ოპერაციულ აღრიცხვაში რაციონალური გამოსახულების ორიგინალის პოვნის ერთი მეთოდისა და მისი გამოყენების შესახებ

ბორის მასპინძელაშვილი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია ოპერაციულ აღრიცხვაში რაციონალური გამოსახულების ორიგინალის პოვნის ახალი მეთოდი. ამ მეთოდით და ბორელის მეთოდით, შედარების მიზნით, მოძებნილია $\frac{1}{p^2+2p+5}\cdot\frac{1}{p^2+4}$ გამოსახულების ორიგინალი, რითაც ნაჩვენებია შემოთავაზებული მეთოდის უპირატესობა ბორელის მეთოდთან შედარებით. ახალი მეთოდის გამოყენებით ამოხსნილია დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებები.

საკვანძო სიტყვები: ოპერაციულ აღრიცხვა. ბორელის მეთოდი. დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებები.

1. შესავალი

$f(t)$ ნამდვილი t ცვლადის ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა ეწოდება კომპლექსური p ცვლადის $F(p)$ ფუნქციას, რომელიც შემდეგი სახით განისაზღვრება:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt .$$

თუ ეს არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია, მაშინ $F(p)$ -ს ეწოდება $f(t)$ ფუნქციის გამოსახულება, $f(t)$ -ს კი $F(p)$ -ს ორიგინალი.

თუ $F(p)$ გამოსახულების ორიგინალია $f(t)$, ეს სიმბოლურად ასე იწერება $F(p) \mathrel{\bullet\!\!=^{\bullet}} f(t)$; ხოლო, როცა $f(t)$ ორიგინალის გამოსახულებაა $F(p)$, მაშინ იწერება $f(t) \mathrel{\bullet\!\!=^{\bullet}} F(p)$.

განვიხილოთ წესიერი რაციონალური გამოსახულება

$$F(p)=\frac{a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1}+\cdots+a_2p^2+a_1p+a_0}{(p-a_1)^{n_1}\cdots(p-a_k)^{n_k}\left(a_1p^2+b_1p+c_1\right)^{m_1}\cdots\left(a_qp^2+b_qp+c_q\right)^{m_p}}\ , \tag{1}$$

სადაც $b_j^2-4a_jc_j<0$, $j=1,2,\ldots,q$.

2. ძირითადი ნაწილი

(1) გამოსახულების დაშლა $\frac{1}{(p-a)^k}, \frac{1}{(p-(\alpha+\beta i))^n}, \frac{1}{(p-(\alpha-\beta i))^n}$ სახეების გამოსახულებათა ჯამად, სადაც $\alpha+\beta i$ და $\alpha-\beta i$ არის ap^2+bp+c კვადრატული მრავალწევრების ფესვები, ხორციელდება შემდეგნაირად: გამოსახულებას დავშლით შესაკრებებად და გამოვიყენებთ შემდეგი სახის რაციონალური გამოსახულებების დაშლებს:

$$1.\ \frac{1}{(p-(\alpha+\beta i))(p-(\alpha-\beta i))},\qquad 2.\ \frac{p}{(p-(\alpha+\beta i))(p-(\alpha-\beta i))}.$$

1-ის დაშლა. მრიცხველს წარმოვადგენთ მნიშვნელის თანამამრავლების ისეთ კომბინაციად, რომ გაბათილდეს p -ს შემცველი წევრები, და მას დავშლით ორი უმარტივესი წილადის ჯამად, ე.ი.

$$\frac{1}{(p-(\alpha+\beta i))(p-(\alpha-\beta i))}=\frac{p-(\alpha+\beta i)-(p-(\alpha-\beta i))}{-2\beta i(p-(\alpha+\beta i))(p-(\alpha-\beta i))}=$$

$$=\frac{-1}{-2\beta i(p-(\alpha-\beta i))}+\frac{1}{2\beta i(p-(\alpha+\beta i))};$$

2-ის დაშლა. p მრიცხველს წარმოვადგენთ მნიშვნელის თანამამრავლების ისეთ კომბინაციად, რომ გაბათილებული იქნას თავისუფალი წევრები, და მას დავშლით ორი უმარტივესი წილადის ჯამად, ე.ი.

$$\frac{p}{(p-(\alpha+\beta i))(p-(\alpha-\beta i))}=\frac{(\alpha-\beta i)(p-(\alpha+\beta i))-(\alpha+\beta i)(p-(\alpha-\beta i))}{-2\beta i(p-(\alpha+\beta i))(p-(\alpha-\beta i))}=$$
$$=\frac{\alpha-\beta i}{-2\beta i(p-(\alpha-\beta i))}+\frac{\alpha+\beta i}{2\beta i(p-(\alpha+\beta i))}.$$

ზოგ შემთხვევაში შეიძლება საჭირო იყოს $F(p)=\dfrac{p^m}{(ap^2+bp+c)^n}$ სახის რაციონალური გამოსახულების დაშლა, სადაც $m<n$, $b^2-4ac<0$.

$F(p)$ გამოსახულების ორიგინალი რომ ვიპოვოთ, p^m მრიცხველიდან გამოვყოთ p^2 თანამამრავლი და გამოსახულება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$F(p)=\frac{p^{m-2}(ap^2+bp+c-bp-c)}{a(ap^2+bp+c)^n}=$$
$$=\frac{p^{m-2}}{a(ap^2+bp+c)^n}-\frac{bp^{m-1}}{a(ap^2+bp+c)^n}-\frac{cp^{m-2}}{a(ap^2+bp+c)^n}.$$

იმ შესაკრებთათვის, რომელთა მრიცხველშიც p -ს ხარისხი ≥ 2 -ზე, ჩავატაროთ ანალოგიური გარდაქმნა, სანამ $F(p)$ გამოსახულება არ წარმოიდგინება $\dfrac{1}{(ap^2+bp+c)^n}$ და $\dfrac{p}{(ap^2+bp+c)^n}$, $n=1,2,\ldots,n_1$, სახეების გამოსახულებათა ჯამად, ე.ი. m და n -ის მოცემული მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ:

$$\frac{p^m}{(ap^2+bp+c)^n}=\frac{a_1}{ap^2+bp+c}+\cdots+\frac{a_{n_1}}{(ap^2+bp+c)^{n_1}}+$$
$$+\frac{b_1 p}{ap^2+bp+c}+\cdots+\frac{b_{n_1} p}{(ap^2+bp+c)^{n_1}}.$$

ამის შემდეგ უნდა დავშალოთ

$$\frac{1}{(ap^2+bp+c)^n} \text{ და } \frac{p}{(ap^2+bp+c)^n},\quad n=1,2,\ldots,n_1,$$

გამოსახულებები $\dfrac{1}{(p-(\alpha+\beta i))^k}$ და $\dfrac{1}{(p-(\alpha-\beta i))^k}$ სახეების უმარტივეს გამოსახულებათა ჯამად წინ მოყვანილი 1 და 2 დაშლების მსგავსად, ე.ი.

$$\frac{1}{(ap^2+bp+c)^n}=\left(\frac{-1}{2a\beta i(p-(\alpha-\beta i))}+\frac{1}{2a\beta i(p-(\alpha+\beta i))}\right)^n,$$
$$\frac{p}{(ap^2+bp+c)^n}=p\left(\frac{-1}{2a\beta i(p-(\alpha-\beta i))}+\frac{1}{2a\beta i(p-(\alpha+\beta i))}\right)^n;$$

უკანასკნელში საჭიროა $\dfrac{p}{(p-(\alpha\pm\beta i))^n}$ სახეების გამოსახულებების დაშლა, ე.ი.

$$\frac{p}{(p-(\alpha\pm\beta i))^n}=\frac{p-(\alpha\pm\beta i)+\alpha\pm\beta i}{(p-(\alpha\pm\beta i))^n}=\frac{1}{(p-(\alpha\pm\beta i))^{n-1}}+\frac{\alpha\pm\beta i}{(p-(\alpha\pm\beta i))^n}.$$

$F(p)$ გამოსახულების მიღებულ დაშლაში თითოეულ უმარტივეს გამოსახულებას შევცვლით თავისი ორიგინალით,

$$\frac{1}{(p-a)^{k+1}} \bullet\!\!=\!\!\bullet \frac{t^k}{k!}e^{at}, \tag{1}$$

გამოვიყენებთ ეილერის ფორმულებს $\frac{e^{\beta ti}+e^{-\beta ti}}{2}=\cos\beta t$, $\frac{e^{\beta ti}-e^{-\beta ti}}{2i}=\sin\beta t$ და მარტივი გარდაქმნებით ვიპოვით $F(p)$ გამოსახულების ორიგინალს.

3. ახალი მეთოდის და ბორელის მეთოდის შედარება

ვიპოვოთ რაციონალური გამოსახულების ორიგინალი ახალი მეთოდით და არსებულით.

მაგალითი. $F(p)=\frac{1}{(p^2+2p+5)(p^2+4)}$.

ორიგინალის პოვნა ახალი მეთოდით.

$$F(p)=\frac{p^2+2p+5-(p^2+4)}{(2p+1)(p^2+2p+5)(p^2+4)}=\frac{1}{(2p+1)(p^2+4)}-\frac{1}{(2p+1)(p^2+2p+5)};$$

$$\frac{1}{(2p+1)(p^2+4)}=\frac{4p^2-1-4(p^2+4)}{-17(2p+1)(p^2+4)}=\frac{2p-1}{-17(p^2+4)}+\frac{4}{17(2p+1)};$$

$$\frac{-1}{(2p+1)(p^2+2p+5)}=\frac{-1}{(2p+1)((p+1)^2+4)}=\begin{bmatrix} p+1=x, \\ p=x-1 \end{bmatrix}=\frac{-1}{(2x-1)(x^2+4)}=$$

$$=\frac{4x^2-1-4(x^2+4)}{17(2x-1)(x^2+4)}=\frac{2x+1}{17(x^2+4)}-\frac{4}{17(2x-1)}=\frac{2p+3}{17((p+1)^2+4)}-\frac{4}{17(2p+1)};$$

$$F(p)=\frac{2p-1}{-17(p^2+4)}+\frac{2p+3}{17((p+1)^2+4)};$$

$$\frac{2p-1}{-17(p^2+4)}=\frac{2p}{-17(p+2i)(p-2i)}+\frac{1}{17(p+2i)(p-2i)}=$$

$$=\frac{p+2i+p-2i}{-17(p+2i)(p-2i)}+\frac{p+2i-(p-2i)}{68i(p+2i)(p-2i)}=$$

$$=\frac{-1}{17(p-2i)}-\frac{1}{17(p+2i)}+\frac{1}{68i(p-2i)}-\frac{1}{68i(p+2i)};$$

$$\frac{2p+3}{17((p+1)^2+4)}=\frac{2p}{17(p-(-1-2i))(p-(-1+2i))}+\frac{3}{17(p-(-1-2i))(p-(-1+2i))}=$$

$$=\frac{(-1+2i)(p-(-1-2i))-(-1-2i)(p-(-1+2i))}{34i(p-(-1-2i))(p-(-1+2i))}+\frac{3(p-(-1-2i))-(p-(-1+2i))}{68i(p-(-1-2i))(p-(-1+2i))}=$$

$$=\frac{-1+2i}{34i(p-(-1+2i))}+\frac{1+2i}{34i(p-(-1-2i))}+\frac{3}{68i(p-(-1+2i))}-\frac{3}{68i(p-(-1-2i))}=$$

$$=\frac{1+4i}{68i(p-(-1+2i))}+\frac{-1+4i}{68i(p-(-1-2i))}.$$

(1) ოპერაციული თანაფარდობით და ეილერის ფორმულებით

$$\frac{2p-1}{-17(p^2+4)} \bullet\!\!=\!\!\bullet \frac{-1}{17}e^{2ti}-\frac{1}{17}e^{-2ti}+\frac{1}{68i}e^{2ti}-\frac{1}{68i}e^{-2ti}=$$

$$=\frac{-2}{17}\,\frac{e^{2ti}+e^{-2ti}}{2}+\frac{1}{34}\,\frac{e^{2ti}-e^{-2ti}}{2i}=\frac{-2}{17}\cos 2t+\frac{1}{34}\sin 2t;$$

$$\frac{2p+3}{17((p+1)^2+4)} \;\bullet\!\!=^{\bullet}\; \frac{1+4i}{68i}e^{(-1+2i)t}+\frac{-1+4i}{68i}e^{(-1-2i)t}=e^{-t}\left(\frac{e^{2ti}-e^{-2ti}}{68i}+\frac{e^{2ti}+e^{-2ti}}{17}\right)=$$

$$=\frac{e^{-t}}{34}\sin 2t+\frac{2e^{-t}}{17}\cos 2t;$$

$$F(p) \;\bullet\!\!=^{\bullet}\; \frac{-2}{17}\cos 2t+\frac{1}{34}\sin 2t+\frac{e^{-t}}{34}\sin 2t+\frac{2e^{-t}}{17}\cos 2t.$$

4. ორიგინალის პოვნა ბორელის თეორემის გამოყენებით

განსაზღვრება. $f_1(t)$ და $f_2(t)$ ორიგინალების ნახვევი ეწოდება ფუნქციას, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი სახის ინტეგრალით

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau \qquad \text{ან} \qquad \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau.$$

ნახვევი აღინიშნება სიმბოლოთი $f_1(t)*f_2(t)$, ან $f_2(t)*f_1(t)$.

ბორელის თეორემა. თუ $F_1(p) \;\bullet\!\!=^{\bullet}\; f_1(t)$ და $F_2(p) \;\bullet\!\!=^{\bullet}\; f_2(t)$, მაშინ

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \;\bullet\!\!=^{\bullet}\; f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau.$$

მაგალითი. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+2p+5}\cdot\dfrac{1}{p^2+4}$.

$$\frac{1}{p^2+2p+5}=\frac{1}{(p+1)^2+4} \;\bullet\!\!=^{\bullet}\; \left[\frac{b}{(p-a)^2+b^2} \;\bullet\!\!=^{\bullet}\; e^{at}\sin bt\right] \;\bullet\!\!=^{\bullet}\; \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t;$$

$$\frac{1}{p^2+4} \;\bullet\!\!=^{\bullet}\; \frac{1}{2}\sin 2t;$$

$$\frac{1}{p^2+2p+5}\cdot\frac{1}{p^2+4} \;\bullet\!\!=^{\bullet}\; \frac{1}{4}e^{-t}\sin 2t*\sin 2t=\frac{1}{4}\int_0^t e^{-\tau}\sin 2\tau\sin 2(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^t e^{-\tau}(\cos(4\tau-2t)-\cos 2t)\,d\tau=\frac{1}{8}\int_0^t e^{-\tau}\cos(4\tau-2t)\,d\tau-\frac{1}{8}\int_0^t e^{-\tau}\cos 2t\,d\tau;$$

$$I_1=\frac{1}{8}\int_0^t e^{-\tau}\cos(4\tau-2t)\,d\tau=\left[\begin{array}{c} u=e^{-\tau},\quad du=-e^{-\tau}\,d\tau, \\ dv=\cos(4\tau-2t)d\tau,\quad v=\frac{1}{4}\sin(4\tau-2t)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{32}e^{-\tau}\sin(4\tau-2t)\Big|_0^t+\frac{1}{32}\int_0^t e^{-\tau}\sin(4\tau-2t)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{32}e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 2t+\frac{1}{32}\int_0^t e^{-\tau}\sin(4\tau-2t)\,d\tau=$$

$$=\left[\begin{array}{c} u=e^{-\tau},\quad du=-e^{-\tau}\,d\tau, \\ dv=\sin(4\tau-2t)d\tau,\quad v=\frac{-1}{4}\cos(4\tau-2t)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{32}e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 2t-\frac{1}{128}e^{-\tau}\cos(4\tau-2t)\Big|_0^t-\frac{1}{128}\int_0^t e^{-\tau}\cos(4\tau-2t)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{32}e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 2t-\frac{1}{128}e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{128}\cos 2t-\frac{1}{128}\int_0^t e^{-\tau}\cos(4\tau-2t)\,d\tau;$$

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{128}\right)\int_0^t e^{-\tau}\cos(4\tau-2t)\,d\tau=\frac{1}{32}e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 2t-\frac{1}{128}e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{128}\cos 2t\,;$$

$$I_1=\frac{1}{34}e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{34}\sin 2t-\frac{1}{136}e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{136}\cos 2t\,;$$

$$I_2=-\frac{1}{8}\int_0^t e^{-\tau}\cos 2t\,d\tau=\frac{\cos 2t}{8}e^{-\tau}\Big|_0^t=\frac{\cos 2t}{8}e^{-t}-\frac{\cos 2t}{8}\,;$$

$$F(p)\;\bullet\!\!=\!\!\bullet\;\frac{1}{34}e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{34}\sin 2t+\frac{2}{17}e^{-t}\cos 2t-\frac{2}{17}\cos 2t\,.$$

შემოთავაზებული მეთოდი შეიძლება გამოყენებულ იქნას: დიფერენციალური განტოლებების და განტოლებათა სისტემების, ინტეგრალური და ინტეგრალურ-დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნისას.

მაგალითი. ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს

$$y''-8y'+16y=\frac{1}{\cos 2t+e^{4t}}\,,\qquad y(0)=0,\qquad y'(0)=0.$$

ამოხსნა. ვთქვათ განტოლების $y(t)$ ამონახსნი არის ორიგინალი, რომლის გამოსახულებაა $Y(p)$, ე.ი. $y(t)\;\bullet\!\!=\!\!\bullet\;Y(p)$. ორიგინალის წარმოებულისა და საწყისი პირობების გათვალისწინებით გვექნება

$$y'(y)\;\bullet\!\!=\!\!\bullet\;pY(p)-y(0)=pY(p),$$
$$y''(t)\;\bullet\!\!=\!\!\bullet\;p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p).$$

ვიპოვოთ მარჯვენა მხარის გამოსახულება

$$\frac{1}{\cos 2t+e^{4t}}=\frac{1}{\dfrac{e^{2ti}+e^{-2ti}}{2}+e^{4t}}\;\bullet\!\!=\!\!\bullet\;\left[\begin{array}{c}\dfrac{t^k}{k!}e^{at}\;\bullet\!\!=\!\!\bullet\;\dfrac{1}{(p-a)^{k+1}}\\ k=0,1,\ldots,k_1\end{array}\right]\bullet\!\!=\!\!\bullet\;\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-2i}+\dfrac{1}{p+2i}\right)+\dfrac{1}{p-4}}=$$

$$=\frac{1}{\dfrac{p}{p^2+4}+\dfrac{1}{p-4}}=\frac{(p^2+4)(p-4)}{p^2-4p+4}\,;$$

ოპერატორული განტოლებაა

$$p^2Y(p)-8pY(p)+16Y(p)=\frac{(p^2+4)(p-4)}{2(p^2-2p+2)}\,,$$

აქედან $Y(p)=\dfrac{p^2+4}{2(p^2-2p+2)(p-4)}$; ვიპოვოთ მისი ორიგინალი:

$$\frac{p^2-2p+2+2p+2}{2(p^2-2p+2)(p-4)}=\frac{1}{2(p-4)}+\frac{p-4+5}{(p^2-2p+2)(p-4)}=$$
$$=\frac{1}{2(p-4)}+\frac{1}{p^2-2p+2}+\frac{5}{(p^2-2p+2)(p-4)}\,;$$

$$\frac{1}{(p-1)^2+1}+\frac{5}{((p-1)^2+1)(p-4)}=\left[\begin{array}{l}p-1=x,\\ p=x+1\end{array}\right]=$$
$$=\frac{1}{x^2+1}+\frac{5}{(x^2+1)(x-3)}=\frac{x^2+1-(x^2-9)}{2(x^2+1)(x-3)}=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2(x-3)}-\frac{x+3}{2(x^2+1)}=$$
$$=\frac{-(x+i-(x-i))}{4i(x+i)(x-i)}-\frac{x+i+x-i}{4(x+i)(x-i)}+\frac{1}{2(x-3)}=$$

$$= \frac{-1}{4i(x-i)} + \frac{1}{4i(x+i)} - \frac{1}{4(x-i)} - \frac{1}{4(x+i)} + \frac{1}{2(x-3)} =$$

$$= \frac{1+i}{4i(p-(1+i))} + \frac{1-i}{4i(p-(1-i))} + \frac{1}{2(p-4)};$$

(1) თანაფარდობის თანახმად

$$Y(p) \;{}_{\bullet}\!\!=^{\bullet}\; e^{4t} - \frac{1+i}{4i}e^{(1+i)t} + \frac{1-i}{4i}e^{(1-i)t} = e^{4t} + e^{t}\left(\left(\frac{1}{4i} - \frac{1}{4}\right)e^{-it} - \left(\frac{1}{4i} + \frac{1}{4}\right)e^{it}\right) =$$

$$= e^{4t} + e^{t}\left(\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t\right) = y(t).$$

5. დასკვნა

შემოთავეზებულია ოპერაციულ აღრიცხვაში რაციონალური გამოსახულების ორიგინალის პოვნის ახალი მეთოდი. ამ მეთოდის შეფასების მიზნით იგი შედარებულია ბორელის მეთოდთან. შედარებისას მოძებნილ იქნა $\dfrac{1}{p^2+2p+5}\cdot\dfrac{1}{p^2+4}$ გამოსახულების ორიგინალი, რითაც ნაჩვენებია შემოთავაზებული მეთოდის უპირატესობა ბორელის მეთოდთან.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ ОРИГИНАЛА РАЦИОНАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ В ОПЕРАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Маспиндзелашвили Б.И.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассмотрен новый метод нахождения оригинала рационального выражения в операционном исчислении. Этим методом и методом Бореля, с целью сравнения, найден оригинал выражения $\dfrac{1}{p^2+2p+5}\cdot\dfrac{1}{p^2+4}$ и показано превосходство предлагаемого метода по сравнению с методом бореля. С помощью нового метода решены дифференциальные и интегральные уравнения.

ABOUT METHOD OF FINDING ORIGINAL OF RATIONAL EXPRESSION IN OPERATIONAL CALCULS AND ITS APPLICATION

Maspindzelashvili Boris
Georgian Technical University

Summary

The new method for finding original of rational expression in operational calculus is being considered in the article. Using this and Borel methods, in order to compare, it is found the original of the expression $\dfrac{1}{p^2+2p+5}\cdot\dfrac{1}{p^2+4}$ and it is shown the advantage of the offered method in comparison with Borel method. Whilst applying the new method the differential and integral equations are solved.