

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ბესარიონ შანშიაშვილი

დინამიკური სისტემების
იდენტიფიკაცია

ლექციების კურსის კონსპექტი

თბილისი 2017

ლექციების კურსში განხილულია როული დინამიკური სისტემების იდენტიფიკაციის მეთოდები.

ნაჩვენებია, რომ უწყვეტი და დისკრეტული არაწრფივი სისტემების პარამეტრული იდენტიფიკაციისას კვაზიგაწრფეების მეთოდის გამოყენება იძლევა საშუალებას არაწრფივი მრავალწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანა დაყვანილი იყოს წრფივ არასტაციონარულ ამოცანაზე. განხილულია იდენტიფიკაციის პროცედურების კრებადობის საკითხები კვაზიგაწრფეების მეთოდით პარამეტრების ჭეშმარიტი მნიშვნელობებისადმი.

განხილულია წრფივი და არაწრფივი დაკვირვებადი სისტემების პარამეტრებისა და მდგომარეობის ერთდროული თანმიმდევრული შეფასებისთვის ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდის გამოყენების თავისებურებები აპრიორული ინფორმაციის არსებობისას არაწრფივი ფუნქციის ფორმაზე.

წრფივი არასტაციონარული სისტემების იდენტიფიკაციის ამოცანა განხილულია სინუსოიდალურ სიგნალზე რეაქციის საფუძველზე. განხილულია ასევე არასტაციონარული დინამიკური სისტემების პარამეტრული იდენტიფიკაციის ამოცანები, როგორც ჩვეულებრივი დაფერენციალური განტოლებების ამოხსნის კოშის ამოცანის შებრუნებული ამოცანა, რომლებიც ეფუძნება ავტორის კვლევებს ამ სფეროში.

იმის გამო, რომ დინამიკური სისტემების იდენტიფიკაციის ამოცანების გადაწყვეტის წარმატება მნიშვნელოვნად დამოკიდებულია სისტემის მართვადობასა და დაკვირვებადობაზე, ამიტომ კონსპექტში გარკვეული ადგილი ეთმობა მართვადობისა და დაკვირვებადობის კრიტერიუმებისა და შესაბამისი მათემატიკური აპარატის განხილვას.

ლექციების კონსპექტში გადმოცემული მასალა წარმოადგენს ავტორის მიერ სისტემების იდენტიფიკაციაში ადრე გამოცემული სახელმძღვანელოს I ნაწილის გაგრძელებას, რის გამოც მასალის დასათაურება კონსპექტში იწყება V თავიდან.

სარჩევი

თავი 5. მართვადობა და დაკვირვებადობა.	5
5.1. მდგომარეობის განტოლება. მდგომარეობის ცვლადები და ვექტორები	5
5.2. წრფივი გარდაქმნები წრფივ სივრცეებში	7
5.3. წრფივი გარდაქმნები დინამიკურ სისტემებში	22
5.4. მართვადობა	34
5.5. დაკვირვებადობა	45
თავი 6. იდენტიფიკაცია კვაზიგაწრფეების მეთოდით	53
6.1. კვაზიგაწრფეების მეთოდის შესახებ	53
6.2. უწყვეტი არაწრფივი სისტემების იდენტიფიკაცია კვაზიგაწრფეების მეთოდით	54
6.3. დისკრეტული სისტემების იდენტიფიკაცია კვაზიგაწრფეების მეთოდით	59
თავი 7. წრფივი არასტაციონარული დინამიკური სისტემების იდენტიფიკაცია	63
7.1. არასტაციონარული სისტემების იდენტიფიკაციის თავისებურებები	63
7.2. არასტაციონარული სისტემების მათემატიკური მოდელები	67
7.3. არასტაციონარული წრფივი სისტემების იდენტიფიკაცია სინუსოიდალურ სიგნალზე რეაქციის საშუალებით	70
7.4. ერთგანზომილებიანი არასტაციონარული სისტემების იდენტიფიკაცია	87
7.5. მრავალგანზომილებიანი არასტაციონარული სისტემების იდენტიფიკაცია	90

თავი 8. იდენტიფიკაცია ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდით	93
8.1. ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდის შესახებ . . .	93
8.2. იდენტიფიკაციის ამოცანის დასმა ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდით	94
8.3. უწყვეტი სისტემის იდენტიფიკაციის ამოცანის გადაწყვეტა ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდის საშუალებით	97
8.4. დისკრეტული სისტემების იდენტიფიკაცია ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდის საშუალებით	104
ლიტერატურა	105

თავი 5

მართვალობა და დაკვირვებალობა

5.1. მდგომარეობის განტოლება. მდგომარეობის ცვლადები და ვიჭტორები

იდენტიფიკაციის ამოცანების გადაწყვეტა დაკვირვებულა ექსპერიმენტის ჩატარებასთან სისტემის შესავალი და გამოსავალი ცვლადების შესახებ ინფორმაციის მოპოვების მიზნით. ამ ინფორმაციის მოსაპოვებლად სისტემის შესავალზე უნდა მიეწოდოს ისეთი სიგნალები, რომლებიც აღაგზნებენ ობიექტის საკუთარი რხევებს, ანუ მათ ზემოქმედება უნდა მოახდინონ სისტემის მდგომარეობის განმსაზღვრელ ყველა ცვლადზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ სისტემა უნდა იყოს მართვადი. გარდა ამისა, გაზომვადი გამოსავალი სიგნალი უნდა შეიცავდეს საკმარის ინფორმაციას იმის შესახებ, თუ რა ხდება სისტემის შიგნით, ანუ ის უნდა იყოს დაკვირვებადი. სისტემა იქნება იდენტიფიცირებადი, თუ მისი მდგომარეობის კოორდინატების გაზომვების საფუძველზე შესაძლებელია სისტემის პარამეტრების მატრიცის ანუ სისტემის მატრიცის განსაზღვრა.

ამრიგად, იდენტიფიკაციის ამოცანების გადაწყვეტის წარმატება მნიშვნელოვნად არის დამოკიდებული საკვლევი სისტემის მართვალობაზე და დაკვირვებალობაზე. მართვალობისა და დაკვირვებალობის კრიტერიუმები დამუშავებულია მდგომარეობის სივრცეში დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილი დინამიკური სისტემებისათვის.

დინამიკური სისტემები შეიძლება აღწერილი იყოს კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებით, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებით, ან სხვაობითი განტოლებებით დეტერმინირებულ ან სტოქასტურ საფუძველზე. სისტემების დინამიკური თვისებები ამ განტოლე-

ბებში განისაზღვრება წარმოებულებით დროის მიხედვით ან მათი შესაბამისი სხვაობითი გამოსახულებებით. სისტემები, რომლებიც აღიწერებიან კერძოწარმოებულნი დიფერენციალური განტოლებებით, შეიძლება აპროქსიმირებული იყოს ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებით, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ დროის მიხედვით წარმოებულებს.

ნებისმიერი n -ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება შეიძლება გარდავქმნათ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემად. სისტემა, რომელიც შედგება n რაოდენობის პირველი რიგის განტოლებებისგან, მთლიანად განსაზღვრულია თუ ცნობილია მისი ყველა კოეფიციენტი და n საწყისი პირობა. საწყისი პირობები ქმნიან n რიგის ვექტორს, რომელიც სრულად განსაზღვრავს სისტემის მდგომარეობას t_0 მომენტში (იგულისხმება, რომ ყველა შესავალი ან აღმშფოთი ზემოქმედება ცნობილია t_0 მომენტში). აღნიშნულ ვექტორს უწოდებენ სისტემის მდგომარეობის ვექტორს t_0 მომენტში, ხოლო მის კომპონენტებს მდგომარეობის ცვლადებს. მიღებულ დიფერენციალურ განტოლებას უწოდებენ დინამიკური სისტემის მდგომარეობის განტოლებას.

ამრიგად, მდგომარეობის სივრცეში იქმნება დინამიკური სისტემის მოდელი, რომელიც შეიცავს შესავალ, მდგომარეობისა და გამოსავალ ცვლადებს, რომლებიც დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან პირველი რიგის განტოლებათა სისტემით, რომელიც ჩაიწერება მატრიცული სახით.

სისტემის მდგომარეობის ვექტორი შეიძლება შედგენილი იყოს მდგომარეობის ცვლადების სხვადასხვა კომბინაციით. მათი განსაზღვრა შესაძლებელია წრფივი გარდაქმნების გამოყენებით.

5.2. \mathbb{R} -ს ვექტორული სივრცეები

5.2.1. ვექტორული სივრცეების თვისებები

ვთქვათ მოცემულია V სივრცე, რომლის ელემენტებია $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$. V -ზე განმარტებულია შეკრების ოპერაცია, რომელიც ყოველ \mathbf{a}, \mathbf{b} წყვილს V -დან შეუასაბამებს V -ს ცალსახად განსაზღვრულ ელემენტს, რომელიც აღნიშნულია $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ -ით, და ასევე α ნამდვილ რიცხვზე გამრავლება, ამასთან ამ რიცხვის ნამრავლი \mathbf{a} ელემენტზე - $\alpha \mathbf{a}$ ცალსახად არის განსაზღვრული და ეკუთვნის V სივრცეებს.

V სივრცის ელემენტებს უწოდებენ ვექტორებს, ხოლო V -ს ნამდვილ ვექტორულ (ან ვექტორულ ან აფინურ) სივრცეს, თუ შემოტანილ ოპერაციებს აქვთ შემდეგი თვისებები:

1. შეკრება კომუტაციურია - $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
2. შეკრება ასოციაციურია - $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;
3. V -ში არსებობს ნულოვანი ელემენტი $\mathbf{0}$, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a} \in V$ -თვის;
4. V -ს ყოველი ელემენტისთვის არსებობს საპირისპირო ელემენტი $-\mathbf{a}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

მარტივად შეიძლება იმის ჩვენება, რომ ნულოვანი ელემენტი ერთადერთია.

შემდეგი თვისებები აკავშირებს რიცხვზე გამრავლების ოპერაციას შეკრების ოპერაციასთან და რიცხვებზე ოპერაციებთან:

5. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}$;
6. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{a}$;
7. $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta \mathbf{a})$;
8. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

ბერძნული მცირე ასოებით აღნიშნულია რიცხვები, ხოლო ლათინური მცირე ასოებით V -ს ელემენტები.

ორ ნამდვილ წრფივ \mathbf{V} და \mathbf{V}' სივრცეებს უწოდებენ იზომორფულს, თუ მათ ვექტორებს შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, ყოველ $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ შეესაბამება $\mathbf{a}' \in \mathbf{V}'$, რომელსაც უწოდებენ \mathbf{a} ვექტორის სახეს, ამასთან, განსხვავებულ ვექტორებს \mathbf{V} -დან აქვთ განსხვავებული სახეები და \mathbf{V}' -ის ნებისმიერი ვექტორი წარმოადგენს \mathbf{V} -ს რომელიმე ვექტორის სახეს, გარდა ამისა ასეთი შესაბამისობისას ორი ვექტორის ჯამის სახე ემთხვევა ამ ვექტორების სახეთა ჯამს:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}' \quad (5.1)$$

და ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის სახე ემთხვევა ვექტორის სახის ამავე რიცხვის სახეს:

$$(\alpha \mathbf{a})' = \alpha \mathbf{a}' \quad (5.2)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ \mathbf{V} და \mathbf{V}' სივრცეებს შორის ურთიერთცალსახა შესაბამისობას, რომელიც აკმაყოფილებს (5.1) და (5.2) პირობებს, უწოდებენ იზომორფულ შესაბამისობას.

5.2.2. სასრულგანზომილებიანი სივრცე

დავუშვათ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ წრფივი \mathbf{V} სივრცის ვექტორებია, ხოლო $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვებია. გამოსახულებას

$$\boldsymbol{\beta} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n \quad (5.3)$$

უწოდებენ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ვექტორების წრფივ კომბინაციას.

თუ (5.3) წრფივი კომბინაცია:

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\alpha_i = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, მაშინ ვექტორების $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ სისტემას უწოდებენ წრფივად დამოუკიდებელს. წინააღმდეგ შემთხვევაში (5.3) სისტემას უწოდებენ წრფივად დამოკიდებელს.

V წრფივ სივრცეს უწოდებენ სასრულგანზომილებიანს, თუ მასში შეიძლება მოიძებნოს ვექტორების მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სასრული სისტემა.

ვექტორების ყოველ ასეთ სისტემას უწოდებენ ბაზას V სივრცეში. სასრულგანზომილებიან წრფივ სივრცეში შეიძლება არსებობდეს მრავალი სხვადასხვა ბაზა.

ვთქვათ წრფივ V სივრცეს აქვს ბაზა:

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \quad (5.4)$$

რომელიც შედგება n ვექტორისაგან, თუ \mathbf{a} ნებისმიერი ვექტორია V -დან მაშინ (5.4) წრფივად დამოუკიდებელი სისტემის მაქსიმალურობიდან გამომდინარეობს, რომ \mathbf{a} ვექტორი წრფივად გამოისახება ამ სივრცის საშუალებით:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \quad (5.5)$$

სადაც α_i ($i=1, 2, \dots, n$) რიცხვებია, თანაც ეს გამოსახულება

\mathbf{a} ვექტორისათვის იქნება ერთადერთი.

სასრულგანზომილებიანი წრფივი V სივრცის ყოველი ბაზა შედგება ვექტორების ერთიდაიგივე რიცხვისაგან. თუ ეს რიცხვი ტოლია n -ის, მაშინ V -ს უწოდებენ n განზომილებიან წრფივ სივრცეს, ხოლო n -ს უწოდებენ ამ სივრცის განზომილებას.

n განზომილებიანი წრფივი სივრცის $n+1$ ვექტორისაგან შედგენილი ნებისმიერი სისტემა წრფივად დამოკიდებელია.

n განზომილებიანი წრფივი სივრცის ვექტორების ყოველი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა შედის ამ სივრცის რაიმე ბაზაში.

ვთქვათ n განზომილებიან V სივრცეში მოცემულია (5.4) ბაზა და ასევე ბაზა:

$$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n \quad (5.6)$$

(5.6) ბაზის ყოველი ვექტორი ისევე როგორც V სივრცის ნებისმიერი ვექტორი ცალსახად წარწერება (5.4) ბაზის საშუალებით:

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^n \tau_{ij} \mathbf{e}_j, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (5.7)$$

მატრიცას

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

რომლის სტრიქონები წარმოადგენს (5.6) სისტემის ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილ სტრიქონებს (5.4) ბაზაში, უწოდებენ (5.4) ბაზის (5.6) ბაზაში გარდაქმნის მატრიცას.

(5.4) და (5.6) ბაზებს შორის კავშირი (5.7)-ს გათვალისწინებით შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

თუ აღვნიშნავთ (5.4) და (5.6) ბაზებს, ჩაწერილს სვეტების სახით, \mathbf{e} და \mathbf{e}' -ით, (5.10) შეიძლება ჩაწეროს ასეთი სახით:

$$\mathbf{e}' = \mathbf{T}\mathbf{e}. \quad (5.10)$$

მეორე მხრივ, თუ \mathbf{T}' არის (5.6) ბაზიდან (5.4) ბაზაში გარდაქმნის მატრიცა, მაშინ

$$\mathbf{e} = \mathbf{T}'\mathbf{e}', \quad (5.11)$$

საიდანაც

$$\mathbf{e} = (\mathbf{T}'\mathbf{T})\mathbf{e}. \quad (5.12)$$

$$\mathbf{e}' = (\mathbf{T}\mathbf{T}')\mathbf{e}'. \quad (5.13)$$

\mathbf{e} და \mathbf{e}' ბაზების წრფივად დამოუკიდებლობის გამო

$$\mathbf{T}\mathbf{T}' = \mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{E}, \quad (5.14)$$

სადაც \mathbf{E} – ერთეულოვანი $n \times n$ მატრიცაა.

(5.14)-დან

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T}^{-1} \quad (5.15)$$

ამით მტკიცდება, რომ გარდაქმნის მატრიცა ერთი ბაზიდან მეორე ბაზაში არის გადაუგვარებელი მატრიცა.

ამრიგად n რიგის ყოველი გადაუგვარებელი კვადრატული მატრიცა ნამდვილი ელემენტებით წარმოადგენს n განზომილებიანი წრფივი სივრცის მოცემული ბაზის რაიმე სხვა ბაზაში გარდაქმნის მატრიცას.

5.2.3. წრფივი გარდაქმნები

ვთქვათ მოცემულია n განზომილებიანი ნამდვილი წრფივი სივრცე, რომელიც აღნიშნულია \mathbf{V}_n -ით. განვიხილოთ ამ სივრცის გარდაქმნა ანუ ასახვა, რომელსაც გადაყავს ამ სივრცის ყოველი \mathbf{a} ვექტორი ამავე \mathbf{V}_n სივრცის \mathbf{a}' ვექტორში. \mathbf{a}' ვექტორს უწოდებენ \mathbf{a} ვექტორის სახეს განხილული გარდაქმნის დროს.

თუ ამ გარდაქმნას აღვნიშნავთ φ -ით, ხოლო \mathbf{a} ვექტორის სახეს არა $\varphi(\mathbf{a})$ -თი, არამედ $\mathbf{a}\varphi$ -ით, მაშინ გვექნება $\mathbf{a}' = \mathbf{a}\varphi$.

წრფივი \mathbf{V}_n სივრცის φ გარდაქმნას უწოდებენ ამ სივრცის წრფივ გარდაქმნას, თუ მისი ნებისმიერი ორი \mathbf{a} და \mathbf{b} ვექტორების ჯამი გადაყავს მათი სახეების ჯამში:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\varphi = \mathbf{a}\varphi + \mathbf{b}\varphi \quad (5.16)$$

და ნებისმიერი \mathbf{a} ვექტორის ნებისმიერ α რიცხვზე ნამრავლი გადაყავს ამ ვექტორის სახის ამ რიცხვზე ნამრავლში:

$$(\alpha\mathbf{a})\varphi = \alpha(\mathbf{a}\varphi). \quad (5.17)$$

ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ წრფივი სივრცის წრფივი გარდაქმნას გადაყავს მოცემული $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია ამ ვექტორების სახეების წრფივ კომბინაციაში (იმავე კოეფიციენტებით):

$$(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n) \varphi = \alpha_1 (\mathbf{a}_1 \varphi) + \alpha_2 (\mathbf{a}_2 \varphi) + \dots + \alpha_n (\mathbf{a}_n \varphi). \quad (5.18)$$

V_n წრფივი სივრცის ნებისმიერი წრფივი გარდაქმნის დროს ნულოვანი ელემენტი 0 რჩება უძრავი:

$$0\varphi = 0, \quad (5.19)$$

ხოლო მოცემული \mathbf{a} ვექტორის მოპირდაპირე $-\mathbf{a}$ ვექტორის სახეს წარმოადგენს ვექტორი რომელიც \mathbf{a} -ს სახის მოპირდაპირეა:

$$(-\mathbf{a})\varphi = -\mathbf{a}\varphi. \quad (5.20)$$

დავუშვათ V_n წრფივი სივრცის რაიმე ბაზაა (5.4) და ისევე როგორც ზევით ამ ბაზას, რომელიც სვეტშია განლაგებული, ავლნიშნოთ \mathbf{e} ვექტორით. ვინაიდან V_n სივრცის ნებისმიერი \mathbf{a} ვექტორი ცალსახად წარმოიდგინება (5.4) ბაზის ვექტორების წრფივი კომბინაციით, ამიტომ (5.18)-ის გამო \mathbf{a} ვექტორის სახე გამოისახება (5.14) ბაზის ვექტორების სახეებით იმავე კოეფიციენტების საშუალებით. სხვა სიტყვებით V_n სივრცის ყოველი წრფივი φ გარდაქმნა განისაზღვრება ფიქსირებული (5.4) ბაზის ვექტორების $\mathbf{e}_1\varphi, \mathbf{e}_2\varphi, \dots, \mathbf{e}_n\varphi$ სახეების მოცემით.

როგორც არ უნდა იყოს V_n სივრცის n ვექტორისაგან შემდგარი დალაგებული სისტემა:

$$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n, \quad (5.21)$$

არსებობს ამავე დროს ერთადერთი, ამ სივრცის წრფივი გარდაქმნა φ , რომ (5.21) სისტემა იქნება (5.14) ბაზის ვექტორების სახე ამ გარდაქმნისას:

$$\mathbf{e}_i\varphi = \mathbf{c}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.22)$$

მტკიცდება ასეთი φ გარდაქმნის არსებობა და ერთადერთობა.

ამრიგად შეიძლება ითქვას, რომ არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა \mathbf{V}_n სივრცის ყველა წრფივ გარდაქმნასა და n ვექტორისაგან შედგენილი ყველა (5.21) სახის დალაგებულ სისტემებს შორის.

ყოველ \mathbf{c}_i ვექტორს გააჩნია გარკვეული წარმოდგენა (5.4) ბაზაში:

$$\mathbf{c}_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \mathbf{e}_j, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (5.23)$$

\mathbf{c}_i ვექტორის კოორდინატებიდან (5.4) ბაზაში შეიძლება შედგენილი იყოს კვადრატული მატრიცა

$$\mathbf{A} = (\alpha_{ij}), \quad (5.24)$$

რომელშიც i -ურ სტრიქონად აიღება \mathbf{c}_i , $i=1,2,\dots,n$ ვექტორის კოორდინატების სტრიქონი. ვინაიდან (5.4) ბაზა იყო აღებული ნებისმიერად, ამიტომ \mathbf{A} მატრიცა იქნება ნებისმიერი n -ური რიგის კვადრატული მატრიცა ნამდვილი ელემენტებით.

ამრიგად ჩვენ გვაქვს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა \mathbf{V}_n სივრცის ყველა წრფივ გარდაქმნასა და ყველა n -ური რიგის კვადრატულ მატრიცებს შორის. ეს შესაბამისობა ცხადია დამოკიდებულია (5.4) ბაზის არჩევაზე.

ვიტყვი, რომ \mathbf{A} მატრიცა განსაზღვრავს წრფივ გარდაქმნას φ -ს (5.4) ბაზაში, ან მოკლედ \mathbf{A} მატრიცა არის φ წრფივი გარდაქმნის მატრიცა (5.4) ბაზაში. თუ $\mathbf{e}\varphi$ -ით ავლნიშნავთ სვეტს, რომელიც შედგენილია (5.4) ბაზის ვექტორების სახეებისაგან, მაშინ (5.22), (5.23) და (5.24) -დან გამომდინარეობს შემდეგი მატრიცული ტოლობა, რომელიც სრულად აღწერს კავშირებს, რომლებიც არსებობენ φ

წრფივ გარდაქმნას, \mathbf{e} ბაზასა და \mathbf{A} მატრიცას შორის, და რომელიც განსაზღვრავს წრფივ გარდაქმნას ამ ბაზაში.

$$\mathbf{e}\varphi = \mathbf{A}\mathbf{e}. \quad (5.25)$$

ვაჩვენოთ, რომ თუ ცნობილია φ წრფივი გარდაქმნის \mathbf{A} მატრიცა (5.4) ბაზაში, მაშინ \mathbf{a} ვექტორის კოორდინატებით ამ ბაზაში შეიძლება მისი სახის $\mathbf{a}\varphi$ -ის კოორდინატები განისაზღვროს შემდეგნაირად, თუ

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i, \quad (5.26)$$

მაშინ

$$\mathbf{a}\varphi = \sum_{i=1}^n a_i (\mathbf{e}_i), \quad (5.27)$$

რაც შემდეგი მატრიცული ტოლობის ტოლფასია:

$$\mathbf{a}\varphi = (a_1, a_2, \dots, a_n)(\mathbf{e}\varphi). \quad (5.28)$$

(5.25)-ის გამოყენებით და იმის გათვალისწინებით, რომ მატრიცების გამრავლების ასოციაციურობა ადვილად მოწმდება იმ შემთხვევაში, როცა ერთ-ერთი მატრიცა ვექტორ-სვეტს წარმოადგენს, ვიღებთ:

$$\mathbf{a}\varphi = [(a_1, a_2, \dots, a_n)\mathbf{A}]\mathbf{e}. \quad (5.29)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mathbf{a}\varphi$ ვექტორის კოორდინატების სტრიქონი ტოლია \mathbf{a} ვექტორის კოორდინატების სტრიქონის φ წრფივი გარდაქმნის \mathbf{A} მატრიცაზე მარჯვნიდან ნამრავლისა (5.4) ბაზაში.

მაგალითი. 5.1.

ვთქვათ, სამგანზომილებიანი წრფივი სივრცის $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ბაზაში წრფივი გარდაქმნა φ მოიცემა მატრიცით:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

თუ

$$\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3,$$

მაშინ

$$(5, 1, -2) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-9, 10, 0)$$

და

$$\mathbf{a}\varphi = -9\mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_2.$$

5.2.4. სხვადასხვა ბაზებში წრფივი გარდაქმნის მატრიცებს შორის კავშირი

ცხადია, რომ მატრიცა, რომელიც იძლევა წრფივ გარდაქმნას, დამოკიდებულია ბაზის არჩევაზე. ვაჩვენოთ როგორია მატრიცებს შორის კავშირი, რომლებიც იძლევიან სხვადასხვა ბაზებში ერთი და იგივე წრფივ გარდაქმნას.

ვთქვათ მოცემულია \mathbf{e} და \mathbf{e}' ბაზები გადასვლის \mathbf{T} მატრიცით:

$$\mathbf{e}' = \mathbf{T}\mathbf{e}. \quad (5.30)$$

დაეუშვათ წრფივი გარდაქმნა φ მოიცემა ამ ბაზებში შესაბამისად \mathbf{A} და \mathbf{A}' მატრიცებით:

$$\mathbf{e}\varphi = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad (5.31)$$

$$\mathbf{e}'\varphi = \mathbf{A}'\mathbf{e}'. \quad (5.32)$$

(5.32) ტოლობა (5.30)-ის გათვალისწინებით დაიყვანება შემდეგ ტოლობაზე

$$(\mathbf{T}\mathbf{e})\varphi = \mathbf{A}'(\mathbf{T}\mathbf{e}). \quad (5.33)$$

მაგრამ

$$(\mathbf{T}\mathbf{e})\varphi = \mathbf{T}(\mathbf{e}\varphi). \quad (5.34)$$

მართლაც, თუ $(\tau_{i1}, \tau_{i2}, \dots, \tau_{in})$ - i -ური სტრიქონია \mathbf{T} მატრიცის, მაშინ

$$(\tau_{i1}e_1 + \tau_{i2}e_2 + \dots + \tau_{in}e_n)\varphi = \tau_{i1}(e_1\varphi) + \tau_{i2}(e_2\varphi) + \dots + \tau_{in}(e_n\varphi). \quad (5.35)$$

(5.31)-ის გამო:

$$(\mathbf{T}\mathbf{e})\varphi = \mathbf{T}(\mathbf{e}\varphi) = \mathbf{T}(\mathbf{A}\mathbf{e}) = (\mathbf{T}\mathbf{A})\mathbf{e}. \quad (5.36)$$

(5.33)-ის გამო:

$$(\mathbf{T}\mathbf{e})\varphi = \mathbf{A}'(\mathbf{T}\mathbf{e}) = (\mathbf{A}'\mathbf{T})\mathbf{e}. \quad (5.37)$$

ე.ი.

$$(\mathbf{T}\mathbf{A})\mathbf{e} = (\mathbf{A}'\mathbf{T})\mathbf{e}. \quad (5.38)$$

თუ ერთი მაინც i -თვის, $1 \leq i \leq n$, $\mathbf{T}\mathbf{A}$ მატრიცის i -ური სტრიქონი განსხვავებული იქნება $\mathbf{A}'\mathbf{T}$ მატრიცის i -ური სტრიქონისაგან, მაშინ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ ვექტორების ორი სხვადასხვა წრფივი კომბინაცია აღმოჩნდება ერთმანეთის ტოლი, რაც ეწინააღმდეგება \mathbf{e} ბაზის წრფივ დამოუკიდებლობას. ამრიგად,

$$\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{A}'\mathbf{T}, \quad (5.39)$$

საიდანაც \mathbf{T} გადასვლის მატრიცის გადაუგვარებლობის გამო

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}', \quad (5.40)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{T}. \quad (5.41)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ კვადრატულ მატრიცებს \mathbf{B} და \mathbf{C} უწოდებენ მსგავსს, თუ ისინი დაკავშირებულია ტოლობით

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}, \quad (5.42)$$

სადაც \mathbf{Q} - რაიმე გადაუგვარებელი მატრიცაა. ამასთან იბახიან, რომ \mathbf{C} მატრიცა მიღებულია \mathbf{B} მატრიცისგან \mathbf{Q} მატრიცის ტრანსფორმირებით.

ზევით მიღებული (5.40) და (5.41) ტოლობები შეიძლება ფორმულირებული იყოს შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემის სახით:

თეორემა. მატრიცები, რომლებიც იძლევიან ერთიდაიგივე წრფივ გარდაქმნას სხვადასხვა ბაზებში, ურთიერთმსგავსია. ამასთან φ წრფივი გარდაქმნის მატრიცა \mathbf{e}' ბაზაში მიიღება ამ გარდაქმნის მატრიცისგან \mathbf{e} ბაზაში \mathbf{e}' ბაზიდან \mathbf{e} ბაზაში გადასვლის მატრიცის ტრანსფორმირებით.

უნდა ხაზი გაესვას იმ გარემოებას, რომ თუ \mathbf{A} მატრიცა იძლევა φ წრფივ გარდაქმნას \mathbf{e} ბაზაში, მაშინ ნებისმიერი \mathbf{B} მატრიცა, რომელიც \mathbf{A} მატრიცის მსგავსია და $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$, ასევე განსაზღვრავს φ გარდაქმნას რაიმე ბაზაში, კერძოდ ბაზაში, რომელიც მიიღება \mathbf{e} ბაზიდან გადასვლის \mathbf{Q}^{-1} მატრიცის საშუალებით.

5.2.5. ოპერაციები წრფივ გარდაქმნებზე

თუ \mathbf{V}_n სივრცის თითოეულ წრფივ გარდაქმნას შეეუსაბამებთ მის მატრიცას ფიქსირებულ ბაზაში, მივიღებთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობას ყველა წრფივ გარდაქმნასა და ყველა n რიგის კვადრატულ მატრიცებს შორის (რაც მტკიცდება). ბუნებრივია მოველოდით, რომ მატრიცების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების, და ასევე მატრიცის რიცხვზე გამრავლებას, უნდა შეესაბამებოდეს ანალოგიური ოპერაციები წრფივ გარდაქმნებზე.

ვთქვათ, \mathbf{V}_n სივრცეში მოცემულია წრფივი გარდაქმნები φ და ψ . ამ გარდაქმნების ჯამი ვუწოდოთ $\varphi + \psi$ გარდაქმნას, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით

$$\mathbf{a}(\varphi + \psi) = \mathbf{a}\varphi + \mathbf{a}\psi, \quad (5.43)$$

რომელსაც გადაყავს ნებისმიერი \mathbf{a} ვექტორი მისი სახეების ჯამში φ და ψ გარდაქმნებისას.

$\varphi + \psi$ გარდაქმნა, წრფივი გარდაქმნაა. მართლაც, ნებისმიერი \mathbf{a} და \mathbf{b} ვექტორისათვის და ნებისმიერი α რიცხვისთვის:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\varphi + \psi) &= (\mathbf{a} + \mathbf{b})\varphi + (\mathbf{a} + \mathbf{b})\psi = \mathbf{a}\varphi + \mathbf{b}\varphi + \mathbf{a}\psi + \mathbf{b}\psi = \\ &= \mathbf{a}(\varphi + \psi) + \mathbf{b}(\varphi + \psi), \\ (\alpha\mathbf{a})(\varphi + \psi) &= (\alpha\mathbf{a})\varphi + (\alpha\mathbf{a})\psi = \alpha(\mathbf{a}\varphi) + \alpha(\mathbf{a}\psi) = \\ &= \alpha(\mathbf{a}\varphi + \mathbf{a}\psi) = \alpha[\mathbf{a}(\varphi + \psi)]. \end{aligned}$$

მეორე მხრივ, φ და ψ წრფივი გარდაქმნების ნამრავლი ვუწოდოთ $\varphi\psi$, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით:

$$\mathbf{a}(\varphi\psi) = (\mathbf{a}\varphi)\psi, \quad (5.44)$$

ანუ მიიღება φ და ψ გარდაქმნების მიმდევრობით შესრულებით.

$\varphi\psi$ გარდაქმნა არის წრფივი:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\varphi\psi) &= [(\mathbf{a} + \mathbf{b})\varphi]\psi = (\mathbf{a}\varphi + \mathbf{b}\varphi)\psi = (\mathbf{a}\varphi)\psi + (\mathbf{b}\varphi)\psi = \\ &= \mathbf{a}(\varphi\psi) + \mathbf{b}(\varphi\psi), \\ (\alpha\mathbf{a})(\varphi\psi) &= [(\alpha\mathbf{a})\varphi]\psi = [\alpha(\mathbf{a}\varphi)]\psi = \alpha[(\mathbf{a}\varphi)\psi] = \alpha[\mathbf{a}(\varphi\psi)]. \end{aligned}$$

ბოლოს, ვუწოდოთ φ წრფივი გარდაქმნის ნამრავლს h რიცხვზე $h\varphi$ გარდაქმნას, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით:

$$\mathbf{a}(h\varphi) = h(\mathbf{a}\varphi). \quad (5.45)$$

გარდაქმნა $h\varphi$ არის წრფივი, მართლაც:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b})(h\varphi) &= h[(\mathbf{a} + \mathbf{b})\varphi] = h(\mathbf{a}\varphi + \mathbf{b}\varphi) = h(\mathbf{a}\varphi) + h(\mathbf{b}\varphi) = \\ &= \mathbf{a}(h\varphi) + \mathbf{b}(h\varphi), \end{aligned}$$

$$(\alpha\mathbf{a})(h\varphi) = h[(\alpha\mathbf{a})\varphi] = h[\alpha(\mathbf{a}\varphi)] = \alpha[h(\mathbf{a}\varphi)] = \alpha[\mathbf{a}(h\varphi)].$$

დავუშვათ, (5.4) ბაზაში φ და ψ გარდაქმნები მოცემულია $\mathbf{A} = (a_{ij})$ და $\mathbf{B} = (b_{ij})$ მატრიცებით:

$$\mathbf{e}\varphi = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e}\psi = \mathbf{B}\mathbf{e}$$

მაშინ (5.43)-ის გამო

$$e_i(\varphi + \psi) = e_i\varphi + e_i\psi = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j + \sum_{j=1}^n b_{ij}e_j = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij})e_j.$$

ანუ

$$\mathbf{e}(\varphi + \psi) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{e}. \quad (5.46)$$

ამრიგად, ნებისმიერ ბაზაში წრფივი გარდაქმნების ჯამის მატრიცა ტოლია ამ გარდაქმნების მატრიცების ჯამის ამავე ბაზაში.

მეორე მხრივ (5.44)-ის გამო

$$\begin{aligned} e_i(\varphi\psi) &= (e_i\varphi)\psi = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j \right) \psi = \sum_{j=1}^n a_{ij}(e_j\psi) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^n b_{jk}e_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right) e_k, \end{aligned}$$

ანუ

$$\mathbf{e}(\varphi\psi) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{e}. \quad (5.47)$$

სხვა სიტყვით, რომ ვთქვათ წრფივი გარდაქმნების ნამრავლის მატრიცა ნებისმიერ ბაზაში ტოლია ამ გარდაქმნების მატრიცების ნამრავლისა იმავე ბაზაში.

ბოლოს, (5.45)-ის გამო

$$e_i(h\varphi) = h(e_i\varphi) = h \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j = \sum_{j=1}^n (ha_{ij})e_j,$$

ანუ

$$e(h\varphi) = (hA)e. \quad (5.48)$$

მაშასადამე, მატრიცა, რომელიც რაიმე ბაზაში განსაზღვრავს წრფივ გარდაქმნის ნამრავლს h რიცხვზე, ტოლია φ გარდაქმნის მატრიცის ნამრავლისა h რიცხვზე ამავე ბაზაში.

მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ წრფივ გარდაქმნებზე განსაზღვრულ ოპერაციებს აქვთ ისეთივე თვისებები, როგორც მატრიცებზე ოპერაციებს.

უნდა აღინიშნოს ასევე, რომ იგივეური გარდაქმნა ε თამაშობს წრფივ გარდაქმნებს შორის ერთეულის როლს, ხოლო ნულოვანი ω გარდაქმნა – ნულის როლს. მართლაც ნებისმიერ ბაზაში ε გარდაქმნა მოიცემა ერთეულოვანი მატრიცით, ხოლო ω გარდაქმნა – ნულოვანი მატრიცით.

5.2.6. მახასიათებელი ფესვები და საკუთრივი მნიშვნელობები

ვთქვათ $\mathbf{A} = (a_{ij})$ n -ური რიგის კვადრატული მატრიცაა ნამდვილი ელემენტებით. ვთქვათ, ასევე რომ λ – რაიმე უცნობია. მაშინ $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ მატრიცას, სადაც \mathbf{E} – n -ური რიგის ერთეულოვანი მატრიცაა, ეწოდება \mathbf{A} მატრიცის მახასიათებელი მატრიცა. ვინაიდან $\lambda\mathbf{E}$ მატრიცაში მთავარ დიაგონალზე დგას λ , ხოლო დანარჩენი ელემენტები ტოლია ნულის, ამიტომ

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{11} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ მატრიცის დეტერმინანტი იქნება n -ური ხარისხის მრავალწევრი λ -ს მიმართ. მართლაც, მთავარ დიაგონალზე მდგომი წევრების ნამრავლი იქნება

მრავალწევრი λ -ს მიმართ უფროსი წევრით $(-1)^n \lambda^n$, დეტერმინანტის სხვა წევრები არ შეიცავენ მთავარ დიაგონალზე მდგომ ორ წევრს მაინც, ამიტომ მათი ხარისხი λ -ს მიმართ არ აღემატება $n-2$ -ს. ამ მრავალწევრის კოეფიციენტები ადვილად შეიძლება განისაზღვროს. ასე მაგალითად λ^{n-1} -თან მდგომი კოეფიციენტი ტოლი იქნება $(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$, ხოლო თავისუფალი წევრი დაემთხვევა \mathbf{A} მატრიცის დეტერმინანტს.

n -ური ხარისხის $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}|$ მრავალწევრს ეწოდება \mathbf{A} მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრი, ხოლო მის ფესვებს, რომლებიც შეიძლება იყოს როგორც ნამდვილი ისე კომპლექსური, ეწოდება ამ მატრიცის მახასიათებელი ფესვები.

მსგავს მატრიცებს აქვთ ერთიდაიგივე მახასიათებელი მრავალწევრები, და მაშასადამე ერთიდაიგივე მახასიათებელი ფესვები.

მართლაც, ვთქვათ

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}$$

მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\lambda \mathbf{E}$ გადანაცვლებადია \mathbf{Q} მატრიცასთან, ხოლო $|\mathbf{Q}^{-1}| = |\mathbf{Q}|^{-1}$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} |\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}| &= |\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} - \lambda \mathbf{E}| = |\mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{Q}| = |\mathbf{Q}|^{-1} |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| |\mathbf{Q}| = \\ &= |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| \end{aligned}$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

იმის გამო, რომ წრფივი გარდაქმნა სხვადასხვა ბაზებში მოიცემა მსგავსი მატრიცებით, ამიტომ ამ მატრიცებს დამტკიცებულის გამო აქვთ ერთიდაიგივე მახასიათებელი ფესვები. ამიტომ ამ ფესვებს შეიძლება ვუწოდოთ თვით φ გარდაქმნის მახასიათებელი ფესვები. ამ ფესვების ერთობლიობას, ამასთან როდესაც თითოეული ფესვი აიღება

იმ ჯერადობით, როგორც აქვს მახასიათებელ მრავალწევრში, ეწოდება φ წრფივი გარდაქმნის სპექტრი.

მახასიათებელი ფესვები თამაშობენ მეტად მნიშვნელოვან როლს წრფივი გარდაქმნების შესწავლისას. ერთ-ერთ გამოყენებას მახასიათებელი ფესვებისა ვნახავთ ეხლა.

დაეუშვათ ნამდვილ წრფივ V_n სივრცეში მოცემულია φ წრფივი გარდაქმნა. თუ \mathbf{b} ვექტორი, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულია, φ გარდაქმნით გადადის ვექტორში, რომელიც თვით \mathbf{b} ვექტორის პროპორციულია, ე.ი.

$$\mathbf{b}\varphi = \lambda_0\mathbf{b}, \quad (5.50)$$

სადაც λ_0 - რაიმე ნამდვილი რიცხვია, მაშინ \mathbf{b} ვექტორს უწოდებენ φ გარდაქმნის საკუთრივ ვექტორს, ხოლო λ_0 -ს ამ გარდაქმნის საკუთრივ მნიშვნელობას. ამასთან იძახიან, რომ საკუთრივი \mathbf{b} ვექტორი მიეკუთვნება λ_0 საკუთრივ მნიშვნელობას.

უნდა აღინიშნოს, რომ ვინაიდან $\mathbf{b} \neq 0$, მაშინ λ_0 რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს (5.50) პირობას, განისაზღვრება \mathbf{b} ვექტორისათვის ცალსახად. ხაზი უნდა გაეკვას, რომ ნულოვანი ვექტორი არ ითვლება φ გარდაქმნის საკუთრივ ვექტორად, თუმცა ის აკმაყოფილებს (5.50), ამასთან ნებისმიერი λ_0 -თვის.

მტკიცდება, რომ φ გარდაქმნის ნამდვილი მახასიათებელი ფესვები, თუ ისინი არსებობენ, და მხოლოდ ისინი შეიძლება იყვნენ წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობები.

5.3. წრფივი გარდაქმნები დინამიკურ სისტემებში

განვიხილოთ სისტემა რომელიც აღიწერება შემდეგი ვექტორული განტოლებით:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (5.51)$$

სადაც \mathbf{x} - $n \times 1$ განზომილებიანი მდგომარეობის ვექტორია, \mathbf{u} - $m \times 1$ განზომილებიანი შესავალი ზემოქმედების ვექტორია, \mathbf{A} და \mathbf{B} - კოეფიციენტების მატრიცებია.

იმისათვის, რომ აგებულ იქნეს მდგომარეობის ვექტორი სხვადასხვა ხერხით, შეიძლება გამოყენებული იყოს (5.51) განტოლების წრფივი გარდაქმნა. მდგომარეობის გარდაქმნილი ვექტორი \mathbf{x}^* წარმოადგენს \mathbf{x} ვექტორის n კომპონენტის წრფივ კომბინაციას:

$$\mathbf{x}^* = \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{x}, \quad (5.52)$$

სადაც $\boldsymbol{\Psi}$ გარდაქმნის მატრიცაა. (5.52) განტოლება ქმნის მდგომარეობის ახალ განტოლებას:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{x}^* + \mathbf{B}^* \mathbf{u}, \quad (5.53)$$

რომელიც კმაყოფილდება, როდესაც

$$\mathbf{A}^* = \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi}, \quad (5.54)$$

$$\mathbf{B}^* = \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\Psi}. \quad (5.55)$$

აღნიშნული გარდაქმნა შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს მატრიცა $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$. უნდა აღინიშნოს, რომ არც ერთი გარდაქმნილი ცვლადი არ შეიძლება განსლული იყოს როგორც მდგომარეობის ცვლადი, თუ ის წარმოადგენს სხვა მდგომარეობის ცვლადების წრფივ კომბინაციას.

ამ თვალსაზრისით საინტერესოა აღინიშნოს, რომ (5.51) საწყისი განტოლების საკუთრივ მნიშვნელობებს, ვინაიდან ისინი წარმოადგენენ მახასიათებელი განტოლების

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.56)$$

ფესვებს, სადაც λ_i - \mathbf{A} მატრიცის i -ური საკუთრივი მნიშვნელობაა.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\det(\mathbf{GH}) = \det(\mathbf{G})\det(\mathbf{H}),$$

მაშინ მივიღებთ გარდაქმნილი (5.53) სისტემისათვის:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}^* - \lambda_i^* \mathbf{E}) &= \det(\boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi} - \lambda_i^* \mathbf{E}) = \det(\boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi} - \lambda_i^* \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{E} \boldsymbol{\Psi}) = \\ &= \det(\boldsymbol{\Psi}^{-1}) \det(\mathbf{A} - \lambda_i^* \mathbf{E}) \det(\boldsymbol{\Psi}) = 0. \end{aligned} \quad (5.57)$$

ვინაიდან $\det(\boldsymbol{\Psi}) \neq 0$ და რადგან $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$ მატრიცა არსებობს მივიღებთ რომ

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_i^* \mathbf{E}) = 0. \quad (5.58)$$

მაშასადამე, \mathbf{A} მატრიცა აკმაყოფილებს როგორც (5.56) ისე (5.58)-ს, ამიტომ შესაბამისი i ინდექსისათვის მივიღებთ რომ:

$$\lambda_i^* = \lambda_i. \quad (5.59)$$

მაგალითი. 52.

განვიხილოთ სისტემა

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x},$$

სადაც

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

სისტემის საკუთრივი მნიშვნელობები განისაზღვრება განტოლებიდან:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) = 0,$$

ანუ

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda_i & 2 \\ 1 & 4 - \lambda_i \end{pmatrix} = (3 - \lambda_i)(4 - \lambda_i) - 2 = 0,$$

საიდანაც

$$\lambda_i^2 - 7\lambda_i + 10 = 0,$$

$$\lambda_i = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2.$$

საწყისი სისტემა გარდაქმნათ

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

მატრიცის საშუალებით, მაშინ

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{x}^*,$$

სადაც

$$\mathbf{A}^* = \Psi^{-1} \mathbf{A} \Psi$$

და

$$\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & -\frac{0}{2} \\ -\frac{0}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(49)-ის შესაბამისად

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

\mathbf{A}^* -ის საკუთრივი მნიშვნელობები განისაზღვრება გამოსახულებებიდან

$$\det(\mathbf{A}^* - \lambda_i^* \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda_i^* & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 - \lambda_i^* \end{pmatrix} = (3 - \lambda_i^*)(4 - \lambda_i^*) - 2 = 0,$$

ამიტომ \mathbf{A}^* -ის საკუთრივი მნიშვნელობები ტოლია \mathbf{A} -ის საკუთრივი მნიშვნელობების.

5.3.1. კანონიკური გარდაქმნები

(5.51) განტოლების სხვადასხვა წრფივ გარდაქმნებს შორის განსაკუთრებულ მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ე.წ.

კანონიკური გარდაქმნა, რომელშიც გარდაქმნის მატრიცას წარმოადგენს საკუთრივი ვექტორების მატრიცა \mathbf{V} . ეს მატრიცა მიიღება ერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის შედეგად:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\quad (5.60)$$

ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= v_{11}e^{\lambda_1 t} + v_{12}e^{\lambda_2 t} + \dots + v_{1n}e^{\lambda_n t}, \\ x_2(t) &= v_{21}e^{\lambda_1 t} + v_{22}e^{\lambda_2 t} + \dots + v_{2n}e^{\lambda_n t}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_n(t) &= v_{n1}e^{\lambda_1 t} + v_{n2}e^{\lambda_2 t} + \dots + v_{nn}e^{\lambda_n t},\end{aligned}\quad (5.61)$$

ან ვექტორული ფორმით:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{e}^{\lambda t} = v_1 e^{\lambda_1 t} + v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + v_n e^{\lambda_n t}, \quad (5.62)$$

სადაც

$$\mathbf{e}^{\lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad (5.63)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & & & \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n), \quad (5.64)$$

მაშინ \mathbf{V} -ს განსაზღვრისათვის საჭიროა ვიპოვოთ საკუთრივი ვექტორები.

5.3.1ა. საკუთრივი ვექტორების პირდაპირი განსაზღვრა

(5.62) განტოლების დიფერენცირება t -ს მიხედვით გვაძლევს

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}. \quad (5.65)$$

თუ ჩავსვამთ \mathbf{x} -ს (5.62)-დან და (5.60)-ში მივიღებთ:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{V} e^{\lambda t} = \mathbf{A} (\lambda_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}). \quad (5.66)$$

თუ შევადარებთ (5.65) და (5.66) განტოლებებს მივიღებთ, რომ საკუთრივი ვექტორები აკმაყოფილებენ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\lambda_i v_i e^{\lambda_i t} = \mathbf{A} v_i e^{\lambda_i t}. \quad (5.67)$$

თუ (5.67)-ის ორივე მხარეს გავეყოფთ $e^{\lambda_i t}$ -ზე მივიღებთ:

$$\lambda_i v_i = \mathbf{A} v_i, \quad (5.68)$$

ან

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) v_i = \mathbf{0}. \quad (5.69)$$

მაშასადამე, v_i შეიძლება განსაზღვრულ იქნეს (5.69) განტოლებიდან.

საკუთრივი v_i ვექტორების მნიშვნელობების მიღებისათვის აუცილებელია ერთი v_i ელემენტის მნიშვნელობის განსაზღვრა, მაგალითად პირველის, რომელიც შეიძლება ადებულ იქნეს ერთის ტოლად. ამიტომ (5.69) მატრიცული განტოლების უკანასკნელი სტრიქონი v_i -ის გამოთვლისას შეიძლება გამოვტოვოთ ისე, როგორც ნაჩვენებია შემდეგ მაგალითში.

მაგალითი. 53.

განვიხილოთ მატრიცა

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

საკუთრივი v_i ვექტორების განსაზღვრისათვის ჯერ გამოვთვალოთ მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 ,$$

საიდანაც

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5 .$$

(5.68) განტოლების თანახმად გვექნება :

$$-\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -v_{11} \\ -v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} + 2v_{12} \\ 4v_{11} + 3v_{12} \end{pmatrix} ,$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} -v_{11} &= 2v_{12}, \\ -4v_{11} &= 4v_{12}, \end{aligned}$$

ანუ

$$v_{11} = -v_{12} .$$

თუ ჩავთვლით $v_{11} = 1$, მივიღებთ

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

ანალოგიურად (5.68) განტოლებიდან λ_2 -თვის მივიღებთ:

$$5\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5v_{21} \\ 5v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} ,$$

ანუ

$$5\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5v_{21} \\ 5v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{21} + 2v_{22} \\ 4v_{21} + 3v_{22} \end{pmatrix} ,$$

რაც იძლევა

$$\begin{aligned} 4v_{21} &= 2v_{22}, \\ 2v_{22} &= 4v_{21}, \end{aligned}$$

ანუ

$$2v_{21} = v_{22}.$$

თუ ჩავთვლით $v_{21} = 1$, მივიღებთ

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.3.ბ. ა. კრილოვის მეთოდზე დაყარებული საკუთრივი ვექტორების განსაზღვრის ალგორითმი

$n \times n$ განზომილების \mathbf{A} მატრიცის საკუთრივი ვექტორების განსაზღვრის უფრო სწრაფი მიმდევრობითი პროცედურა დამყარებულია ა. ნ. კრილოვის მეთოდზე. ამ მიდგომისას იგულისხმება, რომ მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები უკვე განსაზღვრულია და შეიძლება ვისარგებლოთ მახასიათებელი $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ განტოლებით. ეს მეთოდი შეიძლება გამოყენებული იყოს მატრიცების მიმართ სხვადასხვა და ერთნაირი საკუთრივი მნიშვნელობებისათვის.

გამოყენების თანმიმდევრობა მდგომარეობს შემდეგში : განვსაღვროთ c_i კოეფიციენტები ისეთი, რომ

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = (-1)^n (\lambda^n - c_{n-1} \lambda^{n-1} - \dots - c_0). \quad (5.70)$$

და ნებისმიერად ამოვირჩიოთ საწყისი n განზომილებიანი \mathbf{d}_1 ვექტორი, მაგალითად, $n=2$ -თვის:

$$\mathbf{d}_1 = (1, 0)^T. \quad (5.71)$$

შევაღვინოთ ვექტორები:

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{A} \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{d}_3 = \mathbf{A} \mathbf{d}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{d}_n = \mathbf{A} \mathbf{d}_{n-1}. \quad (5.72)$$

შემდეგ განვსაზღვროთ i -ური საკუთრივი \mathbf{v}_i ვექტორის ელემენტები შემდეგი სახით:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^n p_{i,k} \mathbf{d}_{n-k+1}, \quad (5.73)$$

$$p_{i,1} = 1, \quad (5.74a)$$

$$p_{i,j} = \lambda_i p_{i,j-1} - c_{n-j+1}, \quad j=2, \dots, n, \quad (5.74b)$$

$$0 = \lambda_i p_{i,n} - c_0. \quad (5.74c)$$

(5.74c) განტოლება ემსახურება მხოლოდ გამოთვლების შემოწმებას.

თუ A მატრიცა წარმოდგენილია კოაგულირებულ ფორმაში:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

მაშინ შეიძლება V მატრიცის საკუთრივი ვექტორის გამოთვლის სწრაფი ალგორითმის აგება ვანდერმონდის მატრიცის გამოყენების საფუძველზე შემდეგნაირად:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

უნდა აღინიშნოს რომ \mathbf{V}^{-1} არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყველა λ_i განსხვავებულია.

მაგალითი. 5.3.

გამოვიყენოთ გამოვიყენოთ ა. ნ. კრილოვის მეთოდი 5.2. მაგალითისთვის, სადაც

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 5, \quad n = 2.$$

განვსაზღვროთ \mathbf{A} მატრიცის საკუთრივი ვექტორები შემდგენიარად. ნებისმიერად ვირჩევთ

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

შემდეგ ვსაზღვრავთ

$$d_2 = \mathbf{A}d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

c_i -ები (5.70)-ის გათვალისწინებით იღებენ შემდეგ სახეს:

$$\lambda_i^2 - 4\lambda - 5 = \lambda^n - c_1\lambda - c_0,$$

საიდანაც ვიღებთ:

$$c_1 = 4, \quad c_0 = 5.$$

შემდეგ (5.74) განტოლებები იძლევა:

$$p_{1,1} = 1, \quad p_{1,2} = -1p_{1,1} - c_1 = -1 - 4 = -5,$$

$$p_{2,1} = 1, \quad p_{2,2} = 5p_{2,1} - c_1 = 5 - 4 = 1.$$

ამრიგად, საკუთრივი ვექტორები \mathbf{v}_1 და \mathbf{v}_2 ტოლია:

$$\mathbf{v}_1 = p_{11}d_2 + p_{12}d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_2 = p_{21}d_2 + p_{22}d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

შემდეგ \mathbf{v}_i -ს ნორმალიზებით ისე რომ, პირველი ელემენტი ტოლი იყოს 1-ის, მივიღებთ:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ისევე, როგორც მაგალითში 5.2.

5.3.1გ. დიაგონალიზაციის პროცედურა

\mathbf{V} მატრიცის მიღების სხვა ხერხების განხილვის მიზნით განვიხილოთ დიაგონალური მატრიცა, რომელიც არის შემდეგი სახის :

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (5.75)$$

ცხადია, რომ ნამრავლი

$$\mathbf{V}\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1 \mathbf{v}_1, \lambda_2 \mathbf{v}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{v}_n). \quad (5.76)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (5.68) განტოლებას, გვექნება:

$$\mathbf{V}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{A}\mathbf{V}, \quad (5.77a)$$

ანუ

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}. \quad (5.77b)$$

ამრიგად, მატრიცის დიაგონალიზაცია ხორციელდება თუ მისი საკუთრივი მნიშვნელობები სხვადასხვაა. თუ გამოვიყენებთ კანონიკურ გარდაქმნას (5.51) განტოლების მიმართ, ე.ი. თუ გამოვიყენებთ \mathbf{V} -ს როგორც გარდაქმნის მატრიცას და გავითვალისწინებთ (5.54) და (5.55)-ს, მივიღებთ მდგომარეობის შემდეგ კანონიკურ განტოლებას:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x} + \mathbf{B}^*\mathbf{u}, \quad (5.78a)$$

სადაც

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V}. \quad (5.78b)$$

(5.79) სკალარულ ფორმაში წარმოდგინება შემდეგი სახით:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

მაგალითიდან 5.2. ცნობილია, რომ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$. ამიტომ დიაგონალურ Λ მატრიცას აქვს სახე:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

5.4. მართვადობა

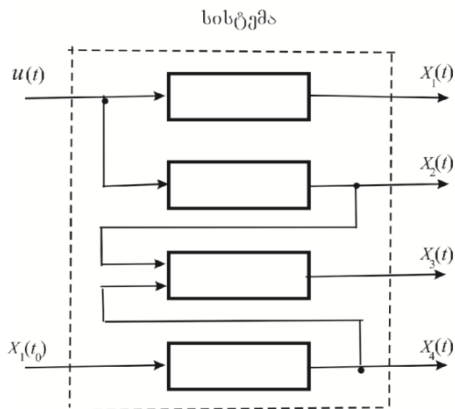
5.4.1. მართვადობის ცნება

დაკვირვებადობის და მისადმი დუალური ცნების - მართვადობის ცნება შემოტანილი იყო კალმანის მიერ 1960 წელს. იდენტიფიკაციის ამოცანების განხილვისას დაკვირვებადობის ცნება უფრო მნიშვნელოვანია ვიდრე მართვადობის, მაგრამ მათი დუალობის გამო ისინი განიხილება ერთობლივად.

იტყვიან, რომ სისტემა მართვადია თუ ის შეიძლება გადაყვანილი იყოს ნებისმიერი $\mathbf{x}(t_0)$ მდგომარეობიდან $t = t_0$ მომენტში ნებისმიერ სასურველ მდგომარეობაში $\mathbf{x}(t_1)$ სასრულ დროის შუალედში $\tau = t_1 - t_0$, უბან-უბან უწყვეტი შესავალი $\mathbf{u}(t)$, $t \in (t_0, t_1)$ ზემოქმედების მოდების გზით.

მართვადობის ცნების ილუსტრირება შეიძლება მოხდეს შემდეგი სქემის (ნახ. 5.1)-ის საშუალებით.

ცხადია რომ ნახ 5.1-ზე მოცემული სისტემა არ არის მართვადი, ვინაიდან მმართველი შესავალი $\mathbf{u}(t)$ არ მოქმედებს მდგომარეობის ყველა ცვლადზე.



ნახ. 5.1. არამართვადი სისტემა

5.4.2. კანონიკური სისტემის მართვადობის კრიტერიუმი

მივიყვანოთ წრფივი სისტემის მართვადობის გამოკვლევის ჰილბერტის კრიტერიუმი, როდესაც სისტემა წარმოდგენილია კანონიკური ფორმით. ეს მეთოდი გულისხმობს რომ სისტემა ჯერ უნდა დაყვანილ იქნას კანონიკურ ფორმაზე (5.78) გამოსახულების შესაბამისად. ეს ფორმა მოსახერხებელია იმით, რომ მასში არ არის მდგომარეობის კანონიკურ ცვლადებს შორის ურთიერთკავშირი.

ჰილბერტის კრიტერიუმის მიხედვით სისტემა, რომელიც მოცემულია კანონიკურ ფორმაში

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}^*\mathbf{u}, \quad (5.79)$$

მართვადია, თუ \mathbf{B}^* -ის არც ერთი სტრიქონი არ არის ნულოვანი (ანუ მართვადობისათვის თითოეულ სტრიქონში უნდა იყოს ერთი მაინც არანულოვანი ელემენტი). მაშასადამე, თუ მატრიცის ერთი მაინც სტრიქონი ნულოვანია, მაშინ სისტემა არამართვადია. უნდა აღინიშნოს,

რომ, როგორც ეს 5.3 პარაგრაფში იყო ნაჩვენები, კანონიკური (5.78) ფორმა გამოსადეგია მხოლოდ იმ შემთხვევაში თუ სისტემის $n \times n$ მატრიცას აქვს n სხვადასხვა საკუთრივი მნიშვნელობა. ქვევით განვიხილავთ ჟორდანის კანონიკურ გარდაქმნას, რომელიც საშუალებას იძლევა ნაწილობრივად დაძლეული იყოს ეს შეზღუდვა.

თეორემა მართვადობის შესახებ მტკიცდება შემდეგნაირად განვიხილოთ უპირველეს ყოვლისა მტკიცება იმის შესახებ, რომ თუ \mathbf{B}^* მატრიცის ერთი ან მეტი სტრიქონი ნულოვანია, მაშინ სისტემა არამართვადია. ამისათვის, (5.78) განტოლება გადავწეროთ სკალარულ ფორმაში:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^* &= \lambda_1 x_1^* + \sum_{j=1}^m b_{1j}^* u_j, \\ \dot{x}_2^* &= \lambda_2 x_2^* + \sum_{j=1}^m b_{2j}^* u_j, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n^* &= \lambda_n x_n^* + \sum_{j=1}^m b_{nj}^* u_j. \end{aligned} \tag{5.80}$$

ვინაიდან მდგომარეობის კანონიკურ ცვლადებს შორის ურთიერთკავშირი არ არსებობს, ამიტომ ცხადია, რომ თუ (5.79) განტოლების ნებისმიერი i -ური სტრიქონში $b_{ij} = 0, \forall j$ -თვის, მაშინ შესაბამის მდგომარეობის x_i^* ცვლადზე არ შეიძლება გავლენა მოახდინოს მართვის არჩევამ. მაშასადამე, სისტემის ეს მდგომარეობა არამართვადია. მაგრამ, თუ \mathbf{B}^* არც ერთი სტრიქონი არ არის ნულის ტოლი, მაშინ შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ნებისმიერი $x_i^*(t_0)$ მდგომარეობა შეიძლება გადაყვანილი იყოს ნებისმიერ ახალ $x_i^*(t_1)$ მდგომარეობაში. დამტკიცება ემყარება (5.79) განტოლების ამოხსნის განხილვას, რომელიც მოიცემა გამოსახულებით:

$$x_i^*(t_1) = e^{\lambda_i(t_1-t_0)} x_i^*(t_0) + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_1} e^{\lambda_i(t_1-\tau)} b_{ij}^* u_j(\tau) d\tau, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.81)$$

ყოველთვის, შეიძლება ისეთნაირად იყოს განსაზღვრული $x_i^*(t_0) \equiv 0, t_0 \equiv 0$, რომ მიღებული იყოს:

$$x_i^*(t_1) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_i t_1} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\lambda_i \tau} b_{ij}^* u_j(\tau) d\tau, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.82)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც გვაქვს n შესავალი u_1, u_2, \dots, u_n (n მდგომარეობათა რიცხვია). მაშასადამე (5.81) გვინვენებს, რომ თუ \mathbf{B}^* -ში ყველა სტრიქონი წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ შეიძლება მოვითხოვოთ რომ მართვა $u_j = 0, (\forall j = 1, 2, \dots, n)$ იყოს მუდმივი ინტეგრირების ინტერვალის შიგნით, და ამოსხნილი იყოს n განტოლება n უცნობებით u_j , იმისათვის რომ დაკმაყოფილი იყოს ნებისმიერი n განსხვავებული $x_i^*(t_1)$. მდგომარეობა რთულდება, თუ გვაქვს მხოლოდ ერთი შესავალი. ასეთ შემთხვევაში (5.81) განტოლება იღებს სახეს:

$$x_i^*(t_1) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_i t_1} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\lambda_i \tau} b_i^* u(\tau) d\tau, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.83)$$

მაგრამ, ნებისმიერი სასრული $t_1 - t_0$ ინტერვალის შეიძლება დაყოფილი იყოს $(t_{11} - t_0), (t_{21} - t_{11}), \dots, (t_{n1} - t_{(n-1)1})$ ქვეინტერვალებად, სადაც $t_{n1} = t_1$. მაშინ ცხადია, რომ (5.82) ინტეგრალი გარდაიქმნება n ინტეგრალის ჯამად, n ქვეინტერვალეზე. ამავე დროს, $u(\tau)$ -მ შეიძლება მიიღოს ამ ქვეინტერვალეზე n განსხვავებული მნიშვნელობა, რომლებიც შეიძლება იყვნენ მუდმივი თითოეული ქვეინტერვალის შიგნით. ამიტომ, მიიღება ერთი ტიპის n განტოლება n

უცნობით (u -ს მნიშვნელობებით თითოეულ ქვეინტერვალზე), რომლებმაც უნდა დააკმაყოფილონ n განსხვავებული მნიშვნელობა $x_j^*(t_1)$, $\forall j=1,2,\dots,n$ -თვის. უკანასკნელი მართვადლობის კრიტერიუმი ერთი შესავალის შემთხვევისათვის სამართლიანია ასევე სისტემებისათვის. მრავალი შესავალით, ვინაიდან თუ სისტემას აქვს რამოდენიმე შესავალი და \mathbf{B}^* მატრიცის არცერთი სტრიქონი არ არის ნულოვანი, მაშინ შეიძლება გავხადოთ ყველა გამოსავალი ერთმანეთის ტოლი ან ერთმანეთთან დაკავშირებული ისეთნაირად, რომ სისტემა გარდაიქმნას სისტემაში ერთი შესავალით.

მაგალითი 5.5.

განვიხილოთ სისტემა:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

სადაც

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ისევე როგორც მაგალითში 5.2, ხოლო

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

მაგალითი 5.2-ის შესაბამისად \mathbf{A} მატრიცის დიაგონალიზაციისათვის გარდაქმნის მატრიცა მოიცემა თანაფარდობით:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

ხოლო

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

და

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(5.78) განტოლების შესაბამისად

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

რაც იძლევა დიაგონალიზირებულ (კანონიკურ) სისტემას:

$$\dot{x}_1^* = -x_1^*, \quad \dot{x}_2^* = 5x_2^* + u.$$

ვინაიდან x_1^* მდგომარეობაზე არ მოქმედებს მართვის შესავალი სიგნალი, ამიტომ ცხადია სისტემა არამართვადია.

5.4.2ა. ჯერადი საკუთრივი მნიშვნელობების შემთხვევა

იმ შემთხვევაში როდესაც \mathbf{A} მატრიცას ყველა საკუთრივი მნიშვნელობები არ არის განსხვავებული, არ შეიძლება კანონიკური დიაგონალიზაციის ჩატარება. ასეთ შემთხვევაში ის შეიძლება გარდაქმნილი იქნას კანონიკურ ჟორდანის ფორმაში (სამი ერთნაირი λ_1 საკუთრივი მნიშვნელობისათვის):

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (5.84)$$

A მატრიცა არის არადაყვანადი, თუ მინიმალური მრავალწევრი **A** და მახასიათებელი განტოლება ერთმანეთს ემთხვევა.

მინიმალური მრავალწევრი **A** ეწოდება მინიმალური რიგის შემდეგი სახის მრავალწევრულ განტოლებას:

$$A^q + \alpha_{q-1}A^{q-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0E = 0,$$

ხოლო მახასიათებელი განტოლება მოიცემა თანაფარდობით

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0,$$

სადაც λ - **A** მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობაა.

(5.84) მატრიცის ზედა მარცხენა დიაგონალურ მატრიცას უწოდებენ ჟორდანის ბლოკს..

მატრიცის დიაგონალზე შეიძლება იყოს ჟორდანის რამოდენიმე ბლოკი, თუ არსებობს ერთნაირი საკუთრივი მნიშვნელობების ერთი ჯგუფზე მეტი. მართვადობისთვის აუცილებელია, რომ **B** მატრიცის ერთი ელემენტი სტრიქონში, რომელიც წარმოადგენს ჟორდანის თითოეული ბლოკის ქვედა სტრიქონს, და **B**-ს მინიმუმ ერთი ელემენტი თითოეული სხვა სტრიქონიდან განსხვავებული იყოს ნულისგან.

ამრიგად, მართვადობის კრიტერიუმი რომელიც ეფუძნება კანონიკურობას, თხოულობს საკუთრივი მნიშვნელობებისა და ვექტორების გამოთვლას და ასევე მდგომარეობის განტოლებების თანმიმდევრულ გარდაქმნას. ამასთან,

გამოთვლების მოცულობა შეიძლება აღმოჩნდეს მეტად მნიშვნელოვანი.

5.4.3. მართვადობის კრიტერიუმი, დამყარებული $\exp(At)$ დაშლაზე

მართვადობის კრიტერიუმი, რომელიც ეფუძნება მდგომარეობის გარდამავალი e^{At} მატრიცის პოლინომიალურ დაშლას, ეკუთვნის კალმანს. ამ კრიტერიუმის გამოყენება არ იზღუდება სისტემებით A მატრიცის სხვადასხვა საკუთრივი მნიშვნელობებით. აქ სისტემის კანონიკურ სახეზე დაყვანის აუცილებლობა უქმდება, რაც აღარ მოითხოვს საკუთრივ ვექტორების განსაზღვრის აუცილებლობას. მაგრამ ეს კრიტერიუმი ნაკლებად ასახავს სისტემის ფიზიკურ თვისებებს, ვიდრე ზევით განხილული კრიტერიუმები.

მართვადობის შემოწმებისთვის კალმანი იყენებს (5.51) განტოლების ამონახსნს, რომელიც მოიცემა თანაფარდობით:

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (5.85)$$

ან ინტეგრირების საზღვრების ცვლილებისას

$$\mathbf{x}(t_0) = e^{A(t_0-t_1)}\mathbf{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t_0} e^{A(t_0-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (5.86)$$

სადაც \mathbf{x} , \mathbf{u} - n და m რიგის ვექტორებია, შესაბამისად.

ვინაიდან, ყოველთვის შეიძლება დავუშვათ, რომ $\mathbf{x}(t_1) \equiv 0$, მაშინ (5.86) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\mathbf{x}(t_0) = - \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (5.87)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ კელი-ჰამილტონის თეორემის თანახმად ნებისმიერი $(n \times n)$ განზომილების განტოლების

\mathbf{A} მატრიცა აკმაყოფილებს თავის მახასიათებელ n რიგის განტოლებას, ასე რომ

$$\mathbf{A}^n = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \mathbf{A}^i. \quad (5.88)$$

მაშასადამე, ნებისმიერი მრავალწევროვანი მატრიცული $(n+r) > n$ რიგის განტოლება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს მრავალწევროვანი $(n+r-1) \geq (n-1)$ რიგის განტოლებით:

$$\mathbf{A}^{n+r} = \mathbf{A}^r \mathbf{A}^n = \mathbf{A}^r \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \mathbf{A}^i = P_{n+r-1}(\mathbf{A}), \quad (5.89)$$

სადაც $P_{n+r-1}(\mathbf{A})$ - $(n+r-1)$ რიგის პოლინომია.

სილვესტრის თეორემის თანახმად ეს შედეგი სამართლიანია \mathbf{A} მატრიცის უსასრულო ხარისხოვანი მწკრივისათვის. მაშასადამე, თუ მხედველობაში მივიღებთ რომ

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} + \dots, \quad (5.90)$$

მივიღებთ

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) \mathbf{A}^i, \quad (5.91)$$

სადაც სასრული t სიდიდისთვის $\gamma_i(t)$ სკალარული კოეფიციენტები სასრულია ნებისმიერი \mathbf{A} მატრიცისათვის. (5.91) გამოსახულებიდან $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ გამოსახულების ჩასმა (5.87)-ში იძლევა:

$$\mathbf{x}(t_0) = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t_0 - \tau) \mathbf{A}^i \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \int_{t_0}^{t_1} \gamma_i(t_0 - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (5.92)$$

შემდეგ დაგუშვათ, რომ

$$\mathbf{M} \equiv (\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}), \quad (5.93)$$

$$\mathbf{W}_i \equiv -\int_{t_0}^{t_1} \gamma_i(t_0 - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad (5.94)$$

$$\mathbf{W} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{W}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (5.95)$$

სადაც \mathbf{M} - $n \times (n \times m)$ რიგის მატრიცაა, ხოლო \mathbf{W}_i და \mathbf{W} - $m \times 1$ და $(n \times m) \times 1$ რიგის ვექტორებია, შესაბამისად. მაშინ მიღებულ (5.87) განტოლება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს შემდეგი სახით:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}. \quad (5.96)$$

ამრიგად, სისტემა, რომელიც აღიწერება (5.51) განტოლებით, მართვადია, თუ n დამოუკიდებელი სკალარული განტოლებები აკმაყოფილებენ მატრიცულ (5.96) განტოლებას. სხვანაირად რომ ვთქვათ სისტემა მართვადია თუ \mathbf{M} მატრიცას აქვს რანგი n . პროცესებისათვის ერთი შესასვლელით, სადაც \mathbf{B} ვექტორ-სვეტია, ზევით მოყვანილი პირობა ნიშნავს რომ მართვადობისათვის უნდა არსებობდეს მატრიცა \mathbf{M}^{-1} . ზოგად შემთხვევაში, როდესაც \mathbf{u} -ს განზომილება ნაკლებია \mathbf{x} -ის განზომილებაზე, $\mathbf{x}(t_0)$ მდგომარეობის მისაღწევად 5.4.2. პუნქტში გადმოცემული მეთოდის თანახმად \mathbf{u} -ს ელემენტებმა მნიშვნელობები უნდა მიიღონ უბან-უბან უწყვეტი სიმრავლეებიდან $(t_0 - t_1)$ ინტერვალზე. უნდა აღინიშნოს, რომ მართვადობის კრიტერიუმი არის დამოკიდებული სისტემის მდგომარეობაზე. ამიტომ, სისტემა შეიძლება იყოს მართვადი, იმ შემთხვევაშიც კი როცა ის არამდგრადია მართვის არ არსებობის შემთხვევაშიც, ვინაიდან სისტემის მართვადობა დაკავშირე-

ბულია სისტემის მართვის პოტენციალურ შესაძლებლობასთან. მრიგად, მართვადი სისტემა სტაბილიზირებულია, იმის და დამოუკიდებლად მდგრადია თუ არა ის, მართვის არ მოდების შემთხვევაში.

მაგალითი 5.6.

ამ მაგალითში ჩვენ შევამოწმებთ სისტემის მართვადობას, 5.5 მაგალითში მოყვანილი სისტემისთვის e^{At} -ს დაშლადობაზე დაფუძნებული კრიტერიუმის საფუძველზე. თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix},$$

მივიღებთ

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

ვინაიდან მატრიცის ორივე სტრიქონი წრფივად დამოკიდებულია ($\det \mathbf{M} = 0$), სისტემა არამართვადია როგორც ეს უკვე იყო ნაჩვენები მაგალითში 5.5. კანონიკური გარდაქმნის დახმარებით.

5.4.4. მართვადობა გამოსავლის მიხედვით

წინა 5.4.2 და 5.4.3 განყოფილებები მიძღვნილი იყო მართვადობისადმი მდგომარეობის მიხედვით, ანუ სისტემის ნებისმიერი $\mathbf{x}(t_0)$ მდგომარეობიდან $\mathbf{x}(t_1)$ მდგომარეობაში გადაყვანის შესაძლებლობის განსაზღვრისადმი. მართვადობა გამოსავლის მიხედვით დაკავშირებულია სისტემის გამოსავლის გადაყვანაში $\mathbf{y}(t_0)$ მდგომარეობიდან $\mathbf{y}(t_1)$ მდგომარეობაში, როდესაც \mathbf{y} მოიცემა თანაფარდობით:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}, \quad (5.96)$$

სადაც \mathbf{x} და \mathbf{y} - $(n \times 1)$ და $(q \times 1)$ განზომილებიანი ვექტორებია, შესაბამისად და ამასთან $q \leq n$.

სისტემა, რომელიც აღიწერება (5.51) და (5.96) განტოლებებით, ე.ი.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{aligned} \quad (5.97)$$

არის მართვადი, გამოსავალის მიხედვით, თუ $\mathbf{y}(t_0)$ მდგომარეობა შეიძლება გადაყვანილი იყოს $\mathbf{y}(t_1)$ მდგომარეობაში სასრულ τ ($\tau = t_1 - t_0$) შუალედში სისტემის შესავალზე უბან-უბან უწყვეტი $\mathbf{u}(t)$, $t \in (t_0, t_1)$ ვექტორის მიწოდებისას.

ასეთი განმარტება იდენტიურია მართვადობისა მდგომარეობის მიხედვით, თუ $\mathbf{y}(t_0)$ და $\mathbf{y}(t_1)$ შეიძლება შევცვალოთ შესაბამისად $\mathbf{x}(t_0)$ და $\mathbf{x}(t_1)$ -ით. ანალოგია ვრცელდება მართვადობის კრიტერიუმებზე გამოსავალის მიხედვით, თუმცა აქ შეზღუდვები ნაკლებია. მაშასადამე, თუ გავითვალისწინებთ, რომ (5.96) განტოლებაში \mathbf{y} არის $(q \times 1)$ განზომილების ვექტორი, 5.4.3 განყოფილებაში მოყვანილი კრიტერიუმის (დაფუძვნილი პოლინომიალურ დაშლაზე) თანახმად სისტემა მართვადია, თუ არსებობს q რინგის მქონე \mathbf{M}' მატრიცა, სადაც

$$\mathbf{M}' = (\mathbf{CB}, \mathbf{CAB}, \mathbf{CA}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}). \quad (5.98)$$

ამ პირობის დამტკიცება ანალოგიურია 5.4.3 განყოფილებაში მოყვანილი დამტკიცებისა.

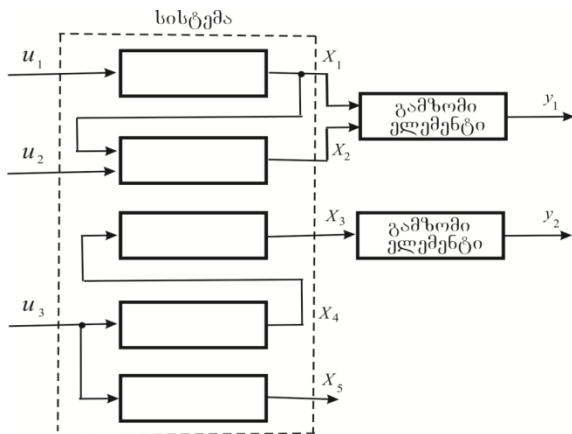
5.5. დაკვირვებადობა

5.5.1. დაკვირვებადობის ცნება

დაკვირვებადობის ცნება ავსებს მართვადობის ცნებას.

თუ მართვადობა თხოულობს, რომ სისტემის მდგომარეობა იყოს მგრძობიარე შესავალი სიგნალის ზემოქმედებაზე, დაკვირვებადობა კი თხოულობს, რომ

სისტემის მდგომარეობა ზემოქმედებდეს სისტემის გაზომად გამოსავალ სიგნალზე.



ნახ. 5.2. არადაკვირვებადი სისტემა

სისტემა დაკვირვებადია, თუ ყველა მისი მდგომარეობა შეიძლება პირდაპირ თუ ირიბად განისაზღვროს სისტემის გამოსავალი ვექტორის საშუალებით. ამიტომ, თუ რომელიმე მდგომარეობა ან ამ მდგომარეობის ცვლილება არ ზემოქმედებს გამოსავალ ვექტორზე, სისტემა არადაკვირვებადია (ნახ 5.2), ზუსტად ისევე, როგორც შესავალი სიგნალის ვექტორის გარკვეული მდგომარეობაზე არ ზემოქმედებისას, სისტემა არამართვადია (ნახ 5.1). გარდა ამისა არადაკვირვებადი სისტემა არ შეიძლება იდენტიფიცირებადი იყოს. მდგომარეობათა სივრცეში განსაზღვრული მოდელის პარამეტრების იდენტიფიკაცია შეუძლებელია არადაკვირვებადი მდგომარეობის დროს.

5.5.2. კანონიკური სისტემის დაკვირვებადობის კრიტერიუმი

წრფივი სისტემებისათვის განვიხილოთ ჰილბერტის დაკვირვებადობის კრიტერიუმი, რომელიც თხოულობს ამ

სისტემის წინასწარ დიაგონალიზაციას. ასეთი მიდგომა ანალოგიურია მართვადობის ადრე მოყვანილი კრიტერიუმის.

განვიხილოთ (5.97) სისტემა, რომელიც კანონიკურ სახეზე დაყვანის შედეგად ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \Delta \mathbf{x}^* + \mathbf{B}^* \mathbf{u}, \quad (5.99)$$

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{C}^* \mathbf{x}^*, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \mathbf{V}, \quad (5.100)$$

სადაც \mathbf{V} - საკუთრივი ვექტორების მატრიცაა.

სისტემა დაკვირვებადია თუ \mathbf{C}^* მატრიცის არც ერთი სვეტი არ არის ნულოვანი, ანუ თუ \mathbf{y}^* -ის ფორმირებაში მონაწილეობს ყველა x_i ($i=1,2,\dots,n$) თუ \mathbf{C}^* მატრიცის ერთი მაინც სვეტი ნულოვანია, მაშინ სისტემა ხდება არადაკვირვებადი.

ამის დასამტკიცებლად განვიხილოთ დიაგონალური სახეზე დაყვანილი სისტემა სხვადასხვა საკუთრივი მნიშვნელობებით, რომელიც მოცემულია დისკრეტულ ფორმაში:

$$\mathbf{x}(k+1) = \varphi \mathbf{x}(k) + \mathbf{G} \mathbf{u}(k), \quad k=1,2,\dots,n, \quad (5.101)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k), \quad (5.102)$$

სადაც φ - $(n \times n)$ განზომილების დიაგონალური მატრიცაა განსხვავებული ელემენტებით, \mathbf{x} - $(n \times 1)$ განზომილების მდგომარეობის ვექტორია, \mathbf{u} - $(m \times 1)$ განზომილების შესავალი ვექტორია, \mathbf{y} - $(q \times 1)$ განზომილების გამოსავალი ვექტორია, ამასთან $q \leq n$.

ცხადია, რომ თუ \mathbf{x} ვექტორის ყველა x_i კომპონენტი შედის \mathbf{y} -ში, მაშინ გაზომადი z სკალარული სიდიდე შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად:

$$z(k) = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{y} = w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots + w_q y_q. \quad (5.103)$$

აქ \mathbf{w} -ს სიდიდეს ირჩევენ ისეთნაირად, რომ $\mathbf{w}^T \mathbf{C}$ -ს ყველა ელემენტი არ იყოს ნულის ტოლი.

თუ ჩავესვათ y -ის გამოსახულებას (5.102)-დან (5.103)-ში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} z(k) &= \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{x}(k) = \mathbf{d} \mathbf{x}(k) = d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n, \\ \mathbf{d} &= \mathbf{w}^T \mathbf{C} \equiv (d_1, d_2, \dots, d_n). \end{aligned} \quad (5.104)$$

სადაც ყველა x_i ($i=1,2,\dots,n$) ჩართულია \mathbf{z} -ში.

იმისათვის რომ განვსაზღვროთ $x_i(k)$ $\forall i$ -თვის z სიდიდის გაზომვების შედეგად, აუცილებელია z სიდიდის გაზომვის განხორციელება დროის n მომენტში. თუ ავლნიშნავთ ამ გაზომვებს $z(j)$, $j=k, k+1, \dots, k+r$, სადაც r მთელი რიცხვია და $r \geq n+1$, მაშინ (5.101) და (5.104) განტოლებებიდან მივიღებთ $x_i(k)$ -თვის n დამოუკიდებელ განტოლებას:

$$\begin{aligned} z(k) &= \mathbf{d} \mathbf{x}(k), \\ z(k+1) &= \mathbf{d} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{d} \varphi \mathbf{x}(k) + \mathbf{d} \mathbf{G} \mathbf{u}(k), \\ z(k+2) &= \mathbf{d} \mathbf{x}(k+2) = \mathbf{d} \varphi^2 \mathbf{x}(k) + \mathbf{d} \mathbf{G} \mathbf{u}(k+1) + \\ &= \mathbf{d} \varphi^2 \mathbf{x}(k) + \mathbf{d} \varphi \mathbf{G} \mathbf{u}(k) + \mathbf{d} \mathbf{G} \mathbf{u}(k+1), \quad (5.105) \\ &\dots \dots \dots \\ z(k+r) &= \mathbf{d} \mathbf{x}(k+r) = \mathbf{d} \varphi^r \mathbf{x}(k) + \mathbf{d} \sum_{\mu=0}^{r-1} \varphi^\mu \mathbf{G} \mathbf{u}(k+r-\mu). \end{aligned}$$

შემოვიტანოთ n განზომილებიანი $\mathbf{z}(k)$ ვექტორი:

$$\mathbf{z}(k) \equiv [z(k) + z(k+1) + \dots + z(k+n-1)]^T. \quad (5.106)$$

ამ აღნიშვნის გათვალისწინებით (5.105) განტოლებები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{P} \mathbf{x}(k) + \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i \mathbf{u}(k+i), \quad (5.107)$$

სადაც \mathbf{P} განისაზღვრება (5.105)-დან და $n \times n$ განზომილების მატრიცა:

$$\mathbf{P} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}\varphi \\ \vdots \\ \mathbf{d}\varphi^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (5.108)$$

იგულისხმება, რომ (5.107) განტოლებაში შეიძლება $\mathbf{u}(k+i)$ ვექტორების გაზომვა და ამიტომაც მათი ყოფნა ამ განტოლებაში არ იწვევს არადაკვირვებადობას. ვინაიდან, φ მატრიცა დიაგონალურია სხვადასხვა ელემენტებით, ამიტომ (5.108)-ში სტრიქონები წრფივად დამოუკიდებელია და არსებობს \mathbf{P}^{-1} , მაშასადამე $\mathbf{x}(k)$ შეიძლება ნაპოვნი იქნას (5.107) განტოლებიდან, თუ $\mathbf{z}(k)$ და $\mathbf{u}(k+i)$ ცნობილია. ცხადია, რომ თუ (5.104) განტოლება არ შეიცავს \mathbf{x} მდგომარეობის ვექტორის x_i კომპონენტებს, მაშინ (5.103) განტოლებაში არც z არც $y(k)$ არ შეიცავს არავითარ ინფორმაციის ამ x_i -ის შესახებ და სისტემის მდგომარეობის განსაზღვრა $y(k)$ -ის გაზომვების საფუძველზე შეუძლებელია. უკანასკნელ შემთხვევაში \mathbf{d} წარმოადგენს ვექტორ-სტრიქონს ელემენტების $n-1$ რიცხვით (ან ელემენტების უფრო მცირე რიცხვით, თუ მდგომარეობის ვექტორის შემდგომი კომპონენტები არ შედის (5.104) განტოლებაში). მაშასადამე, \mathbf{P} მატრიცა (5.107) განტოლებაში გადაგვარებულია და არ შეიძლება მისი შებრუნებული მატრიცის განსაზღვრა \mathbf{x} -ის მიღებისათვის გაზომვების საფუძველზე.

მაგალითი 5.7.

განვიხილოთ სისტემა:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx},$$

სადაც

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

როგორც 5.5 მაგალითში, ხოლო

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 1).$$

5.5 მაგალითიდან ვიცით, რომ

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

წარმოადგენს \mathbf{A} მატრიცის საკუთრივი ვექტორებისგან შედგენილ მატრიცას. სისტემის დაკვირვებების განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\mathbf{V} = (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (0 \ 3).$$

ვინაიდან \mathbf{C}^* მატრიცის პირველი სვეტი ნულის ტოლია, ამიტომ სისტემა არადაკვირვებადია.

5.5.3 e^{A^t} ექსპონენტის დაშლაზე დაფუძნებული დაკვირვებადობის კრიტერიუმი

ეს კრიტერიუმი რომელიც დაფუძნებულია მდგომარეობის e^{A^t} გარდამავალი მატრიცის პოლინომიალურ დაშლაზე, ანალოგიურია ასეთ დაშლაზე დამყარებული მართვადობის კრიტერიუმის.

განვიხილოთ სისტემის მდგომარეობისა და გაზომვების უწყვეტი განტოლებები:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x},$$

(5.109)

თუ დაუშვებთ, რომ შესავალი $\mathbf{u}(t)$ ვექტორის გაზომვა შეიძლება, მაშინ შეიძლება ითქვას, რომ $\mathbf{u}(t)$ ვექტორის ნულთან გატოლება არ მოახდენს დაკვირვებადობის კრიტერიუმზე გავლენას. ამიტომ, შეიძლება შემდგომი

ანალიზის გამარტივების მიზნით, დაუშვათ რომ $\mathbf{u}(t)=0$.
მაშინ მივიღებთ:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0). \quad (5.110)$$

თუ გამოვიყენებთ $e^{\mathbf{A}t}$ -თვის (5.91) გამოსახულებას, მაშინ (5.110) განტოლება შეიძლება დაყვანილი იყოს შემდეგ სახეზე:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(t-t_0) \mathbf{C} \mathbf{A}^i \mathbf{x}(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^i \gamma_i(t-t_0) \mathbf{x}(t_0). \quad (5.111)$$

ავლნიშნოთ

$$\mathbf{L} \equiv \left(\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T, (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T \right) \quad (5.112)$$

და

$$\mathbf{\Gamma} \equiv (\gamma_1(t-t_0), \gamma_2(t-t_0), \dots, \gamma_{n-1}(t-t_0)). \quad (5.113)$$

მაშინ (5.111) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{L}^T \mathbf{x}(t_0). \quad (5.114)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ γ_i და მაშასადამე $\mathbf{\Gamma}$ -ს ექნება სხვადასხვაა მნიშვნელობა t დროის სხვადასხვა მომენტში ერთი და იგივე t_0 დროს. ამრიგად, (5.109) სისტემის სრული დაკვირვებისათვის (ანუ \mathbf{y} -ის საშუალებით $\mathbf{x}(t_0)$ -ის ყველა ელემენტის ცალსახად განსაზღვრისათვის) მოითხოვება, რომ \mathbf{L} მატრიცის n სვეტი იყოს წრფივად დამოუკიდებელი, ანუ \mathbf{L} მატრიცას უნდა ჰქონდეს n -ის ტოლი რანგი. შემდგომ, $\mathbf{x}(t_0)$ მიღებისათვის შეიძლება მოთხოვნილი იყოს, რომ გაზომვები ტარდებოდეს t დროის სხვადასხვა მომენტში.

მაგალითი 5.8

განვიხილოთ სისტემა, რომელსაც გააჩნია მდგომარეობის ორი ცვლადი და ერთი გაზომვადი ცვლადი, გარდა ამისა

(5.112)-ით განსაზღვრული L მატრიცის ორი სვეტი წრფივად დამოკიდებულია:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_1 & 3l_1 \\ l_2 & 3l_2 \end{pmatrix}.$$

ამ შემთხვევაში (5.114) განტოლება იღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= (\gamma_0, \gamma_1) \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ 3l_1 & 3l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\gamma_0, \gamma_1) \begin{pmatrix} l_1 x_1 & l_2 x_2 \\ 3l_1 x_1 & 3l_2 x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \gamma_0(l_1 x_1 + l_2 x_2) + 3\gamma_1(l_1 x_1 + l_2 x_2). \end{aligned}$$

ვინაიდან \mathbf{L} არ არის დამოკიდებული t -ზე, x_1 და x_2 -ის ცალსახა განსაზღვრა არ შეიძლება. გამოსავალ სიგნალში ისინი ჩნდება $l_1 x_1 + l_2 x_2$ კომბინაციის ფორმით, რომლის განცალკევება ვერ ხერხდება იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც შესაძლებელია გამოსავალი სიგნალის გაზომვა t დროის ნებისმიერი რიცხვის სხვადასხვა მომენტში.

თავი 6

იდენტიფიკაცია კვაზიბაწრფეების მეთოდით

6.1. კვაზიბაწრფეების მეთოდის შესახებ

კვაზიბაწრფეების მეთოდი პირველად შემოიტანეს ბელმანმა და კალბამ არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების სასაზღვრო ამოცანების გადაწყვეტისათვის. ეს მეთოდი გამოიყენება არაწრფივი სისტემების პარამეტრების იდენტიფიკაციისათვის.

კვაზიბაწრფეების მეთოდი თავისი არსით წარმოადგენს არაწრფივი, ძირითადად სტაციონარული, მრავალწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანის გარდაქმნას წრფივ არასტაციონარულ ამოცანად. იგულისხმება, რომ იდენტიფიცირებადი პარამეტრები მუდმივია. ისევე, როგორც არაწრფივი სისტემების იდენტიფიკაციის სხვა მეთოდებში, ამ შემთხვევაშიც ცნობილი უნდა იყოს არაწრფივობის ტიპი, აპროქსიმაციის სახით მაინც. შეიძლება გათვალისწინებული იყოს პარამეტრების არასტაციონარულობა, თუ ისინი იცვლება ნელა იდენტიფიკაციის პროცედურის კრებადობის სიჩქარესთან შედარებით. პროცედურის კრებადობა იქნება საკმაოდ მაღალი, თუ საწყისი მიახლოება ახლოსაა შესაფასებელი პარამეტრების მნიშვნელობებთან, რომელთა იდენტიფიცირება არის საჭირო. მეთოდი თავისი არსით არის იტერაციული, ის არ თხოულობს სპეციალური საცდელი ზემოქმედებების მიწოდებას და ამიტომ გამოყენებადია დროის რეალურ მაშტაბში.

ვინაიდან იდენტიფიკაციის პროცედურები კვაზიბაწრფეების მეთოდით იკრიბება პარამეტრების ჭეშმარიტი მნიშვნელობებისადმი მხოლოდ მაშინ, როდესაც პარამეტრების სიდიდეების საწყისი მიახლოებები მოთავსებულია კრებადობის არის შიგნით, აღნიშნული პროცედურებისათვის მოითხოვება განსაზღვრული აპრიორული ინფორმაცია პარამეტრების ცვლილების დიაპაზონის შესახებ. კვაზიბაწრფეების მეთოდს განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს იმ შემთხვევაში, როდესაც სისტემის მდგომარეობის სხვადასხვა ცვლადები არ შეიძლება გაზომილი იყოს ერთდროულად გაზომვის ყველა მომენტში. ასეთ

შემთხვევაში სისტემის აღწერა მდგომარეობის სივრცეში თავისთავად წარმოადგენს მრავალწერტილოვან ამოცანას, რომლისთვისაც კვაზიგაწრფეების მეთოდის გამოყენება ბუნებრივია. კვაზიგაწრფეების მეთოდი თავისი არსით წარმოადგენს იდენტიფიკაციის მეთოდს, რომელიც დაფუძნებულია გაზომვების ფიქსირებულ რიცხვზე და არა გაზომვების თანმიმდევრულ ზრდაზე. იმ შემთხვევაში, როდესაც ადგილი აქვს ზოგიერთი მდგომარეობის ცვლადის გაზომვების საკმარისს რიცხვს, ხოლო სხვა მდგომარეობის გაზომვები არ ტარდება, კვაზიგაწრფეების მეთოდმა შეიძლება მოგვცეს ასეთი არადაკვირვებადი მდგომარეობის ცვლადებისა და პარამეტრების ერთდროული შეფასებები.

6.2. უწყვეტი არაწრფივი სისტემების იდენტიფიკაცია კვაზიგაწრფეების მეთოდით

განვიხილოთ არაწრფივი სისტემა, რომელიც აღიწერება განტოლებით:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \quad (6.1)$$

სადაც \mathbf{f} - არაწრფივი ფუნქციაა.

(6.1) განტოლებაში j -ური სტრიქონი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\dot{x}_j = f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \quad (6.2)$$

სადაც \mathbf{x} - n განზომილებიანი მდგომარეობის ვექტორია, \mathbf{u} - m განზომილებიანი შესავალი ზემოქმედებების ვექტორია, \mathbf{p} - r განზომილებიანი პარამეტრების ვექტორია

\mathbf{p} ვექტორის კომპონენტები უცნობია და ისინი უნდა იყოს იდენტიფიცირებული. \mathbf{u} იზომება, ხოლო f_j ფუნქციების სახე ცნობილია ყოველი j -თვის. განტოლებათა (6.1) სისტემა ექვემდებარება $(n+r)$ სასაზღვრო პირობებს, რომლებიც მოცემულია $(n+r)$ განზომილი ფუნქციებით $x_j(t_i)$ სხვადასხვა x_j მდგომარეობისათვის დროის სხვადასხვა t_i მომენტებისათვის.

ასეთი სიტუაციის მაგალითს იძლევა სისტემა:

$$\dot{x} = ax^3 + bu(t), \quad (6.3)$$

სადაც a და b უცნობი პარამეტრებია, რომელთა იდენტიფიკაცია მოითხოვება, ხოლო x და u - მდგომარეობისა და მართვის ცვლადებია.

იგულისხმება, რომ \mathbf{p} ვექტორის კომპონენტები მუდმივია, ამიტომ (6.1) განტოლება შეიძლება შევავსოთ მდგომარეობის შემდეგი განტოლებით:

$$\dot{\mathbf{p}} = 0. \quad (6.4)$$

თუ გავაერთიანებთ (6.1) და (6.4) განტოლებებს, მივიღებთ

$$\dot{\mathbf{z}} = \psi(\mathbf{z}, \mathbf{u}), \quad (6.5)$$

სადაც

$$\mathbf{z} \equiv (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_r)^T. \quad (6.6)$$

თუ (6.5)-ის ტეილორის მწკრივად დაშლაში გავითვალისწინებთ მხოლოდ პირველი რიგის წევრებს, მივიღებთ $(\mu+1)$ -ურ შეფასებას μ -ური შეფასებიდან შემდეგი სახით:

$$\hat{z}_{\mu+1} = \hat{\psi}_{\mu+1} = \hat{\psi}_{\mu} + \frac{\partial \psi_{\mu}}{\partial \mathbf{z}} (\hat{z}_{\mu+1} - \hat{z}_{\mu}), \quad (6.7)$$

სადაც

$$\psi \equiv [\mathbf{f}^T, 0, \dots, 0]^T. \quad (6.8)$$

აქ \mathbf{f} -ს აქვს იეთივე აზრი, როგორც (6.2) განტოლებაში, ამასთან ნულების რიცხვი (8.6) განტოლებაში r -ის და

$$\frac{\partial \hat{\psi}_{\mu}}{\partial \mathbf{z}} \equiv \left. \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}=\hat{z}_{\mu}}. \quad (6.9)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ (6.7) განტოლება - წრფივია $\hat{z}_{\mu+1}$ -ს მიმართ. ამიტომ ის შეიძლება წარმოდგენილი იყოს შემდეგი სახით:

$$\hat{z}_{\mu+1}(t) = \hat{\mathbf{A}}_{\mu} \hat{z}_{\mu+1}(t) + \hat{\mathbf{V}}_{\mu}, \quad (6.10)$$

სადაც

$$\hat{\mathbf{V}}_{\mu} \equiv \hat{\psi}_{\mu} - \frac{\partial \hat{\psi}_{\mu}}{\partial \hat{\mathbf{z}}} \hat{\mathbf{z}}_{\mu} = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{z}}_{\mu}, \quad (6.11\text{a})$$

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv \frac{\partial \hat{\psi}_{\mu}}{\partial \mathbf{z}}. \quad (6.11\text{b})$$

(6.10) განტოლებას აქვს სრული ამონახსნი:

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t) = \hat{\phi}(t, t_0) \hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t_0) + \hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(t), \quad (6.12)$$

სადაც ϕ - (6.10) განტოლების ზოგადი ამონახსნია, რომელიც განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$\hat{\phi}_{\mu+1}(t, t_0) = \frac{\partial \hat{\psi}_{\mu}}{\partial \mathbf{z}} \hat{\phi}_{\mu+1}(t, t_0), \quad (6.13)$$

$$\hat{\phi}_{\mu}(t_0, t_0) = E, \quad \forall \mu \in \{1, 2, \dots, (n+r)\}, \quad (6.14)$$

ხოლო $\hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(t)$ - (6.10) განტოლების კერძო ამონახსნია, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(t) = \hat{\psi}_{\mu}(\hat{\mathbf{z}}, t) - \frac{\partial \hat{\psi}_{\mu}(t)}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{z}_{\mu}(t) + \frac{\partial \hat{\psi}_{\mu}(t)}{\partial \mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t), \quad (6.15)$$

შემდეგი პირობისას;

$$\hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(t_0) = 0. \quad (6.16)$$

საწყისი პირობების ვექტორი $\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t) \quad \forall \mu$ -თვის (6.12) განტოლებაში მიიღება ისეთნაირად, რომ აკმაყოფილებს მრავალწერტილოვან სასაზღვრო პირობას, რომლებიც მოცემულია $n+r$ სიდიდებით ან ფუნქციებით $x_j(t_i)$, რომელთა გაზომვა შესაძლებელია და ისინი იქნება x_j მდგომარეობის $n+r$ გაზომვები t_i დროის მომენტებში.

აქედან გამომდინარე (6.12) განტოლებისათვის მივიღებთ:

$$x_j(t_i) = \hat{\phi}_{j, \mu+1}(t, t_0) \hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t_0) + q_{j, \mu+1}(t_i), \quad (6.17)$$

სადაც $\hat{\phi}_{j, \mu+1}$ - $\hat{\phi}_{\mu+1}$ -ის j -ური სტრიქონია, ხოლო $x_j(t_i)$ - მდგომარეობის j -ური ცვლადია $t = t_i$ მომენტში. ვინაიდან $n+r$ სასაზღვრო პირობები იძლევა (6.17) სახის $n+r$ განტოლებას $n+r$ რაოდენობის $x_j(t_i)$ -თვის, ამიტომ იქნება $n+r$ წრფივი განტოლება $\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t_0)$ -თვის, რაც იძლევა

$\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t_0)$ -თვის $n+r$ კომპონენტის მიღების საშუალებას. იმ შემთხვევაში, როდესაც სასაზღვრო პირობებს ედებოდა ხმაური, შესაძლებელია მიზანშეწონილი იყოს $n+r$ -ზე მეტი რაოდენობის სასაზღვრო მნიშვნელობების არსებობა. მაშასადამე, შეიძლება განესაზღვროთ $\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t_0)$ -ის $n+r$ კომპონენტი, (6.17) განტოლების პარამეტრების მიმართ წრფივი რეგრესიის გამოყენებით ხმაურის ზეგავლენის შემცირების მიზნით სასაზღვრო მნიშვნელობების უკანასკნელ ჯგუფში $v > n+r$. (6.17) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ უნდა მიღებული იყოს რაიმე საწყისი შეფასება $\hat{\mathbf{x}}_0(t_0)$. ეს შეფასება გამოიყენება საწყის შეფასება $\hat{\mathbf{p}}$ -თან ერთად, იმისათვის რომ მიღებული იყოს (6.1) განტოლების ამონახსნის საწყისი შეფასება დროის მიხედვით $t=0$ მომენტიდან ბოლო t_1 მომენტამდე (6.17) განტოლებაში. ეს ამონახსნი დროით არეში ისმება (6.12) განტოლებაში φ და \mathbf{p} -ს საწყისი შეფასებების მისაღებად (6.17) განტოლებაში. $\mathbf{x}(t_0)$ და \mathbf{p} სიდიდეების შემდგომი შეფასებების მისაღებად ($\mu=1,2,\dots$) $t=0$ მომენტიდან ბოლო t_1 მომენტამდე \mathbf{x} -ის შეფასება მეორდება ზევით აღწერილი თანმიმდევრობის მიხედვით. ამასთან დაკავშირებით, კვაზიგაწრფეების მეთოდით იდენტიფიკაციისას გამოთვლითი დანახარჯები მნიშვნელოვანია და მეთოდის გამოყენება იზღუდება ძირითადად იმ შემთხვევებით, როდესაც შესაძლებელია მხოლოდ ზოგიერთი ცვლადის გაზომვა დროის სხვადასხვა მომენტში.

\mathbf{p} პარამეტრების ვექტორის განსაზღვრის მოყვანილი პროცედურა კვაზიგაწრფეების მეთოდით შეიძლება დამატებით ახსნილი იყოს შემდეგი მაგალითის განხილვით.

მაგალითი. 6.1.

განვიხილოთ პროცესი, რომელიც აღიწერება (6.3) სახის განტოლებით, როდესაც u ცვლადი შეიძლება გაიზომოს, a და b უცნობი პარამეტრები უნდა იყოს იდენტიფიცირებული.

შევაღვინოთ \mathbf{z} ვექტორი (6.6)-ის თანახმად:

$$\mathbf{z} \equiv (x, a, b)^T. \quad (6.18)$$

(6.3) განტოლებაში \mathbf{z} ვექტორის $(\mu+1)$ რიგის შეფასება (6.7) და (6.8) განტოლებების თანახმად იღებს სახეს:

$$\hat{z}_{\mu+1} = \hat{\psi}_{\mu+1} = \hat{\psi}_{\mu} + \frac{\partial \psi_{\mu}}{\partial z} (\hat{z}_{\mu+1} - \hat{z}_{\mu}) = \begin{pmatrix} ax^3 + bu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3ax^3 & x^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{\mu+1} - \hat{x}_{\mu} \\ \hat{a}_{\mu+1} - \hat{a}_{\mu} \\ \hat{b}_{\mu+1} - \hat{b}_{\mu} \end{pmatrix}.$$

თუ გავითვალისწინებთ აღნიშვნებს (6.1) და (6.10)-დან, მივიღებთ:

$$\hat{z}_{\mu+1}(t) = \hat{\mathbf{A}}_{\mu} \hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t) + \hat{\mathbf{V}}_{\mu} = \begin{pmatrix} 3ax^3 & x^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}_{\mu+1} + \begin{pmatrix} ax^3 + bu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3ax^3 & x^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}_{\mu}.$$

(6.13) განტოლებიდან გამომდინარეობს:

$$\hat{\phi}_{\mu+1}(t_1 - t_0) = \begin{pmatrix} 3\hat{a}\hat{x}^2(t) & \hat{x}^3(t) & u(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu} \hat{\phi}_{\mu+1}(t_1 - t_0), \quad (6.19)$$

სადაც

$$\hat{\phi}_{\mu}(t_0, t_0) = 1, \quad \forall \mu \in \{1, 2, \dots\}.$$

საწყისი მდგომარეობის ვექტორი $\hat{\mathbf{z}}(t_0)$ (6.12) განტოლებაში მიიღება აპრიორულად მოცემული სასაზღვრო მნიშვნელობებიდან $x(t_1)$, $x(t_2)$, $x(t_3)$, $x(t_4)$ (6.17) განტოლების დახმარებით შემდეგნაირად (იმის გათვალისწინებით, რომ სასაზღვრო მნიშვნელობების განსახილველი რიცხვი მეტია

მინიმალურ რიცხვზე 3, რომელიც საჭიროა სამგანზომილებიან \mathbf{z} ვექტორისათვის):

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \hat{\phi}_{1, \mu+1}(t_1, t_0) \hat{x}_{\mu+1}(t_0) + \hat{\phi}_{12, \mu+1}(t_1, t_0) \hat{a}_{\mu+1} + \\ &\quad + \hat{\phi}_{13, \mu+1}(t_1, t_0) \hat{b}_{\mu+1} + \mathbf{q}_{1, \mu+1}(t_1), \\ x(t_2) &= \hat{\phi}_{1, \mu+1}(t_2, t_0) \hat{x}_{\mu+1}(t_0) + \dots + \mathbf{q}_{1, \mu+1}(t_2), \\ &\vdots \\ x(t_4) &= \hat{\phi}_{1, \mu+1}(t_4, t_0) \hat{x}_{\mu+1}(t_0) + \dots + \mathbf{q}_{1, \mu+1}(t_4). \end{aligned} \quad (6.20)$$

$\hat{\phi}_{j, \mu+1}$ პარამეტრები დამოკიდებულია წარმოებულებზე $\partial \hat{\psi} / \partial \mathbf{z} \big|_{\mu}$ (6.13) და (6.19) განტოლებების შესაბამისად და ამრიგად არ არის დამოკიდებული $\hat{x}_{\mu+1}(t_0)$ -ზე. ანალოგიურად $\hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(t_i)$ გამოითვლება (6.15) განტოლებიდან $\hat{\psi}_{\mu}$, $\partial \hat{\psi} / \partial \mathbf{z} \big|_{\mu}$ და $\hat{\mathbf{z}}_{\mu}$ საშუალებით (6.16) პირობების გათვალისწინებით და ასევე არ არის დამოკიდებული $\hat{x}_{\mu+1}(t_0)$ -ზე. ამრიგად, $\hat{x}_{\mu+1}(t_0)$, $\hat{a}_{\mu+1}$, $\hat{b}_{\mu+1}$ -ის გამოთვლა რეგრესიის საშუალებით (6.20) განტოლებებიდან ხორციელდება იმ ვარაუდით, რომ a , b , $x(t_0)$ სიდიდეების საწყისი მიახლოებები ცნობილია. (6.20) განტოლებებიდან სამი უცნობის უშუალო (არარეგრესიული) გამოთვლა შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს x -ის სამი სასაზღვრო მნიშვნელობა, ხოლო გაზომვები არ შეიცავს ხმაურს.

6.3. დისკრეტული სისტემების იდენტიფიკაცია კვანთაზომების მეთოდით

დისკრეტული სისტემების იდენტიფიკაციის პროცედურები შეიძლება უშუალოდ განსაზღვრული იყოს უწყვეტი სისტემების იდენტიფიკაციის პროცედურებიდან.

განვიხილოთ დისკრეტული სისტემა, რომელიც აღიწერება განტოლებით:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{p}], \quad kT = t, \quad (6.21)$$

სადაც $k=1,2,\dots,\nu$, \mathbf{x} - მდგომარეობის n განზომილებიანი ვექტორია, \mathbf{u} - შესავალი m განზომილებიანი ვექტორია, ხოლო \mathbf{p} - პარამეტრების r განზომილებიანი ვექტორია.

იგულისხმება, რომ (6.21) განტოლებათა სისტემა აკმაყოფილებს $(n+r)$ სასაზღვრო პირობებს, რომლებიც წარმოადგენენ სკალარულ გაზომად $x_j(i)$ ფუნქციებს, სადაც $x_j(i)$ აღნიშნავს \mathbf{x} ვექტორის j -ურ კომპონენტს i -ურ ინტერვალში.

უწყვეტი შემთხვევის ანალოგიურად განვსაზღვროთ $(n+r)$ განზომილებიანი \mathbf{z} ვექტორი:

$$\mathbf{z} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

სადაც

$$\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{p}(k). \quad (6.23)$$

(6.21) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\mathbf{z}(k+1) = \lambda[\mathbf{z}(k), \mathbf{z}(k), k], \quad (6.24)$$

და სტაციონარული სისტემებისათვის გვაქვს:

$$\lambda \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{p}(k)] \\ \mathbf{p}(k) \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

უწყვეტი შემთხვევის ანალოგიურად გამოვიყენოთ ტეილორის მწკრივად დაშლა (6.24) განტოლებისათვის \mathbf{z} ვექტორის $(\mu+1)$ შეფასებას $\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}$ და ამავე ვექტორის μ შეფასებას $\hat{\mathbf{z}}_{\mu}$ შორის შემდეგი თანაფარდობის მისაღებად:

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(k+1) = \hat{\lambda}_{\mu}[\hat{\mathbf{z}}(k), \mathbf{z}(k), k] + \left(\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \mathbf{z}} \right)_{\mu} [\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(k) - \hat{\mathbf{z}}_{\mu}(k)]. \quad (6.26)$$

(6.25) განტოლება შეიძლება გადაიწეროს $\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}$ -თვის წრფივი განტოლების სახით ცვლადი კოეფიციენტებით:

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(k+1) = \hat{\mathbf{B}}(k)\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(k+1) + \hat{\mathbf{w}}(k), \quad (6.27)$$

სადაც

$$\hat{\mathbf{B}}(k) \equiv \left(\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \mathbf{z}} \right)_{\mu}, \quad (6.28\text{a})$$

$$\hat{\mathbf{w}}(k) \equiv \hat{\lambda}[\hat{\mathbf{z}}(k), \mathbf{z}(k), k] - \left(\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \mathbf{z}} \right)_{\mu} \hat{\mathbf{z}}_{\mu}(k). \quad (6.28\text{b})$$

(6.26) განტოლების ამონახსნს, უწყვეტი შემთხვევის ანალოგიურად, აქვს შემდეგი სახე:

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(k) = \hat{\phi}_{\mu+1}(k, h) \hat{\mathbf{z}}_{\mu}(h) + \hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(k), \quad (6.29)$$

სადაც

$$\hat{\phi}_{\mu+1}(k, h) = \hat{\mathbf{A}}_{\mu}(k) \hat{\phi}_{\mu}(k, h), \quad k > h, \quad (6.30)$$

$$\hat{\phi}(h, h) = E, \quad (6.31)$$

ხოლო $\hat{\mathbf{q}}(k)$ - (6.26) განტოლების კერძო ამონახსნია შემდეგი ფორმით:

$$\hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(k+1) = \hat{\mathbf{B}}_{\mu}(k) \hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(k) + \hat{\mathbf{w}}(k) \quad (6.32)$$

საწყისი პირობისას:

$$\hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(0) = 0. \quad (6.33)$$

აქ საწყისი $\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}$ ვექტორის $(n+r)$ კომპონენტები უნდა აკმაყოფილებდეს $x_j(i)$ -ის $(n+r)$ სასაზღვრო პირობებს. იმისათვის, რომ უზრუნველყოფილი იყოს ამონახსნის ერთადერთობა, როდესაც გაზომვებზე დადებულია ხმაური, აუცილებელია $v > n+r$ სასაზღვრო პირობის შემოტანა. ეს პირობები ქმნის წრფივ რეგრესიულ თანაფარდობას $\mathbf{z}_{\mu+1}(0)$ ვექტორის $(n+r)$ კომპონენტის მისაღებად (ისევე როგორც უწყვეტ შემთხვევაში).

იდენტიფიკაციის პროცედურის შესრულებისათვის აუცილებელია \mathbf{p} და $\mathbf{x}(0)$ ვექტორების საწყისი შეფასებების $\hat{\mathbf{p}}_0$ და $\hat{\mathbf{x}}(0)$ არსებობა. საწყისი შეფასებები რაც შეიძლება ახლოს უნდა იყოს რეალურ მნიშვნელობებთან, ვინაიდან კრებადობა ყოველთვის არ არის გარანტირებული და ის დამოკიდებულია საწყის შეფასებებზე. უწყვეტი შემთხვევის

ანალოგიურად, საწყისი შეფასებების მნიშვნელობების როლი ხდება უმნიშვნელო, როდესაც გაზომვების რიცხვი საკმაოდ დიდია.

თაზო 7

წრფივი არასტაციონარული დინამიკური სისტემების იდენტიფიკაცია

7.1. არასტაციონარული სისტემების იდენტიფიკაციის თავისებურებები

სისტემები ხასიათდებიან შესასვლელებით და გამოსასვლელებით და ამავე დროს მმართველი ცვლადები დაკავშირებული არიან შესასვლელებთან, ხოლო ცვლადები, რომლებიც ახასიათებენ პროცესის მიმდინარეობას სისტემაში, დაკავშირებული არიან გამოსასვლელებთან. იმისათვის, რომ განისაზღვროს მართვა, რომელიც საჭიროა მიეწოდოს სისტემას მართვის მიზნებიდან გამომდინარე, აუცილებელია რომ შესაძლებელი იყოს წინასწარმეტყველება სისტემის რეაქციების შესახებ შესაძლო მმართველი ზემოქმედებების რაიმე სიმრავლეზე. ასეთი წინასწარმეტყველება შეიძლება მიღებული იქნას შესასვლელებზე ადრე მიწოდებულ ზემოქმედებებზე სისტემის რეაქციების მიხედვით ან სისტემის მათემატიკური მოდელის გამოყენებით.

მათემატიკური მოდელი წარმოადგენს რეალური სისტემის კვლევისათვის მნიშვნელოვანი თვისებების რაოდენობრივ აღწერას. მოდელი შედგება მათემატიკური ობიექტებისაგან (რიცხვები, ვექტორები და ა. შ.), რომლებიც ასახავენ სისტემაში პროცესის მიმდინარეობის მაჩვენებლებს და სისტემაზე მოქმედ ზემოქმედებებს, და მათემატიკურ ობიექტებს შორის მიმართებისაგან, რომელიც აღიწერება მათემატიკური ოპერაციების საშუალებით. მოდელმა უნდა ასახოს კვლევისათვის საჭირო ყველა არსებითი ფაქტორი და არ უნდა შეიცავდეს არაარსებით და კვლევის საბოლოო შედეგის მიღებისათვის გამართლებულ და ნაკლებად მოქმედ ფაქტორებს. ერთი და იგივე ფაქტორი შეიძლება იყოს არსებითი ერთი ამოცანისათვის და არაარსებითი სხვა ამოცანისათვის, რის გამოც ერთი და იგივე რეალური სისტემისათვის შეიძლება გამოყენებული იქნას სხვადასხვა სახის მათემატიკური მოდელი კვლევის მოთხოვნების მიზნებისაგან დამოკიდებულებით. პრაქტიკული

მოსაზრებიდან გამომდინარე უნდა გამოყენებული იქნას რაც შეიძლება მარტივი სახის მოდელები.

თანამედროვე პირობებში მართვის თეორია იყენებს მათემატიკური მოდელების ფართო წრეს, კერძოდ ისეთებს, როგორცაა ალგებრული, დიფერენციალური, ინტეგრალური, სხვაობითი და სხვა.

სისტემის დინამიკის კვლევის დროს, მისი მათემატიკური მოდელი წარმოიდგინება დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის სახით. მათემატიკური მოდელის სტრუქტურა უმეტეს შემთხვევაში განისაზღვრება ფიზიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარე. ხდება საკვლევი სისტემის და იმ გარემოს ღრმა შესწავლა, რომელშიც უხდება სისტემას ფუნქციონირება. სისტემაში მიმდინარე პროცესების ძირითადი ფიზიკური კანონებიდან გამომდინარეობენ გარკვეული თანაფარდობები განსახილველ ცვლადებს შორის, რომლებიც დაკავშირებულნი არიან სისტემის შესასვლელებთან და გამოსასვლელებთან. ეს თანაფარდობები როგორც წესი წარმოიდგინებიან არაწრფივი კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების სახით. შემდეგ ხდება ამ განტოლებების გაწრფივება, რის შედეგად მიიღებიან წრფივი კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებები, რომელთა რედუქციის შედეგად მიიღებიან საბოლოოდ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები. ეს განტოლებები ზოგად შემთხვევაში არიან ცვლადკოეფიციენტებიანი და არაწრფივი.

ავტომატური მართვის პრაქტიკაში ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია სისტემის ფუნქციონირების გარკვეულ შეზღუდულ შუალედში სისტემის მათემატიკური მოდელის წარმოდგენა წრფივი დიფერენციალური განტოლებების სახით. წრფივი სისტემების იდენტიფიკაციის ამოცანების გადაწყვეტის წარმატება ძირითადად დაკავშირებულია სისტემებთან, რომლებიც აღიწერებიან მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებებით, რაც შეიძლება აისხნას ასეთი განტოლებების გამოკვლევის სრულყოფილი მათემატიკური აპარატის არსებობით.

ავტომატური მართვის სხვადასხვა სფეროში გამოიყენება ისეთი წრფივი სისტემები, რომლებიც ხასიათდებიან იმით, რომ მათ გააჩნიათ ცვლადი პარამეტრები და მათი აღწერა მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლებებით

არ იძლევა დამაკმაყოფილებელ შედეგებს. ჩვლადპარამეტრებიანი წრფივი მართვის სისტემების ანუ წრფივი არასტაციონარული სისტემების მათემატიკური მოდელები წარმოიდგინება ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებით.

არასტაციონარული სისტემების იდენტიფიკაციის ამოცანების გადაწყვეტა გართულებულია იმ მათემატიკური სიძნელებით, რომლებიც გვხვებიან ცვლადკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის დროს. კერძოდ, არაერთგვაროვანი განტოლებების ამოხსნის დროს საჭიროა მათი შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის ცოდნა, რაც რეალური სისტემებისათვის უმეტეს შემთხვევაში არ არის შესაძლებელი.

წრფივი არასტაციონარული სისტემების იდენტიფიკაციის ამოცანისადმი მიძღვნილია სამუშაოთა დიდი რაოდენობა, რომლებშიც ეს ამოცანა გამოკვლეულია სხვადასხვა მიდგომაზე და მეთოდზე დაყრდნობით. წრფივი სისტემების იდენტიფიკაციის არსებული მეთოდები ძირითადად იყოფა ორ ნაწილად – აპროქსიმაციის და პირდაპირი მეთოდები. სხვა მეთოდებიდან აღსანიშნავია ბეიესის, გარანტირებული შეფასების, ნეირონული ბადის და გენეტიკური იდენტიფიკაციის მეთოდები. აპროქსიმაციის მეთოდები გულისხმობენ უცნობი პარამეტრების დაშლას ორთოგონალური პოლინომებით და სხვა ბაზისური ფუნქციების საშუალებით. პირდაპირ მეთოდებში პარამეტრების შეფასება ხორციელდება მათი დაშლის გარეშე. ორივე სახის მეთოდებში პარამეტრების შეფასების ძირითად ინსტრუმენტს წარმოადგენენ რეკურენტული უმცირესი კვადრატების მეთოდი, კალმანის ფილტრი და მათი მოდიფიკაციები, ასევე დეტერმინირებული და სტოქასტური ოპტიმიზაციის რეკურენტული პროცედურები. რაც შეეხება შებრუნებული ამოცანების თეორიას, მისი ბევრი, როგორც თეორიული ისე გამოთვლითი, შედეგის გამოყენება თანამედროვე პირობებში არ ხერხდება სისტემების იდენტიფიკაციისათვის, თუმცა აღნიშნული ამ სფეროში მიღებული გამოცდილება სათანადო

ინტერპრეტაციით შეიძლება იყოს სასარგებლო იდენტიფიკაციის პროგრესისათვის.

მოცემული სამუშაოს ეს თავი ეძღვნება უწყვეტი წრფივი არასტაციონარული დინამიკური სისტემების პარამეტრული იდენტიფიკაციის ამოცანის გამოკვლევას. ამასთან იგულისხმება, რომ ცნობილია სისტემის მოდელის სტრუქტურა, ანუ სისტემის აღწერილი დიფერენციალური განტოლების ფორმა. ასეთ შემთხვევაში სისტემის იდენტიფიკაციის ამოცანა მდგომარეობს განტოლებაში შემაჯავლი კოეფიციენტების განსაზღვრაში.

განიხილება არასტაციონარული წრფივი დინამიკური სისტემების იდენტიფიკაციის მეთოდი, რომელიც წარმოადგენს სტაციონარული სისტემების სინუსოიდალურ სიგნალზე რეაქციის მეთოდის მოდიფიცირებას არასტაციონარული სისტემებისათვის. არსებითად, განხილული მეთოდი მდგომარეობს სისტემის ტესტური სიგნალებით შემფოთებაში და სისტემის რეაქციიდან აუცილებელი ინფორმაციის ამოღებაში სისტემების იდენტიფიკაციის ამოცანის გადასაწყვეტად.

ძირითადი ყურადღება ეთმობა არასტაციონარული წრფივი დინამიკური სისტემების პარამეტრული იდენტიფიკაციის ამოცანის განხილვას, როდესაც ეს ამოცანა ისმება, როგორც ჩვეულებრივი წრფივი ცვლადკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის გარკვეული აზრით შებრუნებული ამოცანა, სისტემის შესავალ და გამოსავალ ცვლადებზე და პარამეტრებზე გარკვეული შეზღუდვების დროს.

ამ თავში გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნები: R - ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. $I = [a, b]$ ($a, b \in R$) - ჩაკეტილი შუალედი. $C(I, R)$ - უწყვეტი $x: I \rightarrow R$ ფუნქციათა სიმრავლე. $C^k(I, R)$ - k -ჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციათა სიმრავლე. $R^{n \times n}$ - n განზომილებიანი ნამდვილი კვადრატული მატრიცთა სიმრავლე. $C(I, R^n)$ - n განზომილებიანი ვექტორულ ფუნქციათა სიმრავლე, რომელთა კომპონენტები უწყვეტი ფუნქციებია. $C^k(I, R^n)$ - n განზომილებიანი ვექტორულ ფუნქციათა სიმრავლე, რომელთა კომპონენტები k - ჯერ უწყვეტად წარმოებადი

ფუნქციები. $C(I, R^{n \times n})$ - ყველა უწყვეტ \mathbf{A} მატრიცთა სიმრავლეა, სადაც $\mathbf{A}: I \rightarrow R^{n \times n}$, $a_{ik} \in C(I, R)$. $C^k(I, R^{n \times n})$ - k -ჯერ უწყვეტად წარმოებადი მატრიცთა სიმრავლეა. თუ გვაქვს ვექტორი $\mathbf{x}(t) = (x_i(t))_{i=1}^n$, მაშინ $\int_a^b \mathbf{x}(t) dt = \left(\int_a^b x_i(t) dt \right)_{i=1}^n$, $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}_i(t))_{i=1}^n$, თუ გვაქვს მატრიცა $\mathbf{X}(t) = (x_{ik}(t))_{i,k=1}^n$, მაშინ $\int_a^b \mathbf{X}(t) dt = \left(\int_a^b x_{ik}(t) dt \right)_{i,k=1}^n$, $\dot{\mathbf{X}}(t) = (\dot{x}_{ik}(t))_{i,k=1}^n$. $\mathbf{X}^{-1}(t)$ - ით აღნიშნულია $\mathbf{X}(t)$ მატრიცის შებრუნებული მატრიცა.

7.2. არასტაციონარული სისტემების მათემატიკური მოდელები

წრფივი არასტაციონარული სისტემები აღიწერება წრფივი დიფერენციალური განტოლებებით. მათი აღწერისათვის დიფერენციალური განტოლებების გარდა შეიძლება გამოყენებული იქნას გადაცემის ფუნქციები, გარდამავალი და იმპულსური გარდამავალი (წონითი) ფუნქციები, სისშირული ფუნქციები და მათი მახასიათებლები. გარდა ამისა არასტაციონარული სისტემების გრაფიკული წარმოდგენისათვის შეიძლება გამოყენებული იქნას სტრუქტურული სქემები და გრაფები. თუმცა უნდა აღინიშნოს, რომ მეთოდები, რომლებიც დამყარებულია გრაფიკულ წარმოდგენებზე არ არის ისეთი ეფექტური როგორც სტაციონარული სისტემების შემთხვევაში, ვინაიდან სტაციონარული სისტემების კვლევისას მიღებული სტრუქტურული სქემების და გრაფების გარდაქმნის წესები არასტაციონარული სისტემების შემთხვევაში არ არიან სამართლიანი.

ერთგანზომილებიან არასტაციონარულ სისტემას ზოგად შემთხვევაში აღწერენ შემდეგი სახის დიფერენციალური განტოლებით:

ერთგანზომილებიან არასტაციონარულ სისტემას ზოგად შემთხვევაში აღწერენ შემდეგი სახის დიფერენციალური განტოლებით:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)y(t) = b_0(t)u^{(m)}(t) + b_1(t)u^{(m-1)}(t) + \dots + b_m(t)u(t), \quad (7.1)$$

სადაც $u(t)$ სისტემის შესავალი, ხოლო $y(t)$ სისტემის გამოსავალი ცვლადებია.

ცხადია, რომ (7.1) განტოლება შეიძლება ამოიხსნას $y(t)$ ცვლადის უმაღლესი წარმოებულის მიმართ. ამის გამო ერთგანზომილებიანი არასტაციონარული მოდელის როლში განიხილავენ შემდეგი ნორმალური სახის n -ური რივის წრფივი დიფერენციალური განტოლებებს:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t)x^{(i-1)}(t) + u(t), \quad (7.2)$$

და

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t)x^{(i-1)}(t) + \sum_{j=1}^m b_j(t)u^{(j-1)}(t), \quad (7.3)$$

სადაც $a_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$) და $b_j(t)$ ($j=1,2,\dots,m$) კოეფიციენტები ნამდვილი ცვლადის ფუნქციებია: $a_i: I \rightarrow R$ ($i=1,2,\dots,n$), $b_j: I \rightarrow R$ ($j=1,2,\dots,m$). $u(t)$ და $x(t)$ განსაზღვრულია ასევე I შუალედში $u: I \rightarrow R$.

მრავალგანზომილებიანი არასტაციონარული სისტემების მათემატიკურ მოდელებს წარმოადგენენ სხვადასხვა ფორმით.

ვთქვათ $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ სისტემის შესავალი ცვლადებია, ხოლო $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ კი მდგომარეობის ცვლადები. მათ შორის კავშირი აღიწერება შემდეგი ნორმალური სახის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემით

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k(t) + u_i(t) \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (7.4)$$

სადაც a_{ik} და u_i ფუნქციები განსაზღვრული არიან I შუალედში : $a_{ik} : I \rightarrow R$ და $u_i : I \rightarrow R$.

ჩავეწეროთ (7.4) სისტემა მატრიცული სახით. ამისათვის შემოგვაქვს შემდეგი აღნიშვნები:

$$\mathbf{u}(t) = (u_i(t))_{i=1}^n = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

$$\mathbf{x}(t) = (x_i(t))_{i=1}^n = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

$$\mathbf{A}(t) = (a_{ik}(t))_{i,k=1}^n = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdot & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdot & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdot & a_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

(7.5), (7.6), (7.7) აღნიშვნებში (7.4) სისტემა ჩაიწერება შემდეგი მატრიცული დიფერენციალური განტოლების სახით:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}. \quad (7.8)$$

განიხილავენ ასევე შემდეგი სახის მათემატიკური მოდელს:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}. \quad (7.9)$$

(7.8) და (7.9) განტოლებებში $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} : I \rightarrow R^n$ და $\mathbf{u} : I \rightarrow R^n$ ვექტორული ფუნქციებია, $\mathbf{A} : I \rightarrow R^{n \times n}$ სისტემის მატრიცია, ხოლო $\mathbf{B} : I \rightarrow R^{n \times n}$ - შესავალი მატრიცია.

იმ შემთხვევაში, როდესაც მდგომარეობის ცვლადებზე უშუალო დაკვირვება ვერ ხერხდება, განიხილივენ ასევე შემდეგი სახის მოდელს:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u},\end{aligned}\tag{7.10}$$

სადაც \mathbf{C} და \mathbf{D} - გამოსავალი მატრიცებია, შესაბამისად მდგომარეობისა და შესავალი ვექტორების მიმართ მიმართ.

7.3. არასტაციონარული წრფივი სისტემების იდენტიფიკაცია სინუსოიდალურ სიგნალზე რეაქციის საშუალებით

წრფივი სტაციონალური ობიექტების იდენტიფიკაციის ერთ-ერთი ყველაზე იოლი მეთოდი არის რეაქციის გაზომვა სინუსოიდალურ შესავალზე მოქმედებაზე. თუ წრფივი სტაციონალური ობიექტი, გადაცემის ფუნქციით, აღიზნება შესავალი სიგნალით $A\sin\omega t$, მაშინ გამოსავალი სიგნალი მიიღება ფორმით: $AR(\omega)\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$. აქ $R(\omega)$ - გამოსავალი სინუსოიდალური სიგნალის ამპლიტუდის ფარდობა შესავალი სიგნალის ამპლიტუდასთან ω სიხშირისას, და $\varphi(\omega)$ - ფაზური წანაცვლება შესავალსა და გამოსავალს შორის. ადვილი საჩვენებელია, რომ $\varphi(\omega)$ და $R(\omega)$ დაკავშირებულია $H(s)$ -თან თანაფარდობებით:

$$R(\omega) = |H(s)|_{s=j\omega},\tag{7.11}$$

$$\varphi(\omega) = \arg H(s)|_{s=j\omega}.\tag{7.12}$$

ამიტომ, სინუსოიდალურ სიგნალზე რეაქციის, ზუსტად რომ ვთქვათ $\varphi(\omega)$ -ის და $R(\omega)$ -ის, გაზომვისას ω -ს რიგი მნიშვნელობებისთვის, ხერხდება მივიღოთ გადაცემის ფუნქციის ამპლიტუდისა და ფაზების გრაფიკები (ე.წ. ბოდეს გრაფიკები). ამ გრაფიკების არსებობა საკმარისია რამოდენიმე მიზნისთვის, მაგალითად მდგრადობისა და კომპენსაციის გამოსაკვლევადა. გადაცემის ფუნქციის ანალიტიკური გამოსახულების მიღების აუცილებლობის შემთხვევაში, შეიძლება გამოვიყენოთ ექსპერიმენტალური წირის უბან-უბან წრფივი აპროქსიმაცია. ხშირად გადაცემის ფუნქციის ფორმის განსაზღვრა ხერხდება ობიექტის თავისებურებების შესახებ საერთო წარმოდგენებიდან.

ამასთან ხსენებული მეთოდის საშუალებით ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ მისი პარამეტრები.

სინუსოიდალურ სიგნალზე რეაქციის მეთოდი შეიძლება გავეაგრძელოთ წრფივ არასტაციონალურ სისტემებზე, ამასთან ის საგრძნობლად რთული პროცედურის სახეს იღებს ზემოთ განხილულთან შედარებით. შესაბამისი ალგორითმის შესამუშავებლად აუცილებელია განვიხილოთ „ტრანსფორმაციული“ მეთოდი წრფივი არასტაციონალური ობიექტებისათვის. ლაპლასის ორმხრივი გარდაქმნა ობიექტის გარდამავალი მატრიციდან, რომელიც აღწერება წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით მუდმივი კოეფიციენტით, გამოისახება ასე

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}. \quad (7.13)$$

წრფივი სტაციონალური ობიექტების ფუნდამენტალური თვისება მდგომარეობს იმაში, რომ მათი გარდამავალი მატრიცა დამოკიდებულია მხოლოდ „სისტემის ასაკზე“ $(t-\tau)$. არასტაციონალური ობიექტებისათვის ეს არასწორია, რადგან გარდამავალი მატრიცა ჩაწერილი უნდა იყოს ზოგად ფორმაში. წინა ტოლობის ანალოგიურად შეიძლება განვსაზღვროთ შემდეგი გარდაქმნა:

$$\Phi(t, j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, \tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d\tau. \quad (7.14)$$

ინტეგრირების ზედა ზღვარი შეიძლება შევცვალოთ t -თი, რადგან

$$\Phi(t, \tau) = \mathbf{0} \text{ როცა } \tau > t. \quad (7.15)$$

მოსახერხებელია განვსაზღვროთ $\mathbf{r}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$ ვექტორი, რომელიც წარმოადგენს განხილული სისტემის

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

თავისუფალ ცვლადებს.

შეიძლება ვაჩვენოთ, მდგომარეობის ვექტორისთვის სამართლიანია გამოსახულება

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, j\omega) \mathbf{R}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (7.16)$$

რომელიც არის სტაციონალური სისტემებისთვის ცნობილი მატრიცული თანაფარდობის განზოგადება.

სისტემის გარდამავალი $\Phi(t, j\omega)$ მატრიცის მნიშვნელოვან თვისებას წარმოადგენს ის, რომ ის აკმაყოფილებს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ამოხსნა უფრო იოლია, ვიდრე ინტეგრალური განტოლებისა სისტემის გადაცემის ფუნქციისათვის. გარდა ამისა, იგი საშუალებას გვაძლევს შევიმუშავოთ პერსპექტიული მიდგომა არასტაციონალური წრფივი ობიექტების იდენტიფიკაციის ამოცანების გადასაწყვეტად. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ეს მატრიცა უნდა აკმაყოფილებდეს წრფივ მატრიცულ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, j\omega) + (j\omega I - \mathbf{A}(t))\Phi(t, j\omega) = \mathbf{E}, \quad (2.17)$$

სადაც $j\omega$ განიხილება როგორც ფიქსირებული პარამეტრი.

ბოლო უტოლობა წარმოადგენს ინტერპრეტაციას დროზე დამოკიდებული სისწორული გარდაქმნებისთვის ზადეს მდგომარეობათა განტოლების ტერმინებში. სტაციონალური სისტემისთვის

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, j\omega) = 0 \quad (7.18)$$

და როგორც ზევით იყო მითითებული

$$\Phi(t, j\omega) = (j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}. \quad (7.19)$$

ახლა მოვიყვანოთ არასტაციონალური წრფივი სისტემების იდენტიფიკაციის სქემა, დაფუძნებული ზადეს დროზე დამოკიდებულ ამ გარდაქმნაზე. ვისარგებლოთ იმ ფაქტით, რომ ეს გარდაქმნა აკმაყოფილებს ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც მჭიდროდაა დაკავშირებული განტოლებასთან, რომელიც განსაზღვრავს ფიზიკური სისტემის დინამიკას. თუ განხილული გარდაქმნა შესაძლებელია რომ შევცვალოთ, ის შეიძლება ჩავსვათ ამ განტოლებაში და განვსაზღვროთ მისი კოეფიციენტები. ამ კოეფიციენტებზე აღგებრული ოპერაციების საშუალებით შეიძლება მივიღოთ დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელი მატრიცა, რომელიც აღწერს უცნობ სისტემას. ამ პროცედურის პერიოდული განმეორება

საშუალებას გვაძლევს გამოვსახოთ სისტემაში მიმდინარე ცვლილებები დროის მიხედვით.

ამოცანის მათემატიკური ფორმულირებისთვის განვიხილოთ სისტემა ერთი შესავალით, განსაზღვრული განტოლებებით:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad (7.20)$$

$$z = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}. \quad (7.21)$$

აქ \mathbf{x} - მდგომარეობის n განზომილების ვექტორია, ხოლო z - სკალარული გამოსავალი, განსაზღვრული (7.21) განტოლებით ცნობილი \mathbf{C} და \mathbf{D} მატრიცების საშუალებით. იგულისხმება, რომ სულ მცირე \mathbf{x} ვექტორის პირველი x_1 კომპონენტი შეიძლება განისაზღვროს ერთდროულად z -ზე დაკვირვებისას. m განზომილების \mathbf{u} შესავალი ვექტორი მიიღება u სკალარული შესავალიდან შემდეგი განტოლების შესაბამისად:

$$\mathbf{u}^T = (u, pu, \dots, p^{m-1}u), \quad (7.22)$$

რომელშიც p -თი აღნიშნულია ოპერატორი d/dt . მატრიცა და $\mathbf{A}(t)$ და $\mathbf{B}(t)$ სრულად ცნობილი არაა, თუმცა იგულისხმება რომ მათ აქვთ სახე:

$$\mathbf{A}(t) = (a_{ik}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & \dots & a_{nm}(t) \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

$$5, \quad (7.24)$$

ან შეიძლება დაყვანილი იყოს ასეთ სახეზე გადაუვარებელი წრფივი გარდაქმნით. შესაბამისად, იდენტიფიკაციის ამოცანა, ფორმულირებული (2.20) განტოლებისათვის, მდგომარეობს დროის ფუნქციის განსაზღვრაში:

$$a_{ni}(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (7.25)$$

$$b_{nk}(t), \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.26)$$

ზოგადად ზოგიერთი ამ $n+m$ ფუნქციებიდან შეიძლება წინასწარ იყოს ცნობილი. ამასთან, რასაკვირველია, იდენტიფიკაციის ამოცანა იოლდება.

დროზე დამოკიდებული სისწორული გარდაქმნა $\mathbf{h}(j\omega, t)$ განისაზღვრება ტოლობით:

$$\mathbf{h}(j\omega, t) = \mathbf{T}(j\omega)\chi(j\omega, t), \quad (7.27)$$

სადაც

$$\mathbf{T}(j\omega) = (t_{ik}(j\omega)), \quad (7.28)$$

$$t_{ik}(j\omega) = \frac{t!(-j\omega)^{i-k}}{k!(i-k)!} = \left(\frac{i}{k}\right)(-j\omega)^{i-k}, \quad i \geq k, \quad (7.29)$$

$$t_{ik}(j\omega) = 0, \quad i < k \quad (7.30)$$

$$|\mathbf{T}(j\omega)| = 1, \quad (7.31)$$

$$\chi(j\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{w}(t, \xi) e^{-j\omega(t-\xi)} d\xi. \quad (7.32)$$

გარდამავალი ფუნქცია $\mathbf{w}(t, \xi)$ წარმოადგენს მდგომარეობის ვექტორის რეაქციას, როცა შესავალზე მიეწოდება ერთეულოვანი ნახტომი $t = \xi$ მომენტში. არ არის რთული შესამოწმებელი, რომ (2.28) განსაზღვრებიდან გამოდინარეობს $\mathbf{h}(j\omega, t)$ ელემენტების ისეთი თვისება:

$$h_i(j\omega, t) = ph_{i-1}(j\omega, t), \quad i = \overline{2, n}. \quad (7.33)$$

$\mathbf{h}(j\omega, t)$ -ის განსაზღვრება, მოცემული ერთეულოვანი იმპულსზე რეაქციის ტერმინებში, შეიძლება ფორმულირებული იყოს (7.20) სისტემის რეაქციის საშუალებით სინუსოიდალურ ზემოქმედებაზე. მართლაც, $\mathbf{h}(j\omega, t)$ -ის ტოლფასი განსაზღვრება არის ასეთი სახის:

$$\mathbf{h}(j\omega, t) = e^{j\omega t} \mathbf{T}(j\omega) \zeta(j\omega, t), \quad (7.34)$$

სადაც $\zeta(j\omega, t)$ - სისტემის რეაქციაა შესავალზე $u = e^{j\omega t}$. განხილულ იდენტიფიკაციის სქემაში ტოლობა (7.34) გამოიყენება როგორც $\mathbf{h}(j\omega, t)$ -ს განსაზღვრის საშუალება.

$h(j\omega, t)$ -ის ელემენტები მიეკუთვნება კომპლექსურ რიცხვებს. რადგან გაზომვების შედეგები წარმოადგენენ ნამდვილ რიცხვებს, მოსახერხებელია ამ ვექტორის გაყოფა ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილად. $\mathbf{h} = \mathbf{h}(j\omega, t)$ -ს სიმოკლისთვის, აღენიშნოთ ნამდვილი ნაწილი R -ით და წარმოსახვითი I -ით და განვიხილოთ როგორც ფიქსირებული პარამეტრი. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$P \begin{pmatrix} h_R \\ h_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_R(j\omega, t) & E_I(j\omega, t) \\ E_I(j\omega, t) & E_R(j\omega, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_R \\ h_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_R(j\omega, t) \\ K_I(j\omega, t) \end{pmatrix}, \quad (7.35)$$

სადაც $n \times n$ მატრიცას $\mathbf{E}(j\omega, t)$ გააჩნია ისეთივე ფორმა, როგორც $\mathbf{A}(t)$ -ს, $\{e_{nr}(j\omega, t)\}$ ელემენტები დაკავშირებულია $\mathbf{A}(t)$ მატრიცის $\{a_{ni}(t)\}$ ელემენტებთან ფორმულებით:

$$e_{nr}(j\omega, t) = \sum_{k=r}^{n-1} \frac{(k-1)!(j\omega)^{k-r}}{(r-1)!(k-r)!} a_{nk}(t), \quad (7.36)$$

ხოლო \mathbf{E}_R და \mathbf{E}_I არიან \mathbf{E} მატრიცის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები. დამატებითი ელემენტი $a_{n,n-1}(t)$ ტოლია 1-ის; $n \times 1$ ვექტორი $\mathbf{K}(j\omega, t)$ დაკავშირებულია $\mathbf{B}(t)$ მატრიცასთან ტოლობით:

$$\mathbf{K}(j\omega, t) = \mathbf{B}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ j\omega \\ \dots \\ (j\omega)^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (7.37)$$

თუ ცნობილია \mathbf{h} და $p\mathbf{h}$, მაშინ მათი ჩასმით (7.35) ფორმულაში, (7.36) და (2.37) გამოსახულებების დახმარებით შეიძლება მივიღოთ ორი ალგებრული განტოლება $a_{ni}(t)$ და $b_{nk}(t)$ ფუნქციებისთვის. \mathbf{h} -ის გაზომვით სისშირეებზე $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$, შესაძლებელია მივიღოთ $2q$ ესეთი განტოლებები. იმის დაშვებით, რომ $n+m$ ფუნქციებიდან $a_{ni}(t)$ და $b_{nk}(t)$ ცნობილია აპრიორი s ფუნქცია, მივიღვართ დასკვნამდე, რომ $\mathbf{A}(t)$ და $\mathbf{B}(t)$ მატრიცების განსასაზღვრად

უნდა ავიღოთ $q = (n+m-s)/2$ ან $q = (n+m+1-s)/2$, დამოკიდებული იმაზე, თუ რომელი ამ ციფრებიდან აღმოჩნდება მოელი.

ასე რომ, თუ აღვნიშნავთ

$$\lambda^T(t) = (a_{n1}(t), a_{n2}(t), \dots, a_{nm}(t), b_{n1}(t), b_{n2}(t), \dots, b_{nm}(t)), \quad (7.38)$$

მაშინ იდენტიფიკაციის ამოცანა შეიძლება ფორმულირებული იყოს მოკლედ როგორც λ^T განსაზღვრის ამოცანა. იმისათვის რომ მივიღოდ გამოსახულება λ -სთვის, მოსახერხებელია განვსაზღვროთ

$$\mathbf{f}(j\omega, t) = (p + j\omega)\mathbf{h}(j\omega, t). \quad (7.39)$$

ეს განსაზღვრება გამართლებულია არა მხოლოდ აღნიშვნების მოხერხებულობის მხრივ: ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ შემოტანილი სიდიდე ზოგიერთი პირობების დროს შესაძლებელია პირდაპირ გაიზომოს. (7.39)-ს (7.35)-ში ჩასმას მივყავართ ვექტორულ ტოლობასთან, რომლის n -ური კომპონენტა ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$f_n(j\omega, t) = \mathbf{a}_n^T(t)\mathbf{h}(j\omega, t) + \mathbf{b}_n^T(t)\omega, \quad (7.40)$$

სადაც f_n - \mathbf{f} -ის n -ური ელემენტი, \mathbf{a}_n^T და \mathbf{b}_n^T შესაბამისად $\mathbf{A}(t)$ და $\mathbf{B}(t)$ მატრიცების n -ური სტრიქონებია. (7.40) ტოლობა ეკვივალენტურია განტოლების

$$f_n(j\omega, t) = \left[\mathbf{h}^T(j\omega, t)\boldsymbol{\omega}^T \right] \lambda(t). \quad (7.41)$$

ვინაიდან f_n და ელემენტები \mathbf{h} და $\boldsymbol{\omega}$ - კომპლექსური რიცხვებია, და გაზომვების შედეგები ნამდვილი რიცხვებია, სასურველია გამოვყოთ ამ გამოსახულებაში ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები. (7.41) ფორმულა შეიძლება გადმოვწეროთ როგორც ორ კომპონენტიათა ვექტორული განტოლება:

$$\begin{pmatrix} f_{nR} \\ f_{nI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_R^T & \boldsymbol{\omega}_R^T \\ \mathbf{h}_I^T & \boldsymbol{\omega}_I^T \end{pmatrix} \lambda. \quad (7.42)$$

თუ აღვნიშნავთ განხილვად სიდიდეებს მარცხენა ზედა კუთხეში შესაბამისი სისშირის სიდიდით (მაგალითად

${}^i f_{nR} = f_n(j\omega_i, t)$, ${}^1 \mathbf{h}^T = \mathbf{h}^T(j\omega_i, t)$, (7.42) შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{pmatrix} {}^1 f_{nR} \\ {}^1 f_{nI} \\ {}^2 f_{nR} \\ {}^2 f_{nI} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1 \mathbf{h}_R^T & {}^1 \boldsymbol{\omega}_R^T \\ {}^1 \mathbf{h}_I^T & {}^1 \boldsymbol{\omega}_I^T \\ {}^2 \mathbf{h}_R^T & {}^2 \boldsymbol{\omega}_R^T \\ {}^2 \mathbf{h}_I^T & {}^2 \boldsymbol{\omega}_I^T \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}. \quad (7.43)$$

ავლნიშნოთ ტოლობის მარცხენა მხარეს მყოფი ვექტორი \mathbf{v} -თი, ხოლო მარჯვენა მატრიცა - \mathbf{G} -ით. ცხადია, რომ \mathbf{G} კვადრატული მატრიცაა, თუ \mathbf{v} და $\boldsymbol{\lambda}$ -ს განზომილებები ერთმანეთს ემთხვევა. ეს პირობა კმაყოფილდება, თუ \mathbf{v} -ს ბოლო კომპონენტი წარმოადგენს ${}^q fr(q=(n+m)/2)$ ლუწი $(n+m)$ -ის დროს და შესაბამისად ${}^q fr(q=(n+m+1)/2)$ კენტი $(n+m)$ -ის დროს. როგორც წესი \mathbf{G} არ არის გადაკვარებული, ამიტომ (30) განტოლების ამონახსნი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{G}^{-1}(j\omega_i, t) \mathbf{v}(j\omega_i, t). \quad (7.44)$$

ეს ფორმულა გვაძლევს საშუალებას განვახორციელოთ სისტემის იდენტიფიკაცია, თუ სისტემაზე დაკვირვების შედეგად გვეძლევა შესაძლებლობა გავზომოთ \mathbf{G} და \mathbf{v} . ახლა დაწვრილებით განვიხილოთ გავზომვების პროცესი.

(7.44) ტოლობის გამოყენებით სისტემის იდენტიფიკაციისთვის აუცილებელია გვქონდეს $\mathbf{h}(j\omega_i, t)$ და $f_n(j\omega_i, t)$, $i = \overline{1, q}$ განსაზღვრის ხერხები. არსებითად, შემოთავაზებული მეთოდი მდგომარეობს სისტემის ტესტური სიგნალებით შეშფოთებაში და სისტემის რეაქციიდან აუცილებელი ინფორმაციის ამოღებაში. საცდელი ზემოქმედებების არჩევა დამოკიდებულია (7.33) ტოლობაზე, რომლიდანაც გამომდინარეობს იოლი კავშირი $\mathbf{h}(j\omega_i, t)$ -სა და სისტემის შესავალ $u_1 = e^{j\omega t}$ სიგნალის რეაქციასთან. რადგან ეს სიგნალი ფიზიკურად არარეალიზებადია, ირჩევა ფიზიკურად ყველაზე ახლო რეალიზებადი შესავალი სიგნალი $u_1 = \cos \omega t$. თუ ამ სიგნალზე რეაქციას ავლნიშნავთ

$\psi(j\omega, t)$ -ით და შეენიშნავთ, რომ რეალური სისტემა აღიწერება ნამდვილი კოეფიციენტებით, მივიღებთ, რომ

$$\psi(j\omega, t) = \operatorname{Re}\{z(j\omega, t)\} = \mathbf{h}_R(j\omega, t)\cos \omega t - \mathbf{h}_I(j\omega, t)\sin \omega t. \quad (7.45)$$

ამ შედეგის და (7.39)-ის განსახლვრების გამოყენებით ვხედავთ, რომ

$$p\psi(j\omega, t) = \mathbf{f}_R(j\omega, t)\cos \omega t - \mathbf{f}_I(j\omega, t)\sin \omega t. \quad (7.46)$$

ეს ორი მდგომარეობა აჩვენებს, რომ გაზომვების განხორციელების ამოცანა დაიყვანება ψ და $p\psi$ -ს დემოდულაციაზე. საბედნიეროდ, აუცილებლობას არ წარმოადგენს გამოვიკვლიოთ ეს ტოლობები ცალკე, რადგან ისინი შეიძლება გავაერთიანოთ ერთ თანაფარდობაში. ამისთვის შევიტანოთ $(n+1)$ განზომილების ვექტორი

$$\boldsymbol{\gamma}^T(j\omega, t) = (\mathbf{h}^T(j\omega, t), f_n(j\omega, t)). \quad (7.47)$$

$\boldsymbol{\gamma}$ ვექტორის კომპონენტები არიან გაზომვაზე დაქვემდებარებული სიდიდეები. თუ მდგომარეობის გაფართოებულ ვექტორს ავღნიშვნავთ $\boldsymbol{\psi}^1(j\omega, t)$, რომელიც შეესაბამება შესავალს $u_1 = \cos \omega t$, მივიღებთ

$$\boldsymbol{\psi}^1(j\omega, t) = \boldsymbol{\gamma}_R(j\omega, t)\cos \omega t - \boldsymbol{\gamma}_I(j\omega, t)\sin \omega t. \quad (7.48)$$

და ამოცანა დაიყვანება $\boldsymbol{\psi}^1(j\omega, t)$ ფუნქციის დემოდულაციამდე. ქვემოთ ჩვენ დეტალურად განვიხილავთ $\boldsymbol{\gamma}_R$ -ის განსახლვრის მეთოდს. შემდეგ განხილული იქნება ის უმნიშვნელო ცვლილებები, რომელთა შემოვიტანა აუცილებელია $\boldsymbol{\gamma}_I$ -ის განსახლვრელად.

პირველი ნაბიჯი $\boldsymbol{\gamma}_R$ -ის განსახლვრელად არის $\boldsymbol{\psi}^1$ -ის გამრავლება $\cos \omega t$ -ზე. შედეგად ვღებულობთ $(n+1)$ განზომილების ვექტორს, რომელსაც შემდგომში ავღნიშნავთ როგორც $\boldsymbol{\rho}(j\omega, t)$. (7.48)-ედან გამომდინარეობს, რომ

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\psi}^1 \cos \omega t = 1/2\{\boldsymbol{\gamma}_R + \boldsymbol{\gamma}_R \cos 2\omega t - \boldsymbol{\gamma}_I \sin 2\omega t\}. \quad (7.49)$$

რადგან სასურველია განვახორციელოთ $\boldsymbol{\rho}(j\omega, t)$ -ის ანალიზი სისწორულ სფეროში, მოსახერხებელია შემოვიტანოთ ამ ვექტორის $\mathbf{P}(j\omega, j\mu)$ ფურიეს გარდაქმნა,

სადაც μ არის სიხშირული გარდაქმნის პარამეტრი. \mathbf{P} ვექტორ-ფუნქციის გრაფიკული გამოსახვის სირთულეები გვაიძულებენ მივმართოთ მის სკალარულ მახასიათებლებს, რომელიც უნდა იყოს \mathbf{P} -ს „სიგრძის“ პროპორციული. აქედან მაშინვე გამომდინარეობს, რომ ასეთი მახასიათებელი შეირჩეს შემდეგი ნორმის სახით

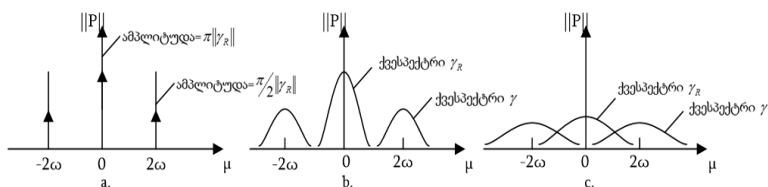
$$\|\mathbf{P}\| = (\mathbf{P}^+ \mathbf{P})^{1/2},$$

სადაც სიმბოლო „+“ აღნიშნავს შეუდლებულ ვექტორს.

თავდაპირველად განვიხილოთ სტაციონალური სისტემის შემთხვევა, რომლისთვისაც ცხადია, რომ γ არაა დამოკიდებული დროზე, ე.ი. $\gamma(j\omega, t) = \gamma(j\omega)$. ამ მიზეზის გამო, $\rho(j\omega, t)$ სპექტრი არის დისკრეტული და შედგება სამი

იმპულსისგან. მისი ამპლიტუდები ტოლია $\frac{\pi}{2} \|\gamma\|$, $\pi \|\gamma_R\|$, $\frac{\pi}{2} \|\gamma\|$

და ისინი მდებარეობენ სიხშირეებზე $\mu = -\omega$, 0 და 2ω , შესაბამისად. ეს სპექტრი ნაჩვენებია ნახაზი 7.1. ა-ზე. ნათლად ჩანს, რომ γ_R -ის გასაზომად საკმარისია უბრალოდ გავატაროთ ρ დაბალსიხშირულ ფილტრში, რომელიც მნიშვნელოვნად ასუსტებს სიგნალებს სიხშირით $\mu = 2\omega$. იმის გამო, რომ ფილტრის გამოსავალი სიგნალი არ იცვლება, შეიძლება დამატებითი უპირატესობების მიღება. შესაბამისად, ის შეიძლება გავასაშუალოვოთ შემადგენლების $\mu = +2\omega$ -ით და ნებისმიერი სმაურის სიგნალის (ნულოვანი საშუალო მნიშვნელობით) შემდგომი ჩახშობისთვის.



სურ. 7.1. სიხშირული სპექტრი იდენტიფიკაციის ამოცანისთვის.

ახლა გადავიდეთ ნელადცვლად სისტემის შემთხვევაზე. გაუგებრობის თავიდან ასაცილებლად „ნელადცვლადი“ ტერმინის გამოყენებისას შემოთავაზებულია შემდეგი განსაზღვრება. ნელადცვლადი ეწოდება არასტაციონალურ სისტემას, რომელსაც აქვს გაფართოებული ვექტორი, რომელიც დამოკიდებულია სისწორული $\gamma(j\omega, t)$ გარდაქმნის დროზე და არსებითად მუდმივია ნებისმიერ I ინტერვალზე, რომელიც აღემატება სისტემის საკუთარ მოძრაობის ყველაზე დაბალი ჰარმონიკის პერიოდს, რომელიც „გაყინულია“ ზოგიერთი $t \in I$ -თვის; ω -ს პარამეტრები

ირჩევა ისე, რომ $\gamma(j\omega) = \frac{1}{10} \|\gamma(j0)\|$, სადაც $\gamma(j\omega)$ -

გაყინული სისტემის სისწორული გარდაქმნის ვექტორია. მოცემულ შემთხვევაში სპექტრის ანალიზი უწყვეტი კომპონენტების გაჩენას აღმოაჩენს. ეს კომპონენტები, მომავალში ვუწოდებთ მათ ქვესპექტრებს, კომპაქტურად ჯგუფდება იმ სისწორეების გარშემო, რომლებსაც შეესაბამებოდნენ სპექტრის დისკრეტული კომპონენტები სტაციონალურ შემთხვევაში. ქვესპექტრი, ჩამოყალიბებული მომენტში $\mu = 0$, შეესაბამება γ_R -ს, ორი დანარჩენი - γ -ს. ტიპური სპექტრი ნელი ცვლილებების შემთხვევაში ნაჩვენებია ნახაზ 1.b-ზე. სპექტრის კარგად დაყოფილი კომპონენტების შემთხვევაში γ -დან შეიძლება გამოვეყოთ კომპონენტები დაბალსისწორული ფილტრის საშუალებით, იმავენაირად, როგორც კეთდებოდა სტაციონალურ სისტემებისათვის. თუმცა ამ შემთხვევაში ფილტრს ენიჭება შედარებით მკაცრი მოთხოვნები. ხმაურის უგულვებელყოფით, აუცილებელია, რომ იდეალურ ფილტრს ჰქონდეს მუდმივი ამპლიტუდური მახასიათებელი და ასევე მუდმივი ფაზური ძვრა ქვესპექტრის სისწორის მთელ დიაპაზონზე, რომელმაც წარმოქმნა γ_R , და ნულოვანი რეაქცია ყველა სხვა სისწორეზე. ეს პირობები განსაზღვრავენ იდეალურ ზოლოვან ფილტრს, რომელიც ფიზიკურად არ არის განხორციელებადი (დროის დანახარჯებზე რეალისტური მოთხოვნებისას). გამოყენებული რეალიზებადი ფილტრი არჩეული უნდა იყოს ისე, რომ მითითებული

მახასიათებლები ახლოს იყოს იდეალურთან სისწორების დიაპაზონზე, სადაც $\|P\|$ არ არის ძალიან პატარა.

ხმაურის არსებობისას, ფიზიკურად შესრულებადი იდეალური ზოლოვანი ფილტრის აპროქსიმაციამ, შეიძლება დამაკმაყოფილებელი შედეგები არ მოგვცეს. მოცემულ შემთხვევაში, ოპტიმალური იქნება ისეთი ფილტრი, ყველაზე ეფექტურად ახშობს ცდომილებებს და გვაძლევს γ_R -ს ყველაზე კარგ შეფასებას. იდეალურ შემთხვევაში კრიტიკერიუმმა, რომელიც განსაზღვრავს საუკეთესო შეფასებას, მხედველობაში უნდა მიიღოს (31). სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, პირველად ინტერესს წარმოადგენს შეცდომა λ -ის განსაზღვრისას.

იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც ხმაური შეიძლება უგულებელვყოთ, γ_R -ს გამოთვლებში, ზოგადად რომ ვთქვათ, ადგილი ექნება შეცდომებს. ნაწილობრივ, მათი არსებობა დამოკიდებულია იმაზე, რომ მკაცრად რომ ვთქვათ, γ სპექტრი იშვიათად არის შეზუღული, და შედეგად ხდება ზოგიერთი ქვესპექტრების „კუდების“ გადაფარვა. შედეგად, ფილტრის გამოსასვლელზე წარმოიქმნება ანომალური კომპონენტა. დამახინჯების სხვა წყარო წარმოქმნება ფილტრის მახასიათებლების არაიდეალურობით, რომელიც შეიძლება გამოიყენებოდეს იდენტიფიკაციისთვის რეალურ მაშტაბურ დროში. ეს ორივე ეფექტი შესაძლებელია საგრძნობლად შესუსტდეს იდენტიფიკაციის სქემის სწორი პროექტირებისას, თუ სისტემა იცვლება საკმარისად ნელა.

ბოლოს, განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც სისტემა იცვლება სწრაფად. ამ შემთხვევაში სპექტრი განსხვავდება სპექტრისგან ნელა ცვლადი სისტემის შემთხვევაში პირველ რიგში იმით, რომ ქვესპექტრები აღარ არიან ვიწრონი. ამ შემთხვევაში ისინი გავრცელებულნი არიან სახშირეთა ფართო დიაპაზონში, როგორც ეს სურათი 1c-ზე ნაჩვენებია. ამ შემთხვევაში მათი განცალკევება რაიმე ფილტრით შეუძლებელია. ერთადერთი გამოსავალია - გავზარდოთ ტესტების ზემოქმედების სისწორეები მანამ, სანამ ქვესპექტრები არ იქნებიან გაბნეულნი საკმარისად შორს, და γ_R ქვესპექტრი არ გახდება განცალკევადი. ასეთი,

მოცემულ შემთხვევაში, შესაძლებელი გაუმჯობესება ემსახურება კარგად ცნობილი პრინციპის ილუსტრაციას, რომ მაღალი მზიდი სიხშირე საშუალებას გვაძლევს გადავცეთ შედარებით მეტი მოცულობის ინფორმაცია, ვიდრე დაბალის შემთხვევაში, თუ სიხშირეების ზოლი, რომელსაც ჩვენ ვფლობთ ამ ინფორმაციის გადაცემისთვის, შეადგენს მზიდავი სიხშირის ფიქსირებულ წილს.

საუბედუროდ, იდენტიფიკაციის ამოცანისთვის ბუნება ასეთ მიდგომას ეწინააღმდეგება. სიხშირის ზრდასთან ერთად ჩნდება ორი მავნე ეფექტი. პირველი მდგომარეობს იმაში, რომ ტესტური სიგნალის ფიქსირებული ამპლიტუდის დროს P ამპლიტუდის სპექტრი იწყებს კლებას. ბუნებრივია, ამ შემთხვევაში იკლებს შეფარდება ხმაურის/სიგნალი, რომელიც უფრო ამნელებს ხმაურთან დაკავშირებული პრობლემებს. მეორე ეფექტი მდგომარეობს λ -თვის მიღებული ამოხსნის მგრძობიარობის გაზრდაში მცირე ხმაურების მიმართ, რომლებიც გვხვებიან γ -ს გაზომვებში. ნათელია, რომ მეორე ეფექტი კიდევ უფრო ზრდის პირველი ეფექტის მიერ წარმოქმნილ სირთულეებს. ამის გამო, λ -ს საკმარისად ზუსტი განსაზღვრა მაღალი ω სიხშირეებისას, შეიძლება აღმოჩნდეს ძალიან ძნელი. მიუხედავად ამისა, ხმაურის დაბალი დონისა და საკმაოდ სრულყოფილი გაზომვითი აპარატურის არსებობის შემთხვევაში, მაღალი ω -ს არჩევა საშუალებას გვაძლევს განვახორციელოთ იდენტიფიკაცია ძალიან სწრაფად ცვლად სისტემაშიც კი.

γ_I -ის და Ψ^1 -ის განსაზღვრის პროცედურა ანალოგიურია γ_R -ის განსაზღვრის პროცედურისა. ერთად-ერთი არსებითი განსხვავება მდგომარეობს იმაში, რომ Ψ^1 მრავლდება $\sin \omega t$ -ზე $\cos \omega t$ -ის ნაცვლად. ამ გამრავლების შედეგად მიღებული შედეგიდან ხელშემწყობ პირობებში ფილტრაციის გზით შეიძლება მივიღოთ γ_I . რადგან დემოდულაციის ეს პროცედურა არ საჭიროებს რაიმე ახალი იდეების გამოყენებას, ამიტომ განვიხილოთ სიხშირული გარდაქმნების ვექტორის გაზომვის ამოცანას, როდესაც საცდელი ზემოქმედება შეიცავს რამოდენიმე სიხშირის ჰარმონიკებს.

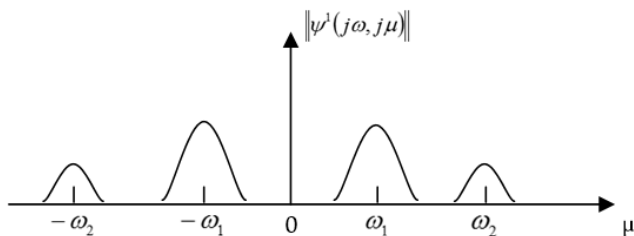
მრავალსიხშირულ შემთხვევაში საცდელი სიგნალი წარმოადგენს სინუსოიდების ჯამს

$$u_1(t) = \sum_{i=1}^a a_i \cos \omega_i t. \quad (7.50)$$

ამ შესავალის შესაბამისი გაფართოებული მდგომარეობის ვექტორის $\Psi^1(\omega_1, t)$ -ით აღნიშვნით, (7.48) ფურმულაზე დაფუძნებით და სუპერპოზიციის პრინციპზე დაყრდნობით, ვიღებთ

$$\Psi^1(\omega_1, t) = \sum_{i=1}^a a_i ({}^i\gamma_R \cos \omega_i t - {}^i\gamma_I \sin \omega_i t). \quad (7.51)$$

თუ სპექტრი ${}^i\gamma$ შეზღუდულია და ω_i განლაგებულნი არიან საკმაოდ შორს ერთმანეთისგან, მაშინ სპექტრი Ψ^1 შედგება ქვესპექტრებისგან, რომლებიც ერთმანეთს არ ფარავენ, როგორც სურათზე 2. არის ნაჩვენები. სურათზე $\Psi^1(j\omega, j\mu)$ წარმოადგენს ფურიეს გარდაქმნას $\Psi^1(j\omega, j\mu)$ -დან. თუ ქვესპექტრები კარგადაა დაშორებული, როგორც აქაა ნაჩვენები, მაშინ თვითოეული მათგანი შეიძლება გამოვეყნოთ შესაბამისი ზოლური ფილტრების საშუალებით. ამ ფილტრების გამოსავალი სიგნალებს შეიძლება დემოდულაცია გავუკეთოთ მეთოდებით, რომელიც განვიხილეთ ცოტა ხნის წინ დაკავშირებული ${}^i\gamma_R$ -სა და ${}^i\gamma_I$ -ს განსაზღვრისას.



სურ. 2. მრავალსიხშირული სპექტრი

შეიძლება გამოვიყვანოთ კრიტერიუმები, რომლებიც განსაზღვრავენ პირობებს, რომელთა დროსაც წარმატებით ხორციელდება სიხშირული გარდამქმნელების ვექტორების

გაზომვები (იმის გათვალისწინებით, რომ ხმაური არ ფიგურირებს და ფილტრები იდეალურია). გადავწეროთ (7.51) ფორმულა შემდეგი სახით:

$$\Psi^1(\omega_1, t) = \sum_{i=1}^a a_i / 2 \left(i \gamma e^{j\omega_1 t} + (i \gamma e^{j\omega_1 t})^* \right). \quad (7.52)$$

აღნიშნოთ კომპლექსურად შეუღლებული სიდიდეები ვარსკვლავით და გამოვიყენოთ ბოლო ტოლობის ორივე ნაწილის მიმართ ფურიეს გარდაქმნა:

$$\Psi^1(j\omega_1, j\mu) = \sum_{i=1}^a a_i / 2 \{ \Gamma(j\omega_1, j(\mu - \omega_1)) + \Gamma(-j\omega_1, j(\mu + \omega_1)) \}. \quad (7.53)$$

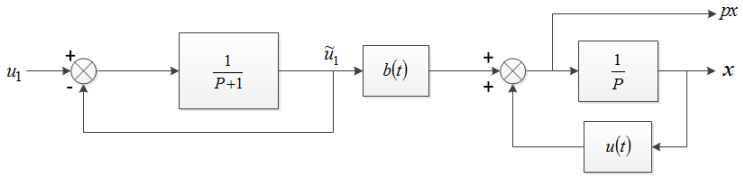
აქ Γ აღნიშნავს ფურიეს გარდაქმნას γ -დან. თუ ქვესპექტრები ერთმანეთს არ კვეთენ, ამ ტოლობაში მდგენელები განცალკევებულია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ სკალარული ნამრავლი

$$\Gamma^+(j\omega_i, j(\mu - \omega_i)) \Gamma(j\omega_k, j(\mu \mp \omega_k)) = 0, \quad k \neq i. \quad (7.54)$$

ყველა $i = \overline{1, q}$ -თვის. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ამ პირობების შესრულებისას, არამარტო თითოეული ქვესპექტრი, ფორმირებადი ω_i სიხშირის სიახლოვეს, შეიძლება დაშორებული იყოს სხვებისგან ზოლოვანი ფილტრის დახმარებით, არამედ ასევე ამ ფილტრებიდან თითოეულის გამოსავალი სიგნალის შეიძლება დემოდულაცია $i \gamma_R$ -სა და $i \gamma_I$ -ის მისაღებად.

მაგალითი 7.1.

განვიხილოთ სისტემის იდენტიფიკაციის ამოცანა, რომელიც ნაჩვენებია სურათზე 3. იგულისხმება, რომ შესასვლელზე მიეწოდება მხოლოდ ტესტური სიგნალი და სისტემის სტაციონალურ ნაწილში დამთავრებულია გარდამავალი პროცესები. სისტემის სტრუქტურა გვეჩვენებს u_1 ისეთი საცდელი სიგნალის არჩევანს, როგორცაა $\tilde{u}_1 = \cos \omega t$. მაშინ, სისტემის არასტაციონალური ნაწილი იქნება იდენტიფიცირებული იყოს ისე, თითქოს მხოლოდ ის იკვლევება, - არ არის საჭირო არანაირი ცვლილებების შეტანა ზემოთ ჩამოყალიბებულ თეორიაში.



სურ.3. მეორე რიგის არასტაციონალური დინამიკური სისტემა

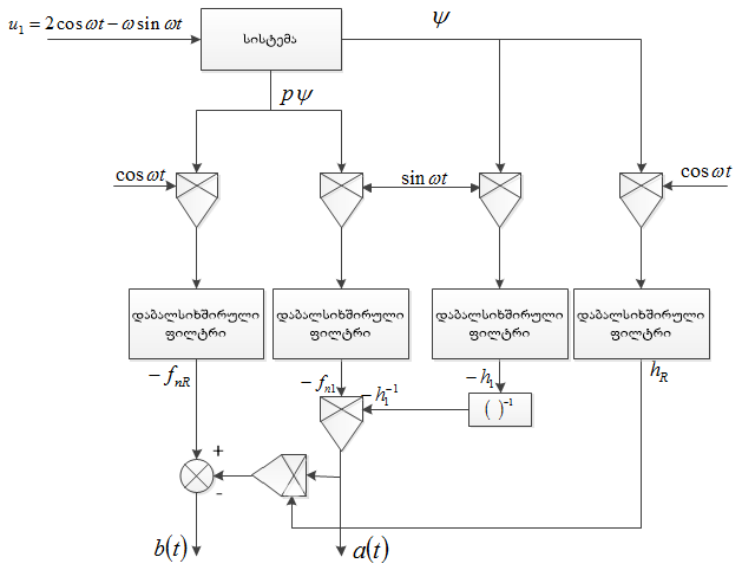
არ არის რთული ვაჩვენოთ, რომ ყველაზე სწორი იქნება ავირჩიოთ $u_1 = 2\cos\omega t - \omega\sin\omega t$. თუ შევადგენთ \mathbf{G} მატრიცას და გარდავქმნით მას მივიღებთ

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_I^{-1} & f_{nI} \\ f_{nR} - h_R & (h_I^{-1} f_{nI}) \end{pmatrix}.$$

სიდიდეები h_R , h_I , f_R , f_I უნდა გაიზომოს ზემოთ განხილული მეთოდებით. განხილული სქემის იდენტიფიკაციის რეალიზაცია ნაჩვენებია სურათზე 4.

ხმაურის პრობლემა ამ იდენტიფიკაციის სქემაში წარმოადგენს გარკვეულ ინტერესს და იმსახურებს მოკლე განხილვას. სასურველია მივადწიოთ ორ მთავარ შედეგს: ხმაურის ზემოქმედების მინიმიზაცია, რომელიც ჩნდება შესასვლელზე, და ხმაურის ზემოქმედების შემცირება γ შეფასებაზე, რომელსაც ვიღებთ, როდესაც \mathbf{x} -ის ყველა კომპონენტის გაზომვა არ შეიძლება უშუალოდ.

ხმაური შესასვლელზე ხშირად შეიძლება აღმოჩნდეს ცნობილი მმართველი ზემოქმედება, რომელიც წარმოადგენს „ხმაურს“ იმდენად, რამდენადაც განიხილება მოცემული იდენტიფიკაციის მეთოდი. ცალკეულ შემთხვევებში ხერხდება ტესტური სიგნალის ამპლიტუდის გაზრდა და (ან)მისი მაქსიმალური სიხშირის არჩევა, რომელიც მნიშვნელოვნად აღემატება სისტემის ჩამოჭრის სიხშირეს. ასეთ დროს ამდაგვარი „წამლის“ გამოყენებისას საჭიროა შენარჩუნებული იყოს დიდი სიფრთხილე აშკარა უარყოფითი ეფექტების გამო.

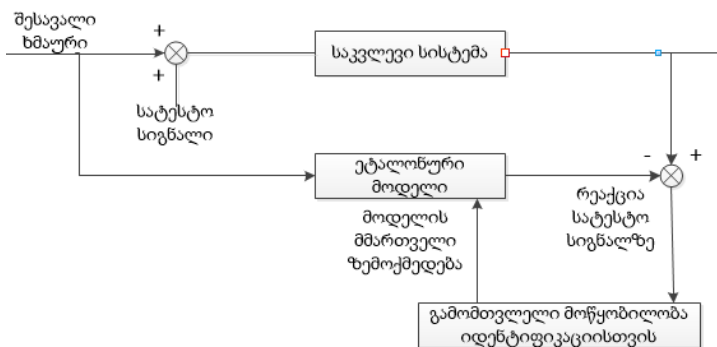


სურ.4. იდენტიფიკაციის პროცესის მოდელირების სქემა

შესავალი ხმაურის ზეგავლენის შემცირების შედარებით დახვეწილი მეთოდი დაფუძნებულია საწყისი სისტემის მიმყოლი მოდელის გამოყენებაზე, როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე 5. ამ ხმაურის განადგურების სქემაზე მიმყოლი მოდელი იწყობა რაც შეიძლება ახლოს საკვლევ სისტემასთან. ამ პირობებში, გამოთვლით მანქანის შესასვლელზე, რომელიც ახორციელებს იდენტიფიკაციას, ეწოდება სისტემის რეაქცია მხოლოდ ტესტურ სიგნალზე. ამრიგად, ვლებულობთ იდენტიფიკაციას ეტალონური მოდელით.

ამრიგად, ჩვენ განვიხილეთ არასტაციონალური დინამიკური ობიექტების იდენტიფიკაციის სქემა. ეს მეთოდი რეალურ მაშტაბურ დროში იდენტიფიკაციის გამოყენების იმედს იძლევა და განსაკუთრებით წარმატებულია რეგულირების კონტურის გარეთ იდენტიფიკაციისას, როდესაც ფიზიკურად არარეალიზებადი ფილტრების

მოდელირება საშუალებას გვაძლევს მივადწიოთ იდენტიფიკაციის მანქენებლებს, რომლებიც უახლოვდებიან თეორიულ მაქსიმუმს.



სურ.5. ხმაურის ლიკვიდაციის სქემა ეტალონური მოდელით

შემოთავაზებული იყო ტესტური სიგნალების სისშირეების არჩევის კრიტერიუმი, რომელიც შეიძლება გამოვიყენოთ ექსპერიმენტალური მონაცემების უტყუარობის შეფასებებისთვის, რომლებიც მიღებულია ცალკეულ კონკრეტულ იდენტიფიკაციის პროცესში.

7.4. ერთგანზომილებიანი არასტაციონარული სისტემების იდენტიფიკაცია

განვიხილოთ მართვის ერთგანზომილებიანი დაკვირვებადი სისტემა, ე.ი. სისტემა ერთი შესავლელით და ერთი გამოსასვლელით, რომელიც აღიწერება (7.2) ნორმალური სახის n -ური რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებით.

იდენტიფიკაციის ამოცანას ვსვამთ შემდგენაირად: იდენტიფიკაციის თეორიის თანახმად სისტემის შესავალ და მდგომარეობის ცვლადებზე დაკვირვებების შედეგად ცნობილია შესასვლელი ცვლადი $u(t)$ და მდგომარეობის

ცვლადები $x_k(t)$ ($k=1,2,\dots,n$), რომლებიც წარმოადგენენ (7.2) განტოლების ამონახსნებს სისტემის სხვადასხვა საწყისი მდგომარეობის დროს. საჭიროა განისაზღვროს უცნობი უწყვეტი კოეფიციენტები $a_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$). ამასთან იგულისხმება, რომ უცნობია (7.2) განტოლების შესაბამისი

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t)x^{(i-1)}(t). \quad (7.55)$$

ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა.

ვინაიდან x_k ($k=1,2,\dots,n$) (7.2) განტოლების ამონახსნია, ამიტომ გვაქვს

$$x_k^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t)x_k^{(i-1)}(t) + u(t) \quad (k=1,2,\dots,n). \quad (7.56)$$

(7.56) გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\sum_{i=1}^n a_i(t)x_k^{(i-1)}(t) = x_k^n - u(t) \quad (k=1,2,\dots,n). \quad (7.57)$$

შემოვიტანოთ $X(t)$ მატრიცა

$$X(t) = (x_k^{(i-1)}(t))_{k,i=1}^n. \quad (7.58)$$

(7.57) არის $a_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$)-ის მიმართ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა. ცნობილია, რომ მას გააჩნია ამონახსნი და მასთან მხოლოდ ერთი იმ შუალედში, სადაც მისი დეტერმინანტი $W(t) = \det X(t) \neq 0$.

ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ისეთი $I_0 \subset I$, რომ $W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I_0$.

სამართლიანია

თეორემა 7.1. თუ $u \in C(I, R)$ და $x_k \in C^n(I, R)$ ($k=1,2,\dots,n$), მაშინ არსებობს შუალედი $I_0 \subset I$ ისეთი, რომ $W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I_0$ და I_0 -ში $a_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$) კოეფიციენტები განისაზღვრებიან ცალსახად, კერძოდ კრამერის წესით

$$a_i(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)} \quad (i=1,2,\dots,n), \quad \forall t \in I_0. \quad (7.59)$$

მართლაც: დაუშვათ, რომ $x_k(t)$ ($k=1,2,\dots,n$) წარმოადგენს (7.2) განტოლების ამონახსნს სისტემის საწყისი

$$x_k^{(i-1)}(t_0) = c_{ki}, \quad t_0 \in I, \quad c_{ki} \in R, \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (7.60)$$

მდგომარეობის დროს.

ცნობილია, რომ (7.2), (7.60) ამოცანის ამონახსნი მოიცემა კოშის ფორმულით

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t, t_0) c_{ki} + \int_{t_0}^t C_n(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (k=1,2,\dots,n), \quad (7.61)$$

სადაც $C_i: I \times I \rightarrow R$ ($i=1,2,\dots,n$) არის (7.2) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების კოშის სისტემა, ხოლო C_n - კი კოშის ფუნქციაა.

ავიღოთ c_{ki} მუდმივების როლში

$$c_{ik} = \delta_{ik} \quad (i, k=1,2,\dots,n), \quad (7.62)$$

სადაც

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } i \neq k \\ 1, & \text{თუ } i = k \end{cases}$$

კონკრეტის სიმბოლოა.

ასეთ შემთხვევაში (7.61) მიიღებს სახეს:

$$x_k(t) = C_k(t, t_0) + \int_{t_0}^t C_n(t, \tau) u(\tau) d\tau. \quad (7.63)$$

გამოვითვალოთ $X(t)$ მატრიცის დეტერმინანტის მნიშვნელობა t_0 წერტილში. (7.58)-ში (7.63)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$W(t_0) = \det(C_k^{(i-1)}(t_0, t_0))_{k,i=1}^n \neq 0, \quad (7.64)$$

ვინაიდან (7.55)-ის კოშის სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი

$$\det(C_k^{(i-1)}(t, t_0))_{k,i=1}^n \neq 0 \quad \forall t \in I. \quad (7.65)$$

ვინაიდან $X(t)$ უწყვეტი მატრიცია და უწყვეტი მატრიცის დეტერმინანტი $W(t)$ უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ იარსებებს ისეთი შუალედი I_0 , რომ $t_0 \in I_0 \subset I$ და $W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I_0$. ამიტომ $a_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$) კოეფიციენტები შეიძლება განსაზღვრული იქნას კრამერის წესით – (7.59) ფორმულებით. ეს განსაზღვრა იქნება ცალსახა, ვინაიდან კოშის (7.2), (7.60) ამოცანას $\forall k \in \{1,2,\dots,n\}$ -თვის ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის თეორემის თანახმად გააჩნია ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი.

7.5. მრავალგანზომილებიანი არასტაციონარული სისტემების იდენტიფიკაცია

განვიხილოთ მრავალგანზომილებიანი დაკვირვებადი სისტემა n შესასვლელით და n გამოსასვლელით, რომელიც აღიწერება (7.8) სახის ნორმალურ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით.

პარამეტრების იდენტიფიკაციის ამოცანას ვსვამთ ერთგანზომილებიანი სისტემების ანალოგიურად: სისტემის შესასვლელ და გამოსასვლელ ცვლადებზე დაკვირვების შედეგად ცნობილია შესასვლელი ვექტორი $\mathbf{u}(t)$ და გამოსასვლელი ვექტორები $\mathbf{x}_k(t)$ ($k=1,2,\dots,n$), რომლებიც წარმოადგენენ (7.8) სისტემის ამონახსნებს სისტემის სხვადასხვა საწყისი მდგომარეობის დროს. საჭიროა განისაზღვროს უცნობი უწყვეტი მატრიცა $\mathbf{A}(t)$, ამასთან იგულისხმება, რომ უცნობია (2.2.6) სისტემის შესაბამისი

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (7.66)$$

განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა.

ვინაიდან $\mathbf{x}_k(t)$ ($k=1,2,\dots,n$) (7.8) სისტემის ამონახსნია, ამიტომ გვაქვს

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_k + \mathbf{u}(t) \quad (k=1,2,\dots,n). \quad (7.67)$$

(7.68) წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{x}_k = \dot{\mathbf{x}}_k - \mathbf{u}(t) \quad (k=1,2,\dots,n). \quad (7.69)$$

შემოვიტანოთ $\mathbf{X}(t)$ მატრიცა, რომლის სვეტებია $\mathbf{x}_k(t)$ ($k=1,2,\dots,n$):

$$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}_{k,i}(t))_{k,i=1}^n \quad (7.70)$$

და მატრიცა $\mathbf{U}(t)$, რომლის სვეტებია $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{U}(t) = (u_{ik}(t))_{i,k=1}^n \quad (u_{ik}(t) = u_i(t)). \quad (7.71)$$

მაშინ (7.673) სისტემა შეიძლება გადაიწეროს მატრიცული აღგებრული განტოლების სახით

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) = \dot{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{U}(t). \quad (7.72)$$

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ $\mathbf{A}(t)$ მატრიცა (7.72)-დან საკმარისია, რომ $\mathbf{X}(t)$ მატრიცა იყოს გადაუგვარებელი.

ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ისეთი $I_0 \subset I$, რომ $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$ $\forall t \in I_0$.

სამართლიანია

თეორემა 7.2. თუ $u \in C(I, R^n)$, $x_k \in C(I, R^n)$ ($k=1,2,\dots,n$), მაშინ არსებობს შეაღვლი $I_0 \subset I$ ისეთი რომ, $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$ $\forall t \in I_0$ და I_0 -ში $\mathbf{A}(t)$ მატრიცა განისაზღვრება ცალსახად, კერძოდ

$$\mathbf{A}(t) = (\dot{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{U}(t))\mathbf{X}^{-1}(t) \quad \forall t \in I_0. \quad (7.73)$$

მართლაც: დავეუშვათ, რომ $\mathbf{x}_k(t)$ ($k=1,2,\dots,n$) წარმოადგენს (7.8) სისტემის ამონახსნს სისტემის საწყისი

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}_k, \quad t_0 \in I_0, \quad \mathbf{c}_k \in R^n, \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (7.74)$$

მდგომარეობის დროს.

ცნობილია, რომ (7.8), (7.74) ამოცანის ამონახსნი მოიცემა კოშის ფორმულით:

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{C}(t, t_0)\mathbf{c}_k + \int_{t_0}^t \mathbf{C}(t, \tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

(7.75)

სადაც $C: I \times I \rightarrow R^{n \times n}$ მატრიცული ფუნქციაა წარმოადგენს (7.66) სისტემის კოშის მატრიცას.

c_k ($k=1,2,\dots,n$) მუდმივების როლში ავიღოთ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორები, კერძოდ

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}_k = \mathbf{e}_k \quad (k=1,2,\dots,n), \quad (7.76)$$

სადაც $\mathbf{e}_k = (\delta_{ik})_{i=1}^n$, δ_{ik} - კრონეკერის სიმბოლოა.

თუ მხედველობაში მივიღებთ კოშის მატრიცის განსაზღვრას, მივიღებთ

$$\det \mathbf{X}(t_0) = \det \mathbf{C}(t_0, t_0) = \det \mathbf{E} = 1 \neq 0, \quad (7.77)$$

სადაც \mathbf{E} - ერთეულოვანი მატრიცია.

ვინაიდან $\mathbf{X}(t)$ უწყვეტი მატრიციაა, ხოლო უწყვეტი მატრიცის დეტერმინანტი უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ ცხადია არსებობს შუალედი I_0 , ისეთი რომ $t_0 \in I_0 \subset I$ და $\det \mathbf{X}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I_0$. ამიტომ $\forall t \in I_0$ არსებობს შებრუნებული

მატრიცა $\mathbf{X}^{-1}(t)$ და $\mathbf{A}(t)$ მატრიცა შეიძლება განსაზღვრული იქნას (7.73) ფორმულით. ცხადია, რომ ეს განსაზღვრა იქნება ცალსახა.

მრავალგანზომილებიანი არასტაციონარული წრფივი დინამიკური სისტემების ცვლადი პარამეტრების განსაზღვრის ალგორითმი მდგომარეობს შემდეგში: ვახდენთ დაკვირვებებს სისტემის შესასვლელეზე და სისტემის სხვადასხვა საწყისი მდგომარეობის დროს გამოსასვლელეზე. დაკვირვების შედეგად მიღებულ მონაცემებს ვუკეთებთ აპროქსიმაციას უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებით. ვადგენთ $\mathbf{u}(t)$ და $\mathbf{x}_k(t)$ ($k=1,2,\dots,n$) ვექტორებს. შემდეგ ვადგენთ $\mathbf{X}(t)$ მატრიცას (7.70) სახით და $\mathbf{U}(t)$ მატრიცას (7.71) სახით. ამის შემდეგ ვაწარმოებთ $\mathbf{X}(t)$ მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლას და ვადგენთ I_0 ინტერვალს, სადაც მისი დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან. ამ ინტერვალში ვსაზღვრავთ კოეფიციენტების $\mathbf{A}(t)$ მატრიცას (7.73) ფორმულის საშუალებით.

თავი 8

იდენტიფიკაცია ინვარიანტული ჩაღმის მეთოდით

8.1. ინვარიანტული ჩაღმის მეთოდის შესახებ

მეთოდებს, რომელთა დახმარებით დიფერენციალური განტოლობების ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანა გარდაისახება ერთწერტილოვან სასაზღვრო ამოცანად, უწოდებენ ინვარიანტული ჩაღმის მეთოდებს. ასეთი მეთოდები გამოიყენება სისტემის იდენტიფიკაციაში.

ინვარიანტული ჩაღმის მეთოდები შეიძლება გამოყენებულ იქნან პარამეტრების იდენტიფიკაციისთვის, ასევე წრფივი და არაწრფივი დაკვირვებადი სისტემების პარამეტრებისა და მდგომარეობის ერთდროული თანმიმდევრული შეფასებისთვის. არაწრფივი სისტემების იდენტიფიკაციის ამოცანებში ინვარიანტული ჩაღმის მეთოდის გამოყენებისას აუცილებელია აპრიორული ინფორმაცია არაწრფივი ფუნქციის ფორმაზე, რომლის პარამეტრების იდენტიფიცირება არის საჭირო. ინვარიანტული ჩაღმის მეთოდით იდენტიფიკაციის პროცედურის კრებადობა პარამეტრების ფაქტიურ მნიშვნელობებთან შეიძლება უზრუნველყოფილი იყოს საწყისი შეფასებების საკმაოდ ფართო დიაპაზონში, ამასთან მოითხოვება აპრიორული მონაცემების არსებობა დიაპაზონის შესახებ, რომლის შიგნით არის მოთავსებული პარამეტრების მნიშვნელობები. ასეთი მონაცემები შეიძლება არ იყოს ზუსტი იმ შემთხვევისგან განსხვავებით, როდესაც გამოიყენება სასაზღვრო კვაზიგაწრფეების სასაზღვრო მეთოდები, მაგრამ ეს ძლიერ ამცირებს იდენტიფიკაციის პროცედურის კრებადობის სიჩქარეს. გარდა ამისა, იდენტიფიკაციის ამოცანის გადაწყვეტისას პარამეტრების საწყისი მატრიცის არაადეკვატურმა შერჩევამ, შეიძლება გამოიწვიოს იდენტიფიკაციის პროცედურის განშლადობა ან სუსტი კრებადობა.

იდენტიფიკაცია ინვარიანტული ჩაღმის მეთოდით დაფუძნებულია არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემის ინტეგრებაზე დროის მიხედვით, რომლის

ამონახსნი უნდა იკრიბებოდეს პარამეტრებისა და პარამეტრების და მდგომარეობის შეფასებებისადმი. იმის გამო, რომ გაზომვებით მიღებული მონაცემები შედის მითითებული განტოლებების მარჯვენა მხარეს, ამიტომ რაც უფრო ხანგრძლივია გაზომვების პროცესი, მით უფრო ზუსტად ამონახსნი უახლოვდება პარამეტრების ჭეშმარიტ მნიშვნელობებს.

ვინაიდან ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდი უზრუნველყოფს წრფივი და არაწრფივი სისტემების პარამეტრებისა და მდგომარეობის ყველა ცვლადების ერთდროულ და თანმიმდევრულ ოპტიმალურ შეფასებას, ამიტომ ის წარმოადგენს იდენტიფიკაციის ერთ-ერთ ყველაზე ძლიერ მათემატიკურ მეთოდს. მდგომარეობისა და პარამეტრების ერთდროული შეფასება შეიძლება განხორციელდეს სხვა მეთოდებითაც, მაგალითად კვაზიგაწრფეების მეთოდით. მაგრამ ამ მეთოდების დიდი ნაწილი ძირითადად გამოყენებადია წრფივი სისტემებისათვის და თხოვლობს არაწრფივი სისტემების გაწრფეებას, და კვაზიგაწრფეების მეთოდის გამოყენებისას კრებადობის უზრუნველყოფისთვის აუცილებელია კარგი საწყისი შეფასებების ქონა. ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდი თავისუფალია ასეთი შეზღუდვებისგან. მიუხედავად თავისი ზოგადი ხასიათისა, ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდის გამოყენება დროის რეალურ მასშტაბში იდენტიფიკაციისთვის იზღუდება გამოთვლითი სირთულეებით. ამიტომ მოცემული მეთოდი გამოყენებადია ძირითადად იმ შემთხვევაში, როდესაც საჭიროა არაწრფივი სისტემების მდგომარეობისა და პარამეტრების ერთდროული შეფასება და არსებობს საკმარისი აპრიორული ინფორმაცია. უნდა აღნიშნოს, რომ როდესაც მდგომარეობის ვექტორის განზომილება არ არის ცნობილი, განზომილების იტერაციული განსაზღვრა არარაციონალურია განსაზღვრებადი პარამეტრების რაოდენობის გაზრდისა და გამოთვლების შესაბამისი გართულების გამო.

8.2. იდენტიფიკაციის ამოცანის დასმა ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდით

განვიხილოთ სისტემა გაღწერილი უტოლობებით:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}, \mathbf{u}(t)] + \mathbf{n}(t) \quad (8.1)$$

და

$$\mathbf{z} = \phi[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}, \mathbf{u}(t)] + \mathbf{v}(t), \quad (8.2)$$

სადაც \mathbf{f} არაწრფივი ფუნქციაა, \mathbf{x} , \mathbf{u} , \mathbf{n} , \mathbf{z} და \mathbf{v} - მდგომარეობის, გაზომვადი შესავალის, სისტემაში არაგაზომვადი ხმაურის, გაზომვებისა და გაზომვებში ხმაურის ვექტორებია, შესაბამისად, \mathbf{p} - მუდმივი პარამეტრების ვექტორია, თანაც

$$\dot{\mathbf{p}} = 0. \quad (8.3)$$

იდეალტიფიკაციის ამოცანა ისმება როგორც J დანახარჯების მინიმიზაციის ამოცანად, სადაც

$$J \equiv \int_{t_0}^{t_f} \{ [\mathbf{z} - \phi(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})]^T \boldsymbol{\eta} [\mathbf{z} - \phi(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})] + \hat{\mathbf{n}}^T \boldsymbol{\xi} \hat{\mathbf{n}} \} dt. \quad (8.4)$$

აქ $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{n}}$ - (8.1) განტოლებების \mathbf{x} და \mathbf{n} -ს შესაბამისი შეფასებებია, $\boldsymbol{\eta}$ და $\boldsymbol{\xi}$ - დადებითი დიაგონალური წონითი მატრიცებია (უნდა აღინიშნოს, რომ პროგნოზირების მოდელებში ჩვეულებრივ $\mathbf{u} = 0$).

ახლა განვსაზღვროთ \mathbf{y} ვექტორი:

$$\mathbf{y} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

(8.1) და (3.3) განტოლებებიდან გამომდინარეობს

$$\dot{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{V}, \quad (8.6)$$

სადაც

$$\boldsymbol{\Phi} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (8.7)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

ხოლო $\boldsymbol{\Phi}$ (9.7) განტოლებიდან არის \mathbf{y} -ის არაწრფივი ფუნქცია, იმ შემთხვევაშიც კი როდესაც \mathbf{f} ფუნქცია წრფივია. ამიტომ, როდესაც

$$\dot{x} = px + u,$$

სადაც

$$x \equiv y_1, \quad p \equiv y_2, \quad \mathbf{y}^T \equiv (y_1, y_2),$$

და (9.6) განტოლების შესაბამისად

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1 y_2 + u \\ \dot{y}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} = \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{V},$$

ასე რომ

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

\mathbf{y} ვექტორის $\hat{\mathbf{y}}$ შეფასების მიხედვით J -ის მინიმიზაციისათვის, განვიხილოთ ჰამილტონიანი H , სადაც

$$H \equiv [\mathbf{z} - \boldsymbol{\phi}(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{u})]^T \boldsymbol{\eta} [\mathbf{z} - \boldsymbol{\phi}] + \hat{\mathbf{n}}^T \boldsymbol{\xi} \hat{\mathbf{n}} + \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T \boldsymbol{\phi}. \quad (8.9)$$

J -ის მინიმიზაციის პირობიდან $\hat{\mathbf{y}}$ -ს მიხედვით, მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{\mathbf{y}}} = -\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \hat{\mathbf{y}}, \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0. \quad (8.12)$$

გარდა ამისა, როდესაც $\hat{\mathbf{y}}(t_0)$, $\hat{\mathbf{y}}(t_f)$ არ არის მოცემული (აქ t_0 და t_f დროის საწყისი და საბოლოო მომენტების მნიშვნელობებია), ტრანსვერსალობის პირობები H -ის მინიმიზაციისას იძლევა

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \Big|_{t=t_0}^{t=t_f}. \quad (8.13)$$

ამრიგად, (8.10) და (8.11) განტოლებებთან შეიძლება დავაკავშიროთ შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\lambda(t_0) = 0, \quad (8.14)$$

$$\lambda(t_f) = 0. \quad (8.15)$$

მაშასადამე, $\hat{\mathbf{x}}$ და $\hat{\mathbf{p}}$ -ის შეფასება წარმოადგენს (8.10) და (8.11) განტოლებების ამოსახსნის ამოცანას შესაბამისი საწყისი პირობების გამოყენებით. ასეთ შემთხვევაში აუცილებელი ხდება ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდის გამოყენება.

8.3. უწყვეტი სისტემის იდენტიფიკაციის ამოცანის გადაწყვეტა ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდის საშუალებით

სისტემის იდენტიფიკაციისა და მდგომარეობის შეფასების ამოცანა ინტერვალზე t_0 -დან t_f -მდე, განსაზღვრული (8.10) და (8.11) განტოლებებით, შეიძლება განვიხილოთ როგორც განზოგადებულ ორწერტილოვან სასაზღვრო ამოცანად, აღწერილი განტოლებებით:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \lambda, \mathbf{u}, t), \quad (8.16)$$

$$\dot{\lambda} = \mathbf{h}(\mathbf{y}, \lambda, \mathbf{u}, t), \quad (8.17)$$

რომლებშიც \mathbf{g} და \mathbf{h} - \mathbf{y} , λ , \mathbf{u} და t -ს ფუნქციებია, ხოლო სასაზღვრო პირობები შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი სახით:

$$\lambda(t_0) = \mathbf{a}, \quad (8.18)$$

$$\lambda(t_f) = \mathbf{b} \quad (8.19)$$

შეიძლება ჩაითვალოს, რომ საბოლოო პირობები $\lambda(t_f)$ აღიწერება t_f -ს შედარებით ზოგადი ფუნქციით სადაც t_f - მიმდინარე ცვლადია. მაშინ ტოლობიდან:

$$\lambda(t_f) = \mathbf{C}(t_f) \quad (8.20)$$

გამომდინარეობს საბოლოო პირობა, რომელიც ედება \mathbf{y} -ს:

$$\mathbf{y}(t_f) = \mathbf{F}(\mathbf{C}, t_f) \quad (8.21)$$

ამრიგად, საბოლოო პირობა, რომელიც დადებული იყო \mathbf{y} -ზე და არ იყო მოცემული, იცვლება \mathbf{F} ფუნქციით, რომელიც შეესაბამება λ -ზე დადებულ საბოლოო პირობას.

თუ (8.21) განტოლებას დავშლით ტეილორის მწკრივად და შემოვიფარგლებით პირველი რიგის წევრებით, მაშინ (8.16) განტოლების გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\mathbf{F}(\mathbf{C} + \Delta\mathbf{C}, t_f + \Delta t_f) = \mathbf{F}(\mathbf{C}, t_f) + \mathbf{g}(\mathbf{F}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t_f) \Delta t_f. \quad (8.22)$$

$\mathbf{F}(\mathbf{C} + \Delta\mathbf{C}, t_f + \Delta t_f)$ -ის შემდგომი აპროქსიმაციით, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\mathbf{F}(\mathbf{C} + \Delta\mathbf{C}, t_f + \Delta t_f) = \mathbf{F}(\mathbf{C}, t_f) + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{C}} \Delta\mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_f} \Delta t_f, \quad (8.23)$$

სადაც \mathbf{C} და t_f განიხილება როგორც დამოუკიდებელი პარამეტრები. \mathbf{C} განსაზღვრებიდან და (8.17) განტოლებიდან მივიღებთ პირველი რიგის აპროქსიმაციას $\Delta\mathbf{C}$ -სთვის:

$$\Delta\mathbf{C} = \mathbf{h}(\mathbf{F}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t_f) \Delta t_f. \quad (8.24)$$

(8.24) განტოლებიდან $\Delta\mathbf{C}$ გამოსახულების ჩასმით (9.23)-ში და (9.22) და (9.23) განტოლებების მარჯვენა ნაწილების გატოლებით, მივიღებთ შემდეგ ინვარიანტულ ჩადგმის განტოლებას:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{C}} \right)^T \mathbf{h}(\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_f} = \mathbf{g}(\mathbf{F}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t_f). \quad (8.25)$$

თუმცა (8.10) და (8.11) განტოლებების შედარებით (8.16) და (8.17)-თან, მივიღებთ

$$\mathbf{g}(\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \lambda} \bigg|_{\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{C}} \bigg|_{\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f} \quad (8.26)$$

და

$$\mathbf{h}(\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f) = - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{y}} \bigg|_{\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f} = - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{C}} \bigg|_{\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f} \quad (8.27)$$

ამიტომ (8.25) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_f} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{C}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{F}} \bigg|_{\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f} = - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{C}} \bigg|_{\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f} . \quad (8.28)$$

\mathbf{F} -ის განსაზღვრების თანახმად (8.21) ფორმულაში, შეიძლება ამოვირჩიოთ (8.28) განტოლების ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$\mathbf{F}(\mathbf{C}, t_f) = \hat{\mathbf{y}}(t_f) - \mathbf{Q}(t_f) \mathbf{C}(t_f), \quad (8.29)$$

სადაც \mathbf{Q} - სიმეტრიული მატრიცაა. ბოლო ვარაუდი სამართლიანია t_f -ის მიდამოში, რადგან \mathbf{C} -ს სიმცირისას, შეიძლება დავეუშვათ წრფივი კავშირი $\mathbf{F}(t_f)$ -სა და მის შეფასებას შორის. თუ ჩავსვამთ \mathbf{F} -ის გამოსახულებას (8.29)-დან და (8.28)-ში და გავითვალისწინებთ (8.20) და (8.21) განტოლებებს, მივიღებთ:

$$\frac{\partial \mathbf{y}(t_f)}{\partial t_f} + \mathbf{Q}(t_f) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{F}} \bigg|_{\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{C}} \bigg|_{\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f} . \quad (8.30)$$

ზემოთ მოყვანილი გარდაქმნებიდან გამომდინარეობს, რომ (8.30) განტოლება აკმაყოფილებს საბოლოო პირობებს t_f მომენტში. აქედან გამომდინარე, თუ გავაერთიანებთ (8.29) და (8.30) ფორმულებს, t_f მიმდინარე ცვლადის ნაცვლად t ცვლადის შემოტანით, მაშინ, იმის გათვალისწინებით, რომ $\mathbf{C}(t_f)$ არაა დამოკიდებული t -ზე, მივიღებთ

განტოლებათა სისტემას, რომელიც აკმაყოფილებს $\mathbf{C}(t_f)$ -ს საბოლოო პირობებს:

$$\mathbf{y}(\mathbf{C}, t) = \hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{Q}(t)\mathbf{C} \quad (8.31)$$

და

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} - \mathbf{Q}(t)\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t), \quad (8.32)$$

სადაც \mathbf{g} და \mathbf{h} -ს გააჩნიათ იგივე აზრი, როგორც აქვთ (8.26) და (8.27) განტოლებებში \mathbf{F} , t -ს შეცვლისას \mathbf{y} , t -ზე ბოლო ფორმულა შეიძლება გარდაექმნათ შემდეგი სახით:

$$\hat{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{C} - \mathbf{Q}(t)\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t), \quad (8.33)$$

ან თუ (8.26) და (8.27) განტოლებებიდან ჩავსვამთ გამოსახულებას \mathbf{g} და \mathbf{h} -ისთვის განტოლებაში

$$\hat{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{C} + \mathbf{Q} \left. \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\substack{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}-\mathbf{Q}\mathbf{C} \\ \lambda=\mathbf{C}, \partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{u}=\mathbf{0}}} = - \left. \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \lambda} \right|_{\substack{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}-\mathbf{Q}\mathbf{C} \\ \lambda=\mathbf{C}, \partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{u}=\mathbf{0}}} . \quad (8.34)$$

განტოლება (8.34) ფაქტიურად აღწერს სისტემის ქცევას t_f მიმდინარე ცვლადის მნიშვნელობის მიდამოებში, რომელიც ეხლა აღინიშნულია t -თი. ეს გვაძლევს საშუალებას ჩავატაროთ t_f ცვლადის თანმიმდევრობითი შეფასება t ცვლადის ცვლილების დიაპაზონში. ვინაიდან, (8.15) და (8.20) განტოლებების შესაბამისად \mathbf{C} მატრიცა ახლოს უნდა იყოს $\mathbf{0}$ -თან. ყველა წევრი C_i^2 , C_i , C_j (C_i, C_j -- \mathbf{C} მატრიცის ელემენტებია) შეიძლება გამოვტოვოთ. გარდა ამისა, რადგან $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{0}$, (8.34) განტოლება გვაძლევს ორ განტოლებათა სისტემას, კერძოდ განტოლებებათა სისტემას, რომელიც მიღებულია \mathbf{C} -ს გატოლებით $\mathbf{0}$ -თან (8.34) განტოლებაში, და განტოლებებათა სისტემას, რომელიც მიიღება კოეფიციენტების გატოლებით \mathbf{C} -სთან პირველი რიგის მცირე წევრებთან (იხილეთ მაგალითი

ქვევით). ამ განტოლებების მიღების შემდეგ ვამჩნევთ, რომ Q მატრიცა სიმეტრიულია. შედეგად, მიღებული პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემები შეიძლება ამოვხსნათ თანმიმდევრობით საწყისი პირობების $Q(t_0)$ -ის და $y(t_0)$ -ის მითითებით. ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდის კარგი კრებადობის გამო $\hat{y}(t_0)$, $Q(t_0)$ სიდიდეების საწყისი შეფასების სიზუსტეს არ გააჩნია გადამწვევტი მნიშვნელობა. თუმცა, $\hat{y}(t_0)$ -ს საუკეთესო საწყისი შეფასებებისას, პროცედურა იკრიბება სწრაფად. ავნიშნოთ რომ სისტემისთვის n მდგომარეობებით და r უცნობი პარამეტრებით, თავსებადი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების რაოდენობა, რომელთა ამონახსნის მიღებაა საჭირო ზევით განხილულ პროცედურაში, ტოლია $[n+r+(n+r)(n+r+1)/2]$, სადაც $(n+r)$ - y -ის ელემენტების რაოდენობაა, ხოლო $(n+r)(n+r+1)/2$ - სიმეტრიული Q მატრიცის განსხვავებული ელემენტების რაოდენობაა. განტოლებათა დიდი რაოდენობა იწვევს გამოთვლით სირთულეებს იდენტიფიკაციის პროცედურის რეალიზაციისას ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდით.

მაგალითი 8.1

ეს მაგალითი მოყვანილია იმისთვის, რომ ილუსტრაცია გავუკეთოთ იდენტიფიკაციის პროცედურას ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდით. განვიხილოთ პროცესი, აღწერილი განტოლებებით:

$$\dot{x} = p_1x + p_2u$$

$$z = x + v$$

სადაც p_1 და p_2 - უცნობი მუდმივი პარამეტრებია, a, x, u, v და z აღნიშნავენ გაზომვებში მდგომარეობას, შესავალს, ხმაურს და გამოსავალს, შესაბამისად.

შეიძლება ჩაეწეროს

$$\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = 0.$$

მხედველობაში მივიღოთ

$$\mathbf{y} \equiv \begin{pmatrix} x \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

და

$$\mathbf{J} \equiv \int_0^{t_f} (z - \hat{x})^2 dt .$$

\mathbf{J} -ს მინიმიზაციისათვის $\hat{\mathbf{y}}$ -ის მიხედვით განვიხილოთ ჰამილტონიანი \mathbf{H} , რომელიც განისაზღვრება გამოსახულებით

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\equiv (z - x)^2 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g} = (z - \hat{x})^2 + \lambda_1(\hat{p}_1 \hat{x} + \hat{p}_2 u) + \lambda_2 \dot{p}_1 + \lambda_3 \dot{p}_2 = \\ &= (z - \hat{y}_1)^2 + \lambda_1(\hat{y}_1 \hat{y}_2 + \hat{y}_3 u) + 0 + 0 . \end{aligned}$$

მისთვის მიიღება შემდეგი ფორმულა:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \lambda_1} = \hat{\mathbf{y}}_1 = \hat{y}_1 \hat{y}_2 + \hat{y}_3 u ,$$

სადაც u - გაზომვადი ცვლადია, და

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \hat{y}_1} = -\dot{\lambda}_1 = -2z + 2\hat{y}_1 + \lambda_1 \hat{y}_2 ,$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \hat{y}_2} = -\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 \hat{y}_1 ,$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \hat{y}_3} = -\dot{\lambda}_3 = \lambda_1 u .$$

ბოლო განტოლებებისათვის სასაზღვრო პირობებად ითვლება:

$$\boldsymbol{\lambda}(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1(0) \\ \lambda_2(0) \\ \lambda_3(0) \end{pmatrix} = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0 .$$

დაეუშვათ, რომ ინვარიანტული ჩადგმის (8.28) განტოლების ამონახსნი მიიღება (8.29) განტოლების ფორმის სახით:

$$\mathbf{F}(\mathbf{C}, t_f) = \hat{\mathbf{y}}(t_f) - \mathbf{Q}(t_f)\mathbf{C}.$$

ამ გამოსახულების ჩასმით (9.28) ფორმულაში, (9.34) ფორმულის შესაბამისად მივიღებთ:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \hat{y}_1(0) \\ \hat{y}_2(0) \\ \hat{y}_3(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{Q}_{11} & \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{13} \\ \dot{Q}_{21} & \dot{Q}_{22} & \dot{Q}_{23} \\ \dot{Q}_{31} & \dot{Q}_{32} & \dot{Q}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} 2(z - \hat{y}_1 + Q_{11}C_1 + Q_{12}C_2 + Q_{13}C_3) \\ -C_1(\hat{y}_1 - Q_{11}C_1 - Q_{12}C_2 - Q_{13}C_3) \\ -C_1u \end{pmatrix} - \\ & - \begin{pmatrix} -C_1(\hat{y}_2 - Q_{12}C_1 - Q_{22}C_2 - Q_{23}C_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg] = \\ & = \begin{pmatrix} (\hat{y}_1 - Q_{11}C_1 - Q_{12}C_2 - Q_{13}C_3)(\hat{y}_2 - Q_{12}C_1 - Q_{22}C_2 - Q_{23}C_3) + \\ \quad + u(\hat{y}_3 - Q_{13}C_1 - Q_{23}C_2 - Q_{33}C_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ბოლო განტოლება შეიძლება ამოვხსნათ მწკრივად დაშლის გზით $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ მიმართ. ამასთანავე მიიღება დიფერენციალურ განტოლებათა ორი სისტემა $\hat{\mathbf{y}}_i$ და $\dot{\mathbf{Q}}_j$ -თვის. პირველი მიიღება $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ -ის ჩასმისას ბოლო გამოსახულებაში, ხოლო მეორე – მხოლოდ იმ წევრების გატოლების შედეგად, რომლებიც მრავლდება ერთსა და იმავე C_i , $\forall i$ წევრზე, ამასთან ყველა სხვა წევრი მხედველობაში არ მიიღება. რეალური საწყისი პირობები იქნება

$$x(t_0) = z(t_0);$$

$\mathbf{p}(t_0)$ - ნებისმიერი რაციონალური მიახლოებაა; რაც უფრო ახლოა $\hat{\mathbf{p}}(t_0)$ ჭეშმარიტ \mathbf{p} -სთან, მით უფრო სწრაფად იკრიბება პროცედურა.

$\mathbf{Q}(t_0) = k\mathbf{E}$; ძალიად დიდი k -ს მნიშვნელობის დროს შეიძლება ადგილი ჰქონდეს კრებადობას, ხოლო მისი ძალიან მცირე მნიშვნელობის დროს, კრებადობა შეიძლება იყოს ძალზედ სუსტი. ასე, რომ k მონაცემის სიდიდე შეიძლება მივიღოთ ცდებისა და ცდომილებების მეთოდით, დაწყებული მცირე მნიშვნელობით, რამეთუ არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის მდგრადობის ანალიზი, შეიძლება აღმოჩნდეს საკმაოდ რთული.

8.4. დისკრეტული სისტემების იდენტიფიკაცია ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდის საშუალებით

დისკრეტული სისტემების იდენტიფიკაცია ინვარიანტული ჩადგმის მეთოდის საშუალებით ანალოგიურია უწყვეტი სისტემების იდენტიფიკაციისა. დისკრეტულ შემთხვევაში ეკვივალენტური ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანა (8.16) და (8.17) განტოლებებისათვის იღებს შემდეგ სახეს:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \lambda, \mathbf{u}, k), \quad (8.35)$$

$$\lambda(k+1) = \mathbf{h}(\mathbf{y}, \lambda, \mathbf{u}, k), \quad (8.36)$$

სადაც $kT = t$, $k = 0, \dots, N$ და T - კვანტირების ინტერვალია. სასაზღვრო პირობები კვლავ განისაზღვრება შემდეგი სახით:

$$\lambda(0) = \mathbf{a}, \quad (8.37)$$

$$\lambda(N) = \mathbf{b}. \quad (8.38)$$

უფრო ზოგადი საბოლოო პირობა მიმდინარე N ცვლადისათვის განისაზღვრება ისევე, როგორც (8.20) განტოლებაში:

$$\lambda(N) = \mathbf{C}(N). \quad (8.39)$$

აქედან გამომდინარე

$$\mathbf{y}(N) = \mathbf{F}(\mathbf{C}, N). \quad (8.40)$$

გარდაქმნა ხორციელდება უწყვეტი შემთხვევის მსგავსად, თუ აღვნიშნავთ $t = kT$ და $t_f = NT$. საბოლოოდ მიიღება შეფასების ანალოგიური შედეგები.

ლიტერატურა

1. შანშიაშვილი ბ. სისტემების იდენტიფიკაცია. I ნაწილი. თბილისი, ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2009. (სახელმძღვანელო).
2. შანშიაშვილი ბ., მჭედლიშვილი ნ. სისტემების იდენტიფიკაცია და მოდელირება MATLAB-ის გამოყენებით. თბილისი, ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2013. (დამხმარე სახელმძღვანელო).
3. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Часть I, II, III. М. – Л., 1965, 1966, 1970.
4. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М., Наука, 1979.
5. Гроп П. Методы идентификации систем. М., Мир, 1979.
6. Дейч А. М. Методы идентификации динамических объектов. М., Энергия, 1979.
7. Дорф Р. К., Бишоп Р. Х. Современные системы управления. М., Лаборатория Базовых Знаний. 2004.
8. Карабутов Н. Н. Структурная идентификация систем: анализ информационных структур. М., Либроком, 2009.
9. Остром К. Введение в стохастическую теорию управления. М., Мир, 1973.
10. Райбман Н. С., Чадеев В. М. Построение моделей производства. М., Энергия, 1975.
11. Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л. Идентификация систем управления. М., Наука, 1974.
12. Цыпкин Я. З. Информационная теория идентификации. М., Наука, 1995.
13. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М., Мир, 1975.
14. Háber, R. Keviczky, L. Nonlinear system identification - input-output modeling approach. Vol. 1.: Nonlinear system parameter identification. Vol.2.: Nonlinear system structure identification. Dordrecht, Kluwer, 1999.
15. Kalaba R.E. Control, Identification and Input Optimization. N. Y., Plenum pub. Corp., 1982.
16. Liung L. System Identification: Theory for the User. N. Y., Prentice-Hall, Inc., 1999.

17. Shanshiashvili B.G. On identification of linear multidimensional non-stationary systems. Bulletin of the Georgian Academy of Sciences. 1998, 158, № 9. P. 482-484.
18. Salukvadze Mindia, Shanshiashvili Besarion. Identification of nonlinear Continuous Dynamic Systems with Closed Cycle. International Journal of Information Technology & Decision making. Vol. 12, No. 2, March 2013, pp.179-199.
19. Shanshiashvil B. G. Parameter identification of one class of non-stationary dynamic systems. Proceedings of the X International Conference “System Identification and Control Problems” Sicpro '15 (Moscow, Russia, January 26-29, 2015). Moscow, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, 2015, pp. 887-895.
20. Unbehauen H., Rao G.P. Identification of Continuous Systems. Amsterdam, Elsevier Science Publisher B.V., 1987.