

**საინჟინრო გეომეტრიის გრაფიკული ამოცანები და მათი
გადაწყვეტა კომპიუტერის გამოყენებით**

ანზორ შავგულიძე, გიორგი შენგელია, ზურაბ კვინიკაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

საინჟინრო გეომეტრიის გრაფიკული ამოცანების ერთ-ერთი აქტუალური თემაა მათი ამოხსნის გამარტივება ანუ გრაფიკული მოქმედებების მოცულობის შემცირება. გარდა ამისა სადღეისოდ ერთობ მნიშვნელოვანია ამ ამოცანის გადაწყვეტაში ძველი და რუტინული საშუალებების (სახაზავი, ფარგალი და ა.შ.) გამოყენებაზე უარის თქმა და ამ საქმეში კომპიუტერული საშუალებების ჩართვა. ბოლო მოსაზრება პრაქტიკაში წარმატებით არის რეალიზებული და ამის მაგალითად შეიძლება დავასახელოთ ავტომატიზებული დაპროექტების მძლავრი სისტემა AutoCAD. ცნობილია, რომ AutoCAD-ის ერთი ბრძანება ერთდროულად რამდენიმე გრაფიკულ მოქმედებას აერთიანებს და აგების ამოცანა მოცემულისა და შედეგის დაფიქსირებას ითვალისწინებს. ჩვენი მიზანი კი სწორედ მოცემულობასა და შედეგს შორის არსებული პროცესის აღდგენასა და, შესაბამისად, ყოველი მოქმედების გააზრებულად შესრულებაში მდგომარეობს. რასაკვირველია, ვითვალისწინებთ AutoCAD-ის პროგრამული უზრუნველყოფის შესაძლებლობებს, მაგრამ მიგვაჩნია, რომ ინტეგრირებულ მოქმედებათა დიფერენცირება, ამოცანის შინაარსში შიგნითადაც, აუცილებელი პირობაა და მისი უგულვებელყოფა დაუშვებელია.

საკვანძო სიტყვები: ველი. აფინური შესაბამისობა. პერსპექტიულ-აფინური. ინტუიციური ალგორითმი.

1. შესავალი

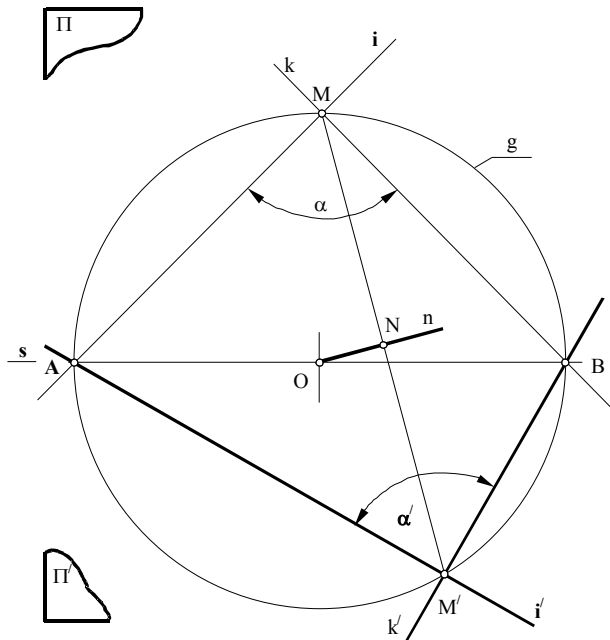
ნაშრომში გამოყენებულია ე.წ. ინტუიციური ალგორითმის ცნება. კონკრეტული ამოცანისთვის შედგენილია, როგორც სიმბოლური ასევე მანქანური ალგორითმი. ყოველი მოქმედების სიმბოლურ ჩანაწერს მისადაგებული აქვს „Auto CAD“-ის შესაბამისი ბრძანება და ჩვენი აზრით რამდენადმე მიღწეულია მექანიკური აზროვნების გადაყვანა შემოქმედებით აზროვნებაში. საქმე ისაა, რომ ჩვენს შემთხვევაში ამოცანის მოცემულობიდან შედეგამდე განვიღო გზაზე პასუხგაუცემელი „რატომ“? არ გვხვდება.

ნაშრომში განხილული ამოცანები: 1) მოცემულია წრეწირი, შესაბამისობის ღერძი და შესაბამისი წერტილების წყვილი. ავგოთ მოცემული წრეწირის აფინურად შესაბამისი ფიგურა – ელიფსი; 2) მოცემულია ელიფსის ღერძები და წრფე. ავგოთ ელიფსისა და წრფის თანაკვეთის წერტილები ელიფსის აუგებლად.

გარდა იმისა, რომ ჩვენს ნაშრომში წარმოვადგინეთ მოცემული ამოცანების შესაფერი ინტუიციური და მანქანური ალგორითმები, მასალაში უკეთ გარკვევის მიზნით, შემოვიტანეთ დასმული ამოცანების გრაფიკული ინტერპრეტაციის ჩვენეული ხედვები.

2. ძირითადი ნაწილი

დავუშვათ, რომ Π ველის კუთვნილი k და l გადაკვეთილ წრფეთა წყვილი აფინურად შეესაბამება Π' ბრტყელი ველის კუთვნილ k' და l' გადაკვეთილ წრფეთა წყვილს. აფინურ შესაბამისობაში მყოფ წრფეთა წყვილებს შორის მდებარე კუთხეთა ურთიერთდამოკიდებულება, აფინური შესაბამისობის ინვარიანტულ თვისებებში არ შედის. სახელდობრ, თუ ერთი კუთხე მართია, მეორე ნებისმიერი შეიძლება იყოს, მაგრამ არსებობს გამონაკლისიც, როცა ერთი ბრტყელი ველის კუთვნილ ურთიერთპერპენდიკულარულ გადაკვეთილ წრფეთა წყვილს მეორე ველის აგრეთვე ურთიერთპერპენდიკულარული გადაკვეთილ წრფეთა წყვილი შეესაბამება. გამონაკლისი ნაჩვენებია 1-ელ ნახაზზე.



ნახ.1

წარმოვიდგინოთ, რომ ნახაზზე დაფიქსირებულია მხოლოდ ამოცანის ამოსავალი მონაცემები: შესაბამისობის s ღერძი და შესაბამისობაში მყოფი წერტილების M და M' წყვილი. როგორც უკვე ვიცით, ამ მონაცემებით სრულიად განსაზღვრულია ორი ბრტყელი ველის პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობა. M შევეერთოთ M' -თან და გავავლოთ $[MM']$ -ის შუაპერპენდიკულარი (n). დავნიშნოთ $O = n \cap s$ წერტილი და მისგან, როგორც ცენტრიდან $R = [OM] = [OM']$ რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი (g). დავნიშნოთ ამ უკანასკნელის შესაბამისობის s ღერძთან თანაკვეთის A და B

წერტილები. $\angle AMB$, როგორც დიამეტრზე დაყრდნობილი, იქნება მართი. ამავე მიზეზით $AM'B$ კუთხეც იქნება მართი, ხოლო $l(AM) \perp k(BM)$ და $l'(AM') \perp k'(BM')$ წრფეები – ამოცანის პასუხი. შევნიშნოთ, რომ განხილულ შემთხვევაში, ამოცანას ერთადერთი პასუხი გააჩნია, მაგრამ არსებობს გამონაკლისებიც, რომლებზედაც სტატიის მოცულობის რეგლამენტის გამო არ შეგჩერდებით.

1-ელ ნახაზზე ნაჩვენებ მოქმედებათა ინტუიციური ალგორითმი

- | | |
|---|--|
| 1. $m(M', r = M'M)$. | ავაგოთ $m(M', r = M'M)$ წრეწირი. |
| 2. $m(M, r = MM')$. | ავაგოთ $m(M, r = MM')$ წრეწირი. |
| 3. $K = m \cap m'$.
$F = m \cap m'$. | განვსაზღვროთ m და m' წრეწირების თანაკვეთის K და F წერტილები. |
| 4. $n(KF) \perp (MM')$ | ავაგოთ MM' -ის მართობული $n(KF)$ წრფე. |
| 5. $N = (KF) \cap (MM')$,
$O = (KF) \cap s$. | განვსაზღვროთ KF წრფის MM' წრფესა და s ღერძთან. |
| 6. $g(O, r = OM = OM')$. | ავაგოთ $g(O, r = OM = OM')$ წრეწირი. |

- 7. $A = g \cap s, B = g \cap s.$ განვსაზღვროთ g წრეწირისა და s ღერძის გადაკვეთის A და B წერტილები.
- 8. $k(MA) \perp l(MB).$ ავაგოთ k და l ურთიერთმართობული წრფეები.
- 9. $k'(M'A) \perp l'(M'B).$ ავაგოთ k' და l' ურთიერთმართობული წრფეები.
 $\angle AMB = \angle AM'B = 90^0$

ზემოთ მოყვანილი ინტუიციური ალგორითმის საფუძველზე შედგენილია პროგრამა, Auto CAD- ის ბაზური პრიმიტივების გამოყენებით;

- 1. $m(M', r = |M'M|).$ Tools – Drafting settings – Object snap ფანჯარაში CavrToT Midpoint და Perpendicular რეჟიმები.
- 2. $m(M, r = |MM'|).$ Line
- 3. $K=m \cap m'.$ point: MM' მონაკვეთის შუა წერტილიდან აღმართოთ მართობი s ღერძის გადაკვეთამდე და აღენიშნოთ გადაკვეთის O წერტილი;
- 4. $n(KF) \perp (MM')$
- 5. $N=(KF) \cap (MM'),$
 $O=(KF) \cap s.$

Circle

- 6. $g(O, r = |OM|=|OM'|).$ circle specify center point: მიუთითოთ ცენტრად O წერტილი.
- 7. $A = g \cap s, B = g \cap s.$ specify radius of circle or $< >$: კურსორით მიუთითოთ $|OM|$ – რადიუსი და აღენიშნოთ A და B წერტილები.

Line

- 8. $k(MA) \perp l(MB).$ specify first point: $M;$
Specify next point or [Undo]: $A;$
- 9. $k'(M'A) \perp l'(M'B).$ Specify next point or [Undo]: $M';$
Specify next point or [Undo]: $B;$
Speciy next point or [Undo]: $A';$

განვიხილოთ მეორე მაგალითი: მოცემულია ელიფსის $[A_1B_1]$ და $[C_1D_1]$ ღერძები და l_1 წრფე. ავაგოთ ელიფსის და l_1 წრფის გადაკვეთის წერტილები ელიფსის აუგებლად (ნახ.2).

ელიფსი წრეწირის აფინური წირია, მაშასადამე, წრეწირი ნათესაობით ელიფსზე აისახება, და შებრუნებით, ელიფსიც შეიძლება წრეწირზე აისახოს. წრეწირის დიამეტრებს ელიფსის დიამეტრები შეესაბამება. ცხადია, რომ საერთოდ, წრეწირის დიამეტრების ურთიერთპერპენდიკულარული წყვილის შესაბამისი ელიფსის დიამეტრები ურთიერთპერპენდიკულარული არ არის, მაგრამ არსებობს წრეწირის დიამეტრების პერპენდიკულარული წყვილი, რომელსაც ელიფსის დიამეტრების ასეთივე წყვილი (ე. ი. ელიფსის ღერძები) შეესაბამება.

განვსაზღვროთ ნათესაური შესაბამისობა, სადაც მოცემული ელიფსის $[A_1B_1]$ და $[C_1D_1]$ ღერძები ორ კონგრუენტულ და მართობულ მონაკვეთებზე აისახება (ნახ.2).

ნათესაობის s ღერძი (A_1C_1) წრფის პარალელურად გავატაროთ. (A_1B_1) და (C_1D_1) წრფეების s ღერძთან გადაკვეთის Q და R წერტილები ისეთი წრეწირის დიამეტრის ბოლოებია, რომლებიც ელიფსის O_1 ცენტრზე გაივლიან. ამ წრეწირში ტოლფერდა მარ-თკუთხა QO_2R სამკუთხედი ჩავხაზოთ. O_1 და O_2 მონათესავე წერტილებად ჩავთვალოთ. ეს ორი წერტილი, s ღერძთან ერთად, ისეთ ნათესაურ შესაბამისობას განსაზღვრავს, სადაც პერპენდიკულარულ (O_1Q)

- | | | |
|-----|---|---|
| 19. | $u (A_2 C_2);$ | A_2 და C_2 წერტილებზე გავატაროთ u წრფე; |
| 20. | $\omega (O_2, r_4 = O_2 A_2);$ | ავაგოთ ω წრეწირი; |
| 21. | $(I_1 I_2) \parallel t(O_1 O_2);$ | გავატაროთ t წრფის პარალელური $(I_1 I_2)$ წრფე; |
| 22. | $I_2 = (I_1 I_2) \cap (R_2 O_2);$ | განვსაზღვროთ $(I_1 I_2)$ და $(R_2 O_2)$ წრფეების თანაკვეთის I_2 წერტილი; |
| 23. | $(2_1 2_2) \parallel t(O_1 O_2);$ | გავატაროთ t წრფის პარალელური $(2_1 2_2)$ წრფე; |
| 24. | $2_2 = (2_1 2_2) \cap (R_2 O_2);$ | განვსაზღვროთ $(2_1 2_2)$ და $(R_2 O_2)$ წრფეების თანაკვეთის 2_2 წერტილი; |
| 25. | $l_2 (I_2 2_2);$ | I_2 და 2_2 წერტილებზე გავატაროთ l_2 წრფე; |
| 26. | $E_2 = l_2 \cap \omega, F_2 = l_2 \cap \omega;$ | განვსაზღვროთ l_2 წრფისა და ω წრეწირის თანაკვეთის E_2 და F_2 წერტილები; |
| 27. | $E_2 \in (E_2 E_1) \parallel t(O_1 O_2);$ | E_2 -ზე გავატაროთ t წრფის პარალელური $(E_2 E_1)$ წრფე; |
| 28. | $E_1 = (E_1 E_2) \cap l_1;$ | განვსაზღვროთ $(E_1 E_2)$ და l_1 წრფეების თანაკვეთის E_1 წერტილი; |
| 29. | $F_2 \in (F_2 F_1) \parallel t(O_1 O_2);$ | E_2 -ზე გავატაროთ t წრფის პარალელური $(E_2 E_1)$ წრფე; |
| 30. | $F_1 = (F_1 F_2) \cap l_1;$ | განვსაზღვროთ $(F_1 F_2)$ და l_1 წრფეების თანაკვეთის F_1 წერტილი; |

ზემოთ მოყვანილი ინტუიციური ალგორითმის საფუძველზე შედგენილია პროგრამა, AutoCAD-ის ბაზური პრიმიტივების გამოყენებით:

- | | | |
|-----|--|--|
| 1. | $a (A_1 C_1)$ | Line
specify first point: A_1 ;
Specify next point or [Undo]: $C_1 + \text{Enter}$; |
| 2. | $s \parallel (A_1 C_1)$ | Line
specify first point: ვირჩევთ $A_1 C_1$ წრფიდან ნებისმიერ მანძილზე დაშორებულ წერტილს;
Shift + მუსის მარჯვენა კნობი. პანელზე ავირჩიოთ Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ $A_1 C_1$ წრფესთან (რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და გავატაროთ s ღერძი; |
| 3. | $Q = (A_1 B_1) \cap s;$ | $A_1 B_1$ მონაკვეთი დავაგრძელოთ s ღერძთან გადაკვეთამდე; |
| 4. | $R = (C_1 D_1) \cap s;$ | $C_1 D_1$ მონაკვეთი დავაგრძელოთ s ღერძთან გადაკვეთამდე; |
| 5. | $m (Q, r = QR),$ | Tools – Drafting settings – Object snap ფანჯარაში ჩავრთოთ Midpoint. |
| 6. | $n (R, r = RQ);$ | Draw - Circle |
| 7. | $K = m \cap n, T = m \cap n;$ | circle specify center point: მივეუთითოთ ცენტრად QR მონაკვეთის შუა G წერტილი. |
| 8. | $b (K_1 T_1)$ | |
| 9. | $G = b(K_1 T_1) \cap s;$
$c (G, r_3 = GQ);$ | specify radius of circle or <>: კურსორით მივეუთითოთ $ GQ $ -რადიუსი. |
| 10. | $G \in d \perp s;$ | მდგომარეობის სტრიქონში ჩავრთოთ ortho რეჟიმი; |
| 11. | $O_2 = d \cap c;$ | Line
specify first point: G . გავაგრძელოთ ეს მონაკვეთი c წრეწირის გადაკვეთამდე და აღვნიშნოთ O_2 წერტილი; |
| 12. | $e (QO_2);$ | Line
specify first point: Q ;
Specify next point or [Undo]: O_2 ; |
| 13. | $g (RO_2);$ | Line
specify first point: R ;
Specify next point or [Undo]: O_2 ; |
| 14. | $t (O_1 O_2);$ | Line
specify first point: O_1 ;
Specify next point or [Undo]: O_2 ; |
| 15. | $A_1 \in (A_1 A_2) \parallel t (O_1$ | Line |
| 16. | $O_2);$
$A_2 = (A_1 A_2) \cap e (Q O_2);$ | specify first point: A_1 ;
Shift+ მუსის მარჯვენა კნობი. პანელზე ავირჩიოთ Parallel ბრძანება. |

- კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან (რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და კურსორი გადავადგილოთ e წრფესთან A_2 წერტილში გადაკვეთამდე;
17. $C_1 \in (C_1 C_2) \parallel t (O_1$ Line
 18. $O_2)$; specify first point: C_1 ;
 $C_2 = (C_1 C_2) \cap g (R O_2)$; Shift+ მუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ Parallel ბრძანება.
 კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან (რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და კურსორი გადავადგილოთ g წრფესთან C_2 წერტილში გადაკვეთამდე;
19. $u (A_2 C_2)$; Line
 specify first point: A_2 ;
 Specify next point or [Undo]: $C_2 + \text{Enter}$;
20. $\omega (O_2, r_4 = |O_2 A_2|)$; Circle
 circle specify center point: მივუთითოთ ცენტრად O_2 წერტილი.
 specify radius of circle or კურსორით მივუთითოთ $|O_2 A_2|$ -რადიუსი.
21. $(I_1 I_2) \parallel t (O_1 O_2)$; Line
 22. $I_2 = (I_1 I_2) \cap (R O_2)$; specify first point: I_1 ;
 Shift + მუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ Parallel ბრძანება.
 კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან (რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და კურსორი გადავადგილოთ $R O_2$ წრფესთან I_2 წერტილში გადაკვეთამდე;
23. $(2_1 2_2) \parallel t (O_1 O_2)$; Line
 24. $2_2 = (2_1 2_2) \cap (Q O_2)$; specify first point: 2_1 ;
 Shift + მუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ Parallel ბრძანება.
 კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან (რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და კურსორი გადავადგილოთ $Q O_2$ წრფესთან 2_2 წერტილში გადაკვეთამდე;
25. $l_2 (1_2 2_2)$; Line
 26. $E_2 = l_2 \cap \omega, F_2 = l_2 \cap$; specify first point: 1_2 ;
 Specify next point or [Undo]: $2_2 + \text{Enter}$;
 აღვნიშნოთ l_2 წრფის ω წრეწირთან გადაკვეთის E_2 და F_2 წერტილები;
27. $E_2 \in (E_2 E_1) \parallel t (O_1 O_2)$; Line
 28. $E_1 = (E_1 E_2) \cap l_1$; specify first point: E_2 ;
 Shift + მუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ Parallel ბრძანება.
 კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან (რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და კურსორი გადავადგილოთ l_1 წრფესთან E_1 წერტილში გადაკვეთამდე;
29. $F_2 \in (F_2 F_1) \parallel t (O_1 O_2)$; Line
 30. $F_1 = (F_1 F_2) \cap l_1$; specify first point: F_2 ;
 Shift + მუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ Parallel ბრძანება.
 კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან (რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და კურსორი გადავადგილოთ l_1 წრფესთან F_1 წერტილში გადაკვეთამდე;

3. დასკვნა

წინამდებარე ნაშრომში განხილულია საინჟინრო გეომეტრიის გრაფიკული ამოცანები და მათი გადაწყვეტა კომპიუტერის გამოყენებით, მათ შორის ისეთი ცნობილი, როგორცაა აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებანი (თეორია) და მისი გამოყენება ამოცანაში:

მოცემულია ელიფსი და წრე, ავად ამ ელიფსისა და წრის თანაკვეთის წერტილები ელიფსის აუგებლად. როგორც თეორიული ნაწილის, ასევე ამოცანებისათვის გამოყენებულია გრაფიკული ინტერპრეტაციის ჩვენული ვერსიები. შესრულებული ნახაზებისათვის შედგენილია ინტუციური და მანქანური ალგორითმები. აგების ამოცანებში კომპიუტერული ტექნიკის გამოყენების ჩვენული ვერსიები შესაძლოა გავრცელდეს საინჟინრო გეომეტრიის ნებისმიერ აგების ამოცანაზე.

ლიტერატურა

1. შავგულიძე ა., თევზაძე თ., ნოზაძე თ. ტექნიკური ხაზვის ზოგადი კურსი. თბილისი, განათლება, 1999.
2. Моденов П. С., Пархоменко А.С. Геометрические преобразования. М., МГУ, 1961.
3. ვაჩნაძე ვ. მხაზველობითი გეომეტრიის კურსი. თბილისი, განათლება, 1979.

GRAPHICAL PROBLEMS OF ENGINEERING GEOMETRY AND THEIR SOLUTION BY THE USE OF COMPUTER

Shavgulidze Anzor, Shengelia Giorgi, Kvinikadze Zurab
Georgian Technical University

S u m m a r y

One of the most actual topic of graphic tasks of engineering geometry is the simplification of its solution or in other words reduction of volume of graphic operations. Besides today it is very important to decline the use of old and routine means (ruler, divider etc.) for solution of this task and to insert computer means in this process. Last consideration is successfully realized in practice and as an example we can name AutoCAD – the powerful system of automatized projecting. It is known that one command of “AutoCAD” units simultaneously several graphic operations and construction task takes into account fixation of given data and result. Our aim is exactly the restoration of existing process between given data and result and respectively the considerable execution of every operation. Our aim is the filling of theoretically disemboweled task with the description of the process from given data to the result. Of course we take into account the unlimited possibilities of AutoCAD program support, but we think that differentiation of integrated operations is the indispensable condition of the penetration into task contest and denial of this fact is inadmissible. Given work is devoted to the solving of this problem.

ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ИНЖЕНЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИХ РЕШЕНИЕ ПОСРЕДСТВОМ КОМПЬЮТЕРА

Шавгулидзе А.С. Шенгелия Г.Л. Квиникадзе З.А.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Одной из актуальных тем графических задач инженерной геометрии является упрощение их решений, т.е. уменьшение объема графических действий. А также включение в это дело компьютерных средств, вместо старых, рутинных инструментов (линейка, циркуль и т.д.). С этой задачей успешно справляется, например, система автоматизированного проектирования AutoCAD. Известно, что каждая команда в AutoCAD-е объединяет несколько графических действий. Нашей задачей является показать эти действия, чтобы перевести механическое мышление в созидательное.