Transactions. Georgian Technical University. AUTOMATED CONTROL SYSTEMS - No 2(7), 2009

„ნახვევის“ ტიპის კრიტერიუმის ფორმირება მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის კერძო ამოცანებში

ნოდარ ნარიმანაშვილი, გვანცა ღვინიაშვილი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანებისთვის დამუშავებულია ,,ნახვევის'' ტიპის ოპტიმალურობის განზოგადებული კრიტერიუმის ფორმირებისათვის აუცილებელი წონითი კოეფიციენტების შერჩევის სხვადასხვა მეთოდები და გამომუშავებულია რეკომენდაციები გადაწყვეტილების მიმღებ პირთათვის.

საკვანძო სიტყვები: მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაცია. წონითი კოეფიციენტები. მინი-მაქსის პრინციპი.

1. შესავალი

მათემატიკური დაპროგრამების მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანების გადასაწყვეტად ფართოდ გამოიყენება მეთოდი, რომელსაც აწონილ ჯამთა მეთოდს უწოდებენ. მიუხედავად იმისა, რომ წონების ზუსტი შეფასება გარკვეულ სირთულეებთანაა დაკავშირებული, როგორც ქვემოთაა ნაჩვენები იგი შეიძლება აღმოჩნდეს საკმაოდ ეფექტური, თუ გადაწყვეტილების მიღებ პირს (გ.მ.პ)–ს გააჩნია გარკვეული ინფორმაცია საოპტიმიზაციო პროცესთან დაკავშირებით [1,3];

2. ძირითადი ნაწილი

ვთქვათ, ოპტიმიზაციის ამოცანაში გვაქვს n კერძო კრიტერიუმი, მაშინ ოპტიმალურობის ცალკეული კრიტერიუმის წონების რაიმე გზით შეფასების შემდეგ, შესაძლებელი ხდება ერთი განზოგადებული სახის კრიტერიუმის ფორმირება, რომელსაც ხშირად ‘‘ნახვევის’’ ტიპის ვექტორულ კრიტერიუმსაც უწოდებენ და იგი ზოგადი სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\min_{x \in D_x} F\left(\vec{w}, \vec{Q}(\vec{x})\right) \tag{1}$$

სადაც, $\vec{w} = \{w_1, \dots, w_n\}$ წარმოადგენს კერძო კრიტერიუმების ფარდობითი მნიშვნელობების მიხედვით განსაზღვრულ წონით კოეფიციენტების ვექტორს, ხოლო $\vec{Q}\left(\vec{x}\right)$- ოპტიმიზაციის ამოცანის კერძო კრიტერიუმთა ვექტორია. (1) ტიპის კრიტერიუმის როლში ძირითადად გამოიყენება შემდეგი სახის ფუნქციები [1,2]:

ა) ადიტიური ანუ ჯამური ტიპის ოპტიმალურობის კრიტერიუმი:

$$F\left(\vec{w}, \vec{Q}(\vec{x})\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i Q_i\left(\vec{x}\right) \tag{2}$$

ბ) მულტიპლიკატური ანუ ნამრავლის ტიპის ოპტიმალურობის კრიტერიუმი:

$$F\left(\vec{w}, \vec{Q}(\vec{x})\right) = \prod_{i=1}^{n} Q_i\left(\vec{x}\right) \tag{3}$$

გ) საშუალო ხარისხოვანი ტიპის განზოგადებული ოპტიმალურობის კრიტერიუმი:

$$F\left(\vec{w},\vec{Q}(\vec{x})\right)=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_iQ_i^p\left(\vec{x}\right)\right]^{1/p} \tag{4}$$

კერძო შემთხვევაში, ტოლფასი კრიტერიუმების არსებობის პირობებში შეუძლებელია პრიორიტეტების დადგენა მნიშვნელობების მიხედვით, ამიტომ ყველა წონითი w_i კოეფიციენტი ერთიდაიგივე მნიშვნელობას ღებულობს:

$$w_i=\frac{1}{n},\ i=\overline{1,n}\,.$$

ქვემოთ გთავაზობთ მეთოდებს, რომლებიც გადაწყვეტილების მიმღებ პირს საშუალებას აძლევს ოპტიმიზაციის კერძო კრიტერიუმების შესახებ გარკვეული ინფორმაციის საფუძველზე, შეაფასოს ადიტიური ტიპის კრიტერიუმის წონითი კოეფიციენტების მნიშვნელობები.

1. მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანის (1) ტიპის თითოეული დადებითი $Q_i\left(\vec{x}\right)>0,\quad i=\overline{1,n}$, კერძო კრიტერიუმისათვის გამოითვლება ფარდობითი გაფანტვის კოეფიციენტი.

$$\delta_i=\frac{Q_i^+-Q_i^-}{Q_i^+}=1-\frac{Q_i^-}{Q_i^+}, \tag{6}$$

სადაც $Q_i^-=\min\limits_{x\in D_x}Q_i\left(\vec{x}\right)$ და $Q_i^+=\max\limits_{x\in D_x}Q_i\left(\vec{x}\right)$, გვიჩვენებენ i- ური კერძო კრიტერიუმის მაქსიმალურ შესაძლო გადახრებს მაშინ, წონითი კოეფიციენტი ყოველი i-ური კრიტერიუმისათვის შეიძლება შეფასდეს გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$w_i=\frac{\delta_i}{\sum_{i=1}^{n}\delta_k},\ \ i=\overline{1,n} \tag{7}$$

მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი: ვთქვათ ოპტიმალურობის კერძო კრიტერიუმები მოცემულია შემდეგი კვადრატული ფორმებით:

$$\left.\begin{array}{c}\min\limits_{x\in D_x}Q_1\left(x\right)=\min\limits_{x\in D_x}4\left(x-2\right)^2+5\\ \min\limits_{x\in D_x}Q_2\left(x\right)=\min\limits_{x\in D_x}\left(x-4\right)^2+1\\ D_x=\left\{x\middle|0\le x\le 5\right\}\end{array}\right\}$$

შევადგინოთ ამ კრიტერიუმებისათვის მნიშვნელობათა ცხრილი სხვადასხვა x- ისთვის:

Q_k \ x	0	1	2	3	4	5
Q_1	21	9	5	9	21	41
Q_2	17	10	5	2	1	2

(2)- ის საფუძველზე ეს სისტემა დაიყვანება შემდეგი სახის ფუნქციის მინიმიზაციამდე:

$$\min_{x \in D_x} F(\vec{Q}) = \min_{x \in D_x} \left\{ w_1 \left[4(x-2)^2 + 5 \right] + w_2 \left[(x-4)^2 + 1 \right] \right\}$$

მოცემული ცხრილის საფუძველზე ვღებულობთ:

$$Q_1^+ = 41, \quad Q_1^- = 5, \; \delta_1 = \frac{36}{41},$$

$$Q_2^+ = 17, \; Q_2^- = 1, \; \delta_2 = \frac{16}{17},$$

ამ შედეგების მიხედვით (7) ფორმულით გამოითვლება წონითი კოეფიციენტები:

$$w_1 = 0.48, \; w_2 = 0.52,$$

რომელთა ჩასმის შემდეგ $F(\vec{Q})$ ფუნქციაში მიიღება განზოგადებული კრიტერიუმის საბოლოო სახე.

2. ვიგულისხმოთ, რომ ყველა $Q_i^- \neq 0$, $i = \overline{1,n}$ და გამოვთვალოთ β_i კოეფიციენტები, რომლებიც გვიჩვენებენ ოპტიმალურობის კერძო კრიტერიუმების გადახრას თავისი უმცირესი მნიშვნელობიდან:

$$\beta_i(\vec{x}) = \frac{Q_i(\vec{x}) - Q_i^-}{Q_i^-} \tag{8}$$

i –ური კრიტერიუმის მნიშვნელობა ფასდება შემდეგი შეზღუდვით: $\beta_i(\vec{x} \leq \varepsilon_i)$, სადაც ε_i-ის მნიშვნელობას ირჩევს გ.მ.პ. იმ პირობით, რომ რაც უფრო მნიშვნელოვანია კრიტერიუმი მით ნაკლებია ε_i.

ვთქვათ, R_i^* იმ სფეროს უდიდესი რადიუსია, რომლის შიგნითაა ყოველი $\vec{x} \in d$ წერტილი, ხოლო ცენტრია $\vec{x}_i^*$, სადაც x_i^*- მინიმუმის წერტილია. ეს პირობები შემდეგი ტოლობებით შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$R_i^* = \max_{x \in Q_x} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_k^* \right)^2 \right\}, \tag{9}$$

$$\beta_i(\vec{x}) = \frac{Q_i(\vec{x}) - Q_i^-}{Q_i^-} \leq \varepsilon_i \tag{10}$$

მივიღეთ, რომ რაც მეტია სფეროს რადიუსი R_i^* (რომელშიც $i-$ ური კრიტერიუმის მინიმალური გადახრა არ აღემატება ε_i-ს მით უფრო მცირე უნდა იყოს წონითი კოეფიციენტი w_i, რომლის შეფასება შეიძლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$w_i = \frac{\frac{1}{R_i^*}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i^*}}, \; i = \overline{1,n} \tag{11}$$

ზემოთ განხილული მაგალითისათვის (8) –ს მიხედვით გვაქვს:

$$\varepsilon_1 = 0.4, \; \varepsilon_1 = 0.6,$$

მაშინ (9), (10), (11) განტოლებების საფუძველზე ვღებულობთ:

$$R_1^* = \max(x-2)^2, \beta_1(\vec{x}) = \frac{4(x-2)^2 + 5 - 5}{5} \leq 0.4, \text{ და } \; (x-2)^2 \leq 0.6$$

$$R_2^* = \max(x-4)^2, \beta_2(\vec{x}) = \frac{(x-4)^2 + 1 - 1}{1} \leq 0.4, \text{ და } \; (x-4)^2 \leq 0.6$$

საბოლოოდ (11) ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ შეფასებებს:

$$w_1 = 0.45\,,\;\; w_2 = 0.55$$

3. წონითი კოეფიციენტების გამოთვლა თამაშთა თეორიის გამოყენებით: n კერძო ოპტიმალურობის კრიტერიუმისათვის $Q_i\left(\vec{x}\right)$. შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$C_{ik} = \left| \frac{Q_k^- - Q_k\left(\vec{x}_i^*\right)}{Q_k^-} \right| \tag{12}$$

C_{ik} სიდიდე გვიჩვენებს k-ური Q_k^- კრიტერიუმის გადახრას მისი მნიშვნელობიდან,რომელიც მიღებული იქნა i-ური $Q_k^-\left(\vec{x}_k^*\right)$ კრიტერიუმებისაგან მისი ოპტიმალურობის პირობებში:

$$Q_k^- = Q_k\left(\vec{x}_k^*\right) = \min\nolimits_{x\in D_x} Q_k\left(\vec{x}\right) \tag{13}$$

$$Q_i^- = Q_i\left(\vec{x}_i^*\right) = \min\nolimits_{x\in D_x} Q_i\left(\vec{x}\right) \tag{14}$$

ცხადია, სრულდება პირობები $C_{ik} = 0$ და $C_{ik} \geq 0$. ავაგოთ C_{ik} კოეფიციენტებისაგან მატრიცა, რომლის სვეტებია ოპტიმალურობის კერძო კრიტერიუმების Q_k^- მნიშვნელობები, ხოლო სტრიქონები ამ კერძო კრიტერიუმის ოპტიმალური $\vec{x}_i^*$ ამონახსნებია:

$$\begin{bmatrix} 0.C_{12}\ldots C_{1i}\ldots C_{1s} \\ C_{21}.0\ldots C_{2i}\ldots C_{2s} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{i1.}C_{i2}\ldots 0\ldots C_{is} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{s1}.C_{s2}\ldots C_{si}\ldots 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ საქმე გვაქვს თამაშთა თეორიის ტიპურ ამოცანასთან, სადაც თამაშში მონაწილეობს ორი პირი და იგი შეიძლება ამოხსნას მინი-მაქსის პრინციპით [4].

პირველი მოთამაშე ირჩევს ერთ-ერთ $\vec{x}_i^*$, ოპტიმალურ ამოხსნას (ეს არის პირველი მოთამაშის წმინდა სტრატეგია), მეორე მოთამაშე კი პირველის არჩევანისაგან დამოუკიდებლად ირჩევს Q_k^- ნებისმიერ კრიტერიუმს (ეს არის მეორე მოთამაშის წმინდა სტრატეგია). იმის გათვალისწინებით, რომ ყველა $C_{ik} \geq 0$, პირველი მოთამაშე მეორეს უხდის C_{ik} ჯარიმას ანუ (15) მატრიცის ყველა ელემენტი პირველი მოთამაშისათვის წამგებიანია, თუ ის ირჩევს $\vec{x}_i^*$,ხოლო მეორე მოთამაშე კი Q_k^-. კრიტერიუმს. პირველი მოთამაშე ცდილობს შეამციროს თავისი დანაკარგები, რომელიც შეიძლება მოსალოდნელი იყოს, Q_k^--ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობისას.

პირველი მოამაშის წმინდა სტრატეგიათა რიცხვი აღვნიშნოთ μ_1-თი, ხოლო მეორე მოთამაშის წმინდა სტრატეგიათა რიცხვი w_i-ით, ამასთან:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1\,, \quad \sum_{k=1}^{n} w_i = 1 \tag{17}$$

მეორე მოთამაშის შერეული სტრატეგიის ამონახსნი შეიძლება მოიძებნოს წრფივი დაპროგრამების შედეგი ამოცანის ამოხსნით:

$$\begin{cases} \min \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k \\ \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\vartheta_k \geq 1, \qquad i=\overline{1,n} \\ \vartheta_k \geq 0, k = \overline{1,n} \end{cases} \tag{18}$$

თუ $\vec{\vartheta}^* = \left(\vartheta_1^*,...\vartheta_n^*\right)$ (18) ამოცანის ამონახსნებია, მაშინ მეორე მოთამაშის შერეული სტრატეგიის მნიშვნელობები გამოისახება შემდეგნაირად:

$$w_i = \frac{\vartheta_i^*}{\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k^*}, \ i=\overline{1,n} \tag{19}$$

მიღებული w_i კოეფიციენტების საფუძველზე მიზნის ფუნქცია საბოლოოდ შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\min_{x\in D_x} F\left(\vec{Q}\right) = \min_{x\in D_x} \sum_{i=1}^{s} w_i \frac{Q_i\left(\vec{x}\right)}{Q_i^-} \tag{20}$$

სადაც არანორმალიზებული $Q_i\left(\vec{x}\right)$ კოეფიციენტები აიწონებიან w_i / Q_i სახის მამრავლებით, კერძოდ თუ $\widetilde{w}_i = w_i / Q_i$, მაშინ წონითი კოეფიციენტების ვექტორი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$w_i^* = \frac{\widetilde{w}_i}{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{w}_k} \tag{21}$$

ეფექტური წერტილი შეიძლება მიღებულ იქნას შემდეგი ამოცანის ამოხსნის საფუძველზე:

$$\min_{x\in D_x} \sum_{i=1}^{n} w_i^* Q_k\left(\vec{x}\right) \tag{22}$$

სადაც w_i^* განისაზღვრება ზემოთ მოყვანილი წესებით. ამასთან $\vec{\vartheta}^* = \left(\vartheta_1^*,...,\vartheta_n^*\right)$- წრფივი დაპროგრამების (18) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნია:

$$Q_k^- = Q_k\left(\vec{x}_k^*\right) = \min_{x\in D_x} Q_k\left(\vec{x}\right), \ k=\overline{1,s} \tag{23}$$

3. დასკვნა

კვადრატული ტიპის კერძო კრიტერიუმების შესახებ გარკვეული ინფორმაციის (მნიშვნელობათა ცხრილის) საფუძველზე გამომუშავებულია რეკომენდაციები წონითი კოეფიციენტების შეფასებების მისაღებად „ნახვევის“ ტიპის განზოგადებული კრიტერიუმის ფორმირების მიზნით.

ლიტერტურა:

1. გუგუშვილი ა., თოფჩიშვილი ა., სალუქვაძე მ., ჭიჭინაძე ვ., ჯიბლაძე ნ. ოპტიმიზაციის მეთოდები. სტუ, თბ., 2002

2. Ногин В.Д., Протодьяконов И.О., Евлатпиев И.И. Основы теории оптимизации. М., высшая школа, 1990

3. Докукин А.В Достоинства и недостатки различных видов свертки критериев в задачах оптимального упровления банком. Математические методы и информационные технологии в экономике, социалогии и оброзоиании Сб.матер.Междунар.науч.тех. конф., Пенза, 2001.стр 15-19

4. გოგიჩაიშვილი გ., შონია ო., ქართველიშვილი ი. ოპერაციათა კვლევა. სტუ, თბ., 1998.

FORMATION CRITERIA OF TYPE OF "CONVOLUTION" FOR PRIVATE TASKS OF VECTOR OPTIMIZATION

Narimanashvili Nodar, Gviniashvili Gvanca
Georgian Technical University

Summary

For implementing the vector tasks of optimization, the methods of formation of the weight coefficients are elaborated for the purpose to establish the Convolution of general criteria type . The special guidelines are prepared for those involved in decision making.

ФОРМИРОВАНИЕ КРИТЕРИИ ТИПА ”СВЕРТКИ” ДЛЯ ЧАСТНЫХ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИЙ

Нариманашвили Н., Гвиниашвили Г.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Для многокритериальных задач оптимизаций, разработанны методы формирования весовых коэффициентов с целью построения обобщонного критерия типа ”свертки”.Вироботаны рекомендации для лиц принимающих решение.