას (4.2.8)-ში და ჯერჯერობით რაიმე საწყისი $\boldsymbol{\psi}(t_0)$ პირობებისას განვსაზღვრავთ (4.2.8)-ის ამონახსნს: $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$. $\mathbf{x}$ და $\boldsymbol{\psi}$ ვექტორების ფიქსირებული (მუდმივი) მნიშვნელობებისას H ფუნქცია ხდება $\mathbf{u}\in\mathbf{U}$ ვექტორის ფუნქცია. ამ ფუნქციის მაქსიმუმი $\mathbf{u}$-ს მიხედვით ავღნიშნოთ $M(\mathbf{x},\boldsymbol{\psi},\psi_0)$-ით:

$$M(\mathbf{x},\boldsymbol{\psi},\psi_0)=\max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} H(\mathbf{x},\boldsymbol{\psi},\psi_0,\mathbf{u}). \qquad (4.3.1)$$

უწყვეტი $H(\mathbf{x},\boldsymbol{\psi},\psi_0,\mathbf{u})$ ფუნქციის მაქსიმუმი (უდიდესი მნიშვნელობა) შეიძლება მიღწეული იყოს როგორც ამ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილებში, რომლებშიც

$$\frac{\partial H}{\partial u_k}=0\ \ (k=1,2,\ldots,m),\ \ \sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial u_k \partial u_i}\delta u_k \delta u_i<0\,, \quad (4.3.2)$$

ასევე $\mathbf{U}$ სიმრავლის საზღვრებზე u_k^* და $-u_k^*$ $(1,2,\ldots,m)$.

თეორემა 4.3.1 (ლ. პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპი).

ვთქვათ $\mathbf{u}(t),\ t_0 \le t \le t_1$ - ისეთი დასაშვები მართვაა, რომლის შესაბამისი, (4.2.11) განტოლების, ამონახსნები $x_i(t)\ (i=0,1,\ldots,n)$ გამოდიან (4.2.3), (4.2.7)-დან და t_1 მომენტში გადიან $\mathbf{x}^{(1)},\ x_0(t_1)$ წერტილში. ოპტიმალური მართვისათვის (რომლის დროსაც $x_0(t_1)$ იღებს უმცირეს მნიშვნელობას) აუცილებელია ისეთი არანულოვანი უწყვეტი $\psi_1(t),\psi_2(t),\ldots,\psi_n(t)$ ფუნქციების არსებობა, რომლებიც აკმაყოფილებენ (4.2.12) განტოლებას, ნებისმიერი $t\ (t_0 \le t \le t_1)$-თვის $\mathbf{u}\in\mathbf{U}$ ცვლადის ფუნქცია $H(\mathbf{x}(t),\boldsymbol{\psi}(t),\psi_0(t),\mathbf{u})$ აღწევს $\mathbf{u}(t)$-ს დროს მაქსიმუმს

$$H(\mathbf{x}(t),\boldsymbol{\psi}(t),\psi_0(t),\mathbf{u})=M(\mathbf{x}(t),\boldsymbol{\psi}(t),\psi_0(t)). \quad (4.3.3)$$

ამავე დროს დროის სასრულ t_1 მომენტში სრულდება თანაფარდობები:

$$\psi_0(t_1)<0,\quad M(\mathbf{x}(t_1),\boldsymbol{\psi}(t_1),\psi_0(t_1))=0\,. \qquad (4.3.4)$$

თუ $\boldsymbol{\psi}(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ აკმაყოფილებენ (4.2.11), (4.2.12) და (4.3.3), მაშინ t ცვლადის ფუნქციები $\psi_0(t)$ და $M(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0(t))$ ხდებია მუდმივები და ამიტომ (4.3.4) თანაფარდობის შემოწმება არ არის აუცილებელი t_1 მომენტში და ამის გაკეთება შესაძლებელია ნებისმიერ $t\ (t_0 \le t \le t_1)$ მომენტში.

ამ თეორემას საკმაოდ რთული დამტკიცება აქვს, რომელსაც აქ არ მოვიყვანთ.

(4.3.3) და (4.3.4) თანაფარდობები შესაძლებელია ჩაწერილი იყოს უფრო მარტივი ფორმით:

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0, \mathbf{u}) = 0 . \qquad (4.3.5)$$

ამრიგად, თეორემა 4.3.1-ში ცენტრალურს წარმოადგენს მაქსიმუმის (4.3.5) პირობა. ეს ნიშნავს, რომ თუ $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ - ოპტიმალური ხოლო $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ - ოპტიმალური ტრაექტორიები, მაშინ აუცილებლად მოიძებნება ისეთი მუდმივი $\psi_0(t_1) < 0$ და (4.2.12) სისტემის ისეთი ამონახსნე-ბი $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$, რომ $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ცვლადების $H(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1, u_2, \ldots, u_m, \psi_0, \psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))$ ფუნქცია ყველა $t \in [t_0, t_1]$ მიაღწევს მაქსიმუმს $\mathbf{U}$-ზე სწორედ ოპტიმალურ $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ მართვებზე. ამიტომ 4.3.1 თეორემას, რომელიც იძლევა

ოპტიმალობის აუცილებელ პირობას ოპტიმალური მართვის ამოცანებში, უწოდებენ მაქსიმუმის პრინციპს. უნდა აღინიშნოს, რომ $\mathbf{U}$ სიმრავლის შიგა წერტილებში სრულდება (4.2.13), (4.2.14) პირობები, რომლებიც წარმოადგენს (4.3.5)-თვის აუცილებელ პირობას.

4.4. მაქსიმუმის პრინციპის პრაქტიკული გამოყენება

ისმება კითხვა იმის შესახებ, თუ როგორ უნდა გამოვიყენოთ (4.3.5) პირობა, როდესაც $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$ ფუნქციები და ψ_0 მუდმივი უცნობია? ასეთ შემთხვევაში იქცევიან შემდეგნაირად: განიხილავენ $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0)$ ფუნქციას, როგორ $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t) \in \mathbf{U}$ m ცვლადის ფუნქციას, ხოლო $\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}$, ψ_0-ს თვლიან როგორც პარამეტრებს და ხსნიან H ფუნქციის მაქსიზაციის ამოცანას და პოულობენ

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0) \in \mathbf{U} \tag{4.4.1}$$

ფუნქციას, რომელზედაც მიიღწევა H ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა.

რიგ შემთხვევაში (4.4.1) ფუნქცია შეიძლება ჩაიწეროს ცხადი სახით, მაგალითად, თუ (4.2.1)-ის მარჯვენა მხარეს აქვს შემდეგი სტრუქტურა:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \varphi_i^{(1)}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}^{(2)}(\mathbf{x}) u_k \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

ხოლო (4.2.5) ფუნქციონალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება

$$\varphi_0(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{0k}(\mathbf{x}) u_k \ ,$$

U სიმრავლე კი აღიწერება (4.2.2) უტოლობებით, მაშინ

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0, \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_i^{(1)} + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} \psi_i(t) \varphi_{ik}^{(2)}(\mathbf{x}) \right) u_k$$

(4.4.2)

და ეს ფუნქცია აღწერს უდიდეს მნიშვნელობას **U** -ზე წერტილში კოორდინატებით:

$$u_k = \begin{cases} u_k^*, & \text{თუ } \sum_{i=0}^{n} \psi_i \varphi_{ik}(\mathbf{x}) > 0, \\ -u_k^*, & \text{თუ } \sum_{i=0}^{n} \psi_i \varphi_{ik}(\mathbf{x}) < 0, \end{cases}$$

ან

$$u_k(t) = u_k^* sign\left(\sum_{i=0}^{n} \psi_i(t) \varphi_{ik}^{(2)}(\mathbf{x}(t)) \ (k = 1,2,\ldots,m) \right).$$

(4.4.3)

(4.4.3) ფორმულა დიდი მოცულობის ინფორმაციას ოპტიმალური მართვის სტრუქტურის შესახებ: ოპტიმალური მართვის k-ური კოორდინატი წარმოადგენს საფეხუროვან (უბან-უბან მუდმივ) ფუნქციას u_k^* და $-u_k^*$ მნიშვნელობებით, ამასთან გადართვების მომენტები განისაზღვრება პირობით:

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\varphi_{ik}^{(2)}(\mathbf{x}(t)) = 0\,. \qquad (4.4.4)$$

დავუშვათ, (4.4.1) ფუნქცია ცნობილია. განვიხილოთ $2n$ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\dot{x}_i = \varphi(\mathbf{x},(\mathbf{x},\boldsymbol{\psi},\psi_0))\ \ (i = 1,2,\ldots,n), \qquad (4.4.5)$$

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \varphi_j(\mathbf{x},(\mathbf{x},\boldsymbol{\psi},\psi_0))}{\partial x_i}\psi_{\mathrm{j}}\ \ (i = 1,2,\ldots,n). \quad (4.4.6)$$

φ და $\mathbf{u}$ ფუნქციები, რომლებიც შედიან ამ განტოლებების მარჯვენა მხარეში, ცნობილია. (4.4.5) და (4.4.6) სისტემის ზოგადი ამონახსნი დამოკიდებულია ნებისმიერ მუდმივებზე, რომლებიც განისაზღვრებიან (4.2.3) და (4.2.4) სასაზღვრო პირობებიდან. (4.4.5) და (4.4.6) განტოლებების ინტეგრირების ამოცანას, (4.2.3) და (4.2.4) სასაზღვრო პირობებისას, უწოდებენ

სასაზღვრო ამოცანას (ორწერტილოვან სასაზღვრო ამოცანას).

ამრიგად, მაქსიმუმის პრინციპი საშუალზას იძლევა ოპტიმალური პროგრამული მართვის ამოცანა დაყვანილი იყოს სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნაზე.

ამ ამოცანის ამოხსნის სირთულე მდგომარეობს იმაში, რომ (4.4.5) და (4.4.6) განტოლებების ინტეგრირება „პირდაპირ დროში“ არ არის შესაძლებელი, ვინაიდან უცნობია საწყისი პირობები $\psi_{\mathrm{i}}(t_0)$ $(i=1,2,\ldots,n)$. ერთერთი შესაძლო მიდგომა სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნისადმი მდგომარეობს შემდეგში: იღებენ ნებისმიერ $\boldsymbol{\psi}(t_0)=\boldsymbol{\psi}^{(0)}$ ვექტორს და ინტეგრირებენ (4.4.5) და (4.4.6) განტოლებებს ცნობილი საწყისი $\mathbf{x}(t_0)$, $\boldsymbol{\psi}^{(0)}$ პირობების დროს, $t=t_1$ დროს მიღებული $\mathbf{x}(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t)$ ფუნქციებით ამოწმებენ (4.4.5) პირობას. თუ ის დარღვეულია მაშინ იღებენ სხვა $\boldsymbol{\psi}(t_0)=\boldsymbol{\psi}^{(1)}$ ვექტორს და (4.4.5) და (4.4.6)-ის ინტეგრირებით $\mathbf{x}(t_0)$, $\boldsymbol{\psi}^{(1)}(t)$ საწყისი პირობებისას, იღებენ $t=t_1$ დროს ვექტორს $\mathbf{x}(t_1)$.

თუ ის არ ემთხვევა მოცემულს, ვაგრძელებთ პროცესს მანამდე, სანამ არ მოიძებნება ისეთი $\boldsymbol{\psi}(t_0)$ ვექტორი, რომ (4.2.4) პირობა შესრულდეს დასაშვები სიზუსტით. ასეთი მიდგომისას გამოიყენება

გრადიენტული მეთოდები, როდესაც $\boldsymbol{\psi}(t_0)$ განისაზღვრება $\mathbf{x}(t_1)$ ვექტორის მოცემული $\mathbf{x}^{(1)}$ ვექტორისაგან „დაშორების“ მინიმუმის პირობიდან.

გამოთვლით მათემატიკაში შემუშავებულია სასაზღვრო ამოცანების მიახლოებული რიცხვითი ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდი. მრავალ შემთხვევაში არ არის შესაძლებელი (4.3.5) პირობიდან ოპტიმალური (4.4.3) მართვის ცხადი სახის მიღება. მაშინ განტოლებები (4.2.1), (4.2.6), შეუღლებული სისტემა (4.2. 12) და მაქსიმუმის (4.3.5) პირობა ქმნიან მაქსიმუმის პრინციპის სასაზღვრო ამოცანას. ამ ამოცანას აქვს რიგი სპეციპიკური თავისებურებები, რომლებიც აძნელებენ სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის სტანდარტული რიცხვითი მეთოდების გამოყენებას. ასეთ თავისებურებებს მიეკუთვნება $u_k(t)$ $(k = 1,2,\ldots,m)$ ფუნქციების წყვეტები, რომლებიც აკმაყოფილებენ მაქსიმუმის (4.2.14) პირობას, მათი არაერთადერთობა, (4.4.1) დამოკიდებულების არაწრფივი ხასიათი წრფივ სისტემებშიც კი. გარდა ამისა, სასაზღვრო ამოცანების თავისებურებას, რომელიც დაკავშირებულია მაქსიმუმის პრინციპთან იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც შესაძლებელია (4.4.1) მართვების ცხადი სახით განსაზღვრა, წარმოადგენს მათი ცუდი კრებადობა, რაც გამოწვეულია (4.4.5), (4.4.6) სისტემის არამდგრადობით. ცნობილია

მაქსიმუმის პრინციპის სასაზღვრო ამოცანების გადაწყვეტის ხერხები. მაგრამ უნდა აღინიშნოს, რომ მიუხედავად მაქსიმუმის პრინციპის სასაზღვრო ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდისა, თითოეული ოპტიმიზაციის ამოცანის გადაწყვეტის პროცესი წარმოადგენს დამოუკიდებელ შემოქმედებით ამოცანას, რომელიც წყდება დინამიკის კერო სფეროში, რომელსაც მიეკუთვნება მართვის ობიექტი, მისი სპეციფიკური თავისებურებების გათვალისწინებით, რომლებიც გამოიყენება სასაზღვრო ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის კრებადობის გასაუმჯობესებლად.

მაგალითი 4.4.1. საწვავის ხარჯვის ოპტიმალური მართვის აგება

განვიხილოთ მართვის ობიექტი, რომელიც აღიწერება განტოლებით:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u. \end{aligned} \qquad (4.4.7)$$

დავუშვათ, რომ მართვაზე დადებულია შეზღუდვა

$$|u(t)| \le 1. \qquad (4.4.8)$$

ოპტიმიზაციის ფუნქციონალსსაწვავის ხარჯს, აქვს შემდეგი სახე:

$$J=\int_{t_0}^{t_1}|u(t)|dt\,. \qquad (4.4.9)$$

მოცემულია საჭყისი მდგომარეობა

$$x_1(t_0)=x_{10},\;\; x_2(t_0)=x_{20} \qquad (4.4.10)$$

და t_1 დროის მომენტში პირობა:

$$x_1(t_1)=x_2(t_1)=0\,. \qquad (4.4.11)$$

მოითხოვება ისეთი $u(t)$-ს მოძებნა, რომლის დროსაც (4.4.7) ობიექტი გადადის (4.4.10) მდგომარეობიდან (4.4.11) მდგომარეობაში, ამავე დროს სრულდება (4.4.8) და (4.4.9) ფუნქციონალი იღებს უმცირეს მნიშვნელობას.

მაქსიმუმის პრინციპის საფუძველზე ოპტიმალური მართვის განსაზღვრისათვის, შევადგინოთ ფუნქცია:

$$H=-|u|+\psi_1(t)x_2+\psi_2(t)(-x_1+u), \qquad (4.4.12)$$

დამხმარე ცვლადებისათვის განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\psi_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=\psi_2,\;\; \psi_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\psi_1\,. \qquad (4.4.13)$$

$u(t)$ მართვა, რომელიც ანიჭებს (4.4.12) ფუნქციას მაქსიმუმს, განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$u(t)=\begin{cases}0, & \text{თუ} \quad |\psi_2(t)|<1,\\ 1, & \text{თუ} \quad |\psi_2(t)|>1,\\ -1, & \text{თუ} \quad |\psi_2(t)|<-1.\end{cases} \qquad (4.4.14)$$

(4.4.7), (4.4.13), (4.4.14) განტოლებები შეადგენენ სასაზღვრო ამოცანას. ამ ამოცანის გამოკვლევაზე გადასვლისას, ჩავწეროთ (4.4.13) სისტემის ამონახსნი:

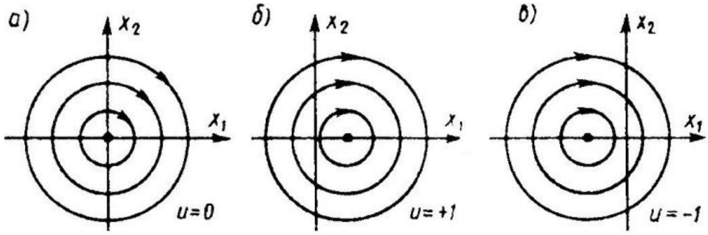
$$\psi_1=-a\cos(t+\alpha), \quad \psi_2=-a\sin(t+\alpha), \quad (4.4.15)$$

სადაც $a>0$, $0\le\alpha\le 2\pi$ - უცნობი რიცხვებია, რომლებიც აუცილებელია განისაზღვრონ ისეთნაირად, რომ (4.4.15) მართვამ გადაიყვანოს (4,4.7) ობიექტი (4,4.11) მდგომარეობაში.

განვსაზღვროთ (4.4.7) სისტემის ამონახსნი, როდესაც $u=0,\ u=1,\ u=-1$. პირველ შემთხვევაში ამ სისტემის ამონახსნს აქვს სახე:

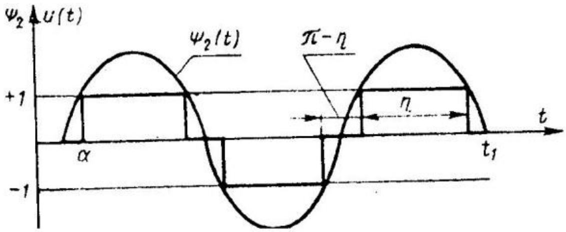
$$x_1=-R\cos(t+\beta), \quad x_2=-R\sin(t+\beta).$$

ის დამოკიდებულია R და β მუდმივებზე, ამასთან $R\ge 0$, $0\le\beta\le 2\pi$. ამ სისტემის ფაზური ტრაექტორიები წრეწირებია ცენტრით კოორდინატთა სათავეში (ნახ. 4,4,1a). (4.4.7) სისტემის ფაზური ტრაექტორიები . როდესაც $u=1,\ u=-1$ ასევე წარმოადგენენ წრეწირებს, რომელთა ცენტრები განლაგებულია წერტილებში (1, 0) (ნახ. 4,4,1 б) და (-1, 0) (ნახ. 4,4,1 в).



ნახ. 4.4.1.

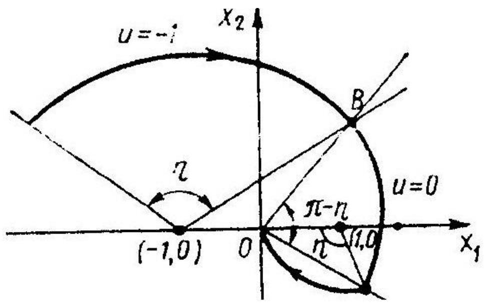
ვთქვათ რაიმე $u(t)$ ოპტიმალური მართვით (4.4.7) ობიექტი გადადის საწყისი $(x_{10},\ x_{20})$ მდგომარეობიდან კოორდინატთა სათავეში. მაშინ ოპტიმალური ტრაექტორიის ბოლო უბანზე $u(t)$ მართვა ტოლია +1-ის ან -1-ის.



ნახ. 4.4.2.

სიცხადისათვის დავუშვათ, რომ ოპტიმალურ მართვას აქვს სახე, რომელიც გამოსახულია ნახ. 4.4.2-ზე. ამ შემთხვევაში ფაზური ტრაექტორიის

უკანასკნელი უბანი წარმოადგენს რკალს ცენტრალური კუთხის სიდიდით η და ცენტრით (1, 0) წერტილში (ნახ. 4.4.3). მართვა $u(t)=0$, როდესაც $t\in[t_1-\pi,\ t_1-\eta]$, და ამიტომ ფაზური ტრაექტორიის შესაბამისი უბანი წარმოადგენს რკალს ცენტრით (0, 0) წერტილში და ცენტრალური კუთხით $\pi-\eta$.



ნახ. 4.4.3.

A წერტილში ხდება $u(t)=0$ მართვის გადართვა $u(t)=1$ მართვაზე, ხოლო B წერტილში $u(t)=-1$-დან $u(t)=0$ მართვაზე. თუ ავიღებთ a და α რიცხვების სხვადასხვა მნიშვნელობებს, მივიღებთ სხვადასხვა η რიცხვებს. თუ თითოეული η რიცხვისათვის ტრაექტორიას ავაგებთ „უკუმოძრაობით“ (როგორც იყო აგებული ტრაექტორია ნახ. 4.4.3-ზე), განვსაზღვრავთ „მოხვდა“ თუ არა ამ ტრაექტორიის

მარცხენა ბოლო $(x_{10},\ x_{20})$ წერტილში. დავუშვათ რაიმე η-თვის OAB ტრაექტორიამ გაიარა $(x_{10},\ x_{20})$ წერტილში. ასეთი η რიცხვისათვის არ არის ძნელი a და α რიცხვების განსაზღვრა, ხოლო მათი საშუალებით ψ_{10} და ψ_{20} საწყისი პირობების დადგენა, რომლებთა საშუალებით შეიძლება სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა.

4.4.1. ტრანსვერსალობის პირობები

ვთქვათ ოპტიმალური პროგრამული მართვის ამოცანაში საწყისი (4.2.3) და საბოლოო (4.2.4) მდგომარეობები არ არის დაფიქსირებული (ხოლო t_0 და t_1 მოცემულია) და შესაძლებელია მათი გადაადგილება ზედაპირებზე: $x_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ტრაექტორიის მარცხენა ბოლო - $\nu_{01}\left(x^{(0)},t_0\right)=0$, ხოლო მარჯვენა - $\nu_{11}\left(x^{(1)},t_1\right)=0$ ზედაპირზე.

თეორემა 4.3.1. (მაქსიმუმის პრინციპი) ამ შემთხვევაში ძირითადად სამართლიანია (ვინაიდან მართვა, ოპტიმალური $x_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ტრაექტორიის მოძრავი ბოლოებისას, ოპტიმალურია კერძო შემთხვევაშიც, როდესაც ბოლოები დამაგრებულია), მაგრამ $2n$ სასაზღვრო პირობები (4.4.5), (4.4.6) სისტემისათვის, რომლის ამონახსნები შეიცავენ $2n$

ნებისმიერ მუდმივს, განისაზღვრება ტრანსვერსალობის პირობიდან:

$$\psi_i(t_0)=\frac{\partial v_{01}}{\partial x_{i0}},\ \psi_i(t_1)=\frac{\partial v_{11}}{\partial x_{i1}}\ (i=1,2,\ldots,n). \quad (4.4.16)$$

თუ $x(t)$ ტრაექტორიის ერთერთი ბოლო, მაგალითად მარჯვენა, დამაგრებულია, მაშინ სასაზღვრო პირობებს აქვთ სახე:

$$x_i(t_1)=x_{i1},\ \psi_i(t_1)=\frac{\partial v_{11}}{\partial x_{i1}}\ (i=1,2,\ldots,n). \quad (4.4.17)$$

ლიტერატურა

1. გუგუშვილი ა., სალუქვაძე მ., ჭიჭინაძე ვ. ოპტიმალური და ადაპტური სისტემები, წიგნი მეორე. გვ. 11-361. თბილისი: სტუ, 1997. 437 გვ.
2. Naidu D.S. Optimal Control Systems. (Electrical engineering textbook series). CRC Press, London, 2003. 433 pp.
3. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные сис.темы. М., Высшая школа, 2003. 263 стр.
4. Ванько В.И, Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление.М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006. 488 стр.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 стр.
6. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 615 стр.