პარაბოლური განტოლებისთვის საწყის სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის ოთხშრიანი სქემის გახლეჩის ალგორითმი და რიცხვითი რეალიზაცია

დავით გულუა, ეკატერინე გულუა
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია შეშფოთებათა ალგორითმი პარაბოლური განტოლებისთვის საწყის სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის ოთხშრიანი სქემისათვის. ოთხშრიანი სქემა დაიყვანება სამ ორშრიან სქემაზე. ამ ორშრიანი სქემების ამონახსნთა კომბინაციით მიიღება საწყისი ამოცანის ამონახსნი. ყოველი ორშრიანი სქემის ამონახსნი აუმჯობესებს ხდომილებას ერთი რიგით. საბოლოო ამონახსნი ინარჩუნებს საწყისი ოთხშრიანი სქემის სიზუსტეს. მიღებულია ალგორითმის რიცხვითი რეალიზაციის შედეგები.

საკვანძო სიტყვები: პარაბოლური განტოლება. სასაზღვრო ამოცანა. სხვაობიანი ნახევრადდისკრეტული სქემა. შეშფოთებათა ალგორითმი. რიცხვითი რეალიზაცია.

1. შესავალი

პრაქტიკული ამოცანების მოდელირების შედეგად მიღებული დიფერენციალური განტოლებების საწყის სასაწღვრო ამოცანების შესწავლა და გამოკვლევა შეიძლება ჩაითვალოს დასრულებულად მხოლოდ იმის შემდეგ, როდესაც აღნიშნული ამოცანა ამოხსნილია და მიღებულია მისი რიცხვითი ამონახსნი. ევოლუციური ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგება და გამოკვლევა განხილულია მრავალ სახელმძღვანელოსა თუ მონოგრაფიებში. მათ შორის ისეთ კარგად ცნობილ წიგნებში, როგორებიცაა, მაგალითად, გოდუნოვი და რიაბენკი, მარჩუკი, რიხტმაიერი და მორტონი, სამარსკი, იანენკო და სხვ. [1-5].

წარმოდგენილი ნაშრომი ეძღვნება სივრცით ერთგანზომილებიანი პარაბოლური განტოლებებისათვს საწყის-სასაზღვრო ამოცანების მიახლოებით ამოხსნას [6,7] ნაშრომებში შემოთავაზებული მეთოდით და ამ მეთოდით მიღებული რიცხვითი შედეგების ანალიზს. შესაბამისი ალგორითმი რეალიზებულია MatLab გარემოში, მოყვანილია რიცხვითი გათვლების შედეგები.

2. ევოლუციური განტოლებისათვის ალგორითმის ფორმულირება და მეთოდის ცდომილების შეფასება

შეშფოთებათა ალგორითმის გამოყენებით [7,8] ნაშრომებში, აბსტრაქტული ევოლუციური განტოლებისათვის ნახევრადდისკრეტული არაცხადი ოთხშრიანი სქემა დაყვანილია ორშრიან სქემებზე. ამ ორშრიანი სქემების ამონახსნების კომბინაციით იგება საწყისი ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი. დამტკიცებულია თეორემა ამონახსნის ცდომილების შესახებ. მოკლედ მოვიყვანოთ [7] ნაშრომში ჩამოყალიბებული თეორიული შედეგები.

განვიხილოთ შემდეგი ევოლუციური ამოცანა

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t), \quad t \in]0,T], \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

სადაც A თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული ოპერატორია H სივრცეში, $D(A)$ განსაზღვრის არით; $f(t)$ – უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მნიშვნელობებით H სივრციდან; u_0 – მოცემული ვექტორია H სივრციდან; $u(t)$ – უცნობი ფუნქციაა.

შემოვიღოთ $[0,T]$ სეგმენტზე ბადე $t_k = k{}^{2}$, $k = 0,1,\ldots,n$, ბიჯით ${}^{2} = T/n$. ვისარგებლოთ პირველი წარმოებულის აპროქსიმაციით (იხ.მაგ., [9])

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_k} = \frac{\frac{11}{6}u(t_k) - 3u(t_{k-1}) + \frac{3}{2}u(t_{k-2}) - \frac{1}{3}u(t_{k-3})}{{}^{2}} + {}^{2\,3}R_k({}^{2},u), \quad R_k({}^{2},u) \in H.$$

მაშინ (1) განტოლება $t = t_k$ წერტილში შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\frac{\frac{11}{6}u(t_k) - 3u(t_{k-1}) + \frac{3}{2}u(t_{k-2}) - \frac{1}{3}u(t_{k-3})}{{}^{2}} + Au(t_k) = f(t_k) - {}^{2\,3}R_k({}^{2},u), \quad k = 3,\ldots,n. \tag{3}$$

გადავწეროთ (3) განტოლება შემდეგი სახით

$$\begin{aligned}&\frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{{}^{2}} + Au(t_k) + \\ &\frac{{}^{2}}{2}\left(\frac{u(t_k) - 2u(t_{k-1}) + u(t_{k-2})}{{}^{2\,2}}\right) + \\ &\frac{{}^{2\,2}}{3}\left(\frac{u(t_k) - 3u(t_{k-1}) + 3u(t_{k-2}) - u(t_{k-3})}{{}^{2\,3}}\right) = f(t_k) - {}^{2\,3}R_k({}^{2},u).\end{aligned} \tag{4}$$

მიღებული (4) სისტემიდან, შეშფოთებათა ალგორითმის გამოყენებით (იხ. მაგ. [7]) შგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{u_k^{(0)} - u_{k-1}^{(0)}}{{}^{2}} + Au_k^{(0)} = f_k, \qquad u_0^{(0)} = u_0, \quad k = 1,\ldots,n, \tag{5}$$

$$\frac{u_k^{(1)} - u_{k-1}^{(1)}}{{}^{2}} + Au_k^{(1)} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 u_{k-2}^{(0)}}{{}^{2\,2}}, \qquad k = 2,\ldots,n, \tag{6}$$

$$\frac{u_k^{(2)} - u_{k-1}^{(2)}}{{}^{2}} + Au_k^{(2)} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 u_{k-2}^{(1)}}{{}^{2\,2}} - \frac{1}{3}\frac{\Delta^3 u_{k-3}^{(0)}}{{}^{2\,3}}, \qquad k = 3,\ldots,n, \tag{7}$$

სადაც $f_k = f(t_k)$, $\Delta u_{k-1} = u_k - u_{k-1}$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა: $v_k = u_k^{(0)} + {}^{2}u_k^{(1)} + {}^{2\,2}u_k^{(2)}, \ k = 3,\ldots,n.$ (8)

გამოვაცხადოთ v_k ვექტორი (1)-(2) ამოცანის მიახლოებით ამონახსნად წერტილში $t = t_k$ $\ (u(t_k) \approx v_k)$.

<u>*შენიშვნა:*</u> სქემა (6) -ში სასტარტო ვექტორი $u_1^{(1)}$ შეგვიძლია გავიგოთ ტოლობიდან $v_1 = u_1^{(0)} + {}^{2}u_1^{(1)}$, სადაც $u_1^{(0)}$ -ს გამოვთვლით (5) სქემიდან, ხოლო v_1 –არის $u(t_1)$ მიახლოებითი მნიშვნელობა $O({}^{2\,3})$ სიზუსტით. ანალოგიურად, სასტარტო ვექტორი $u_2^{(2)}$ შეიძლება განვსაზღვროთ ტოლობიდან $v_2 = u_2^{(0)} + {}^{2}u_2^{(1)} + {}^{2\,2}u_2^{(2)}$, სადაც $u_2^{(0)}$ და $u_2^{(1)}$ მნიშვნელობები მიიღება შესაბამისად სქემებიდან (5), (6), ხოლო v_2 არის $u(t_2)$ მიახლოებითი მნიშვნელობა $O({}^{2\,3})$ სიზუსტით.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას [7].

თეორემა. *ვთქვათ* A *თვითშეუღლებული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორია* H *ჰილბერტის სივრცეში და (1)–(2) ამოცანის ამონახსნი საკმარისად გლუვი ფუნქციაა. მაშინ, თუ* $\| u(t_k) - v_k \| = O(2^{\,3}), \quad k = 1,2$ *, ადგილი აქვს შეფასებას*

$$\| u(t_k) - v_k \| = O(2^{\,3}), \qquad k = 3, \ldots, n. \tag{9}$$

3. ალგორითმის ფორმულირება სივრცით ერთგანზომილებიანი პარაბოლური განტოლების საწყის-სასაზღვრო ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისათვის

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a_0(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_1(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - c_0(x,t)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in [a,b]\times]0,T], \tag{10}$$

$$u(x,0) = \ddot{\ }(x), \tag{11}$$

$$u(a,t) = \sim_0(t), \quad u(b,t) = \sim_1(t) \tag{12}$$

სადაც $a_0(x,t) \geq \neg_0 > 0, \;\; c_0(x,t) \geq 0$ და $a_0(x,t), a_1(x,t), c_0(x,t), f(x,t), \ddot{\ }(x), \sim_0(t), \sim_1(t)$ – უწყვეტი ფუნქციებია თავისი არგუმენტების მიმართ, $u(x,t)$ – უცნობი ფუნქციაა. იგულისხმება, რომ დაცულია შეთანხმებულობის პირობა $\sim_0(0) = \ddot{\ }(a), \; \sim_1(0) = \ddot{\ }(b)$.

(5)–(8) ალგორითმის გამოყენებით ვპოულობთ (10)–(12) ამოცანის მიახლოებით ამონახსნს.

(5)–(7) -დან, (10) განტოლებისთვის მივიღებთ, შესაბამისად, შემდეგ სისტემას:

$$\frac{u_k^{(0)}(x) - u_{k-1}^{(0)}(x)}{2} = a_0^k(x)\frac{d^2 u_k^{(0)}(x)}{dx^2} + a_1^k(x)\frac{du_k^{(0)}(x)}{dx} - c_0^k(x)u_k^{(0)}(x) + f_k(x)u_0^{(0)}, \qquad k = 1,\ldots,n, \tag{13}$$

$$\frac{u_k^{(1)}(x) - u_{k-1}^{(1)}(x)}{2} = a_0^k(x)\frac{d^2 u_k^{(1)}(x)}{dx^2} + a_1^k(x)\frac{du_k^{(1)}(x)}{dx} -$$
$$c_0^k(x)u_k^{(1)}(x) - \frac{u_k^{(0)}(x) - 2u_{k-1}^{(0)}(x) + u_{k-2}^{(0)}(x)}{2^{\,2}}u_0^{(0)}, \qquad k = 2,\ldots,n, \tag{14}$$

$$\frac{u_k^{(2)}(x) - u_{k-1}^{(2)}(x)}{2} = a_0^k(x)\frac{d^2 u_k^{(2)}(x)}{dx^2} + a_1^k(x)\frac{du_k^{(2)}(x)}{dx} - c_0^k(x)u_k^{(2)}(x) -$$
$$\frac{u_k^{(0)}(x) - 2u_{k-1}^{(0)}(x) + u_{k-2}^{(0)}(x)}{2^{\,2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{u_k^{(1)} - 3u_{k-1}^{(1)} + 3u_{k-2}^{(1)} - u_{k-3}^{(1)}}{2^{\,3}}\right), \qquad k = 3,\ldots,n, \tag{15}$$

სადაც $u_0^{(0)} = \ddot{\ }(x), \;\; a_0^k(x) = a_0(x,t_k), \;\; a_1^k(x) = a_1(x,t_k), \;\; c_0^k(x) = c_0(x,t_k) \;\; f_k(x) = f(t_k, x)$.

შემოვიღოთ $[a,b]$ -ზე ბადე ბიჯით $h = (b-a)/m, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0,1,\ldots,m$. გამოვიყენოთ შესაბამისად პირველი და მეორე წარმოებულის აპროქსიმაცია (იხ. მაგ. [1]) . შედეგად (13)- (15) განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{u_k^{(0)}(x) - u_{k-1}^{(0)}(x)}{2} = a_0^k(x)\frac{u_{k,i+1}^{(0)} - 2u_{k,i}^{(0)} + u_{k,i-1}^{(0)}}{h^2} + a_1^k(x)\frac{u_{k,i+1}^{(0)} - u_{k,i-1}^{(0)}}{2h} -$$
$$c_0^k(x)u_k^{(0)}(x) + f_k(x)u_0^{(0)} = u_0, \quad k = 1,\ldots,n, \quad i = 1,\ldots,m-1, \tag{16}$$

$$\frac{u_k^{(1)}(x) - u_{k-1}^{(1)}(x)}{2} = a_0^k(x)\frac{u_{k,i+1}^{(1)} - 2u_{k,i}^{(1)} + u_{k,i-1}}{h^2} + a_1^k(x)\frac{u_{k,i+1}^{(1)} - u_{k,i-1}^{(1)}}{2h} - c_0^k(x)u_k^{(1)}(x) -$$
$$\frac{u_k^{(0)}(x) - 2u_{k-1}^{(0)}(x) + u_{k-2}^{(0)}(x)}{2^{\,2}}u_0^{(0)} = u_0, \qquad k = 2,\ldots,n, \quad i = 1,\ldots,m-1, \tag{17}$$

$$\frac{u_k^{(2)}(x) - u_{k-1}^{(2)}(x)}{2} = a_0^k(x)\frac{u_{k,i+1}^{(2)} - 2u_{k,i}^{(2)} + u_{k,i-1}^{(2)}}{h^2} + a_1^k(x)\frac{u_{k,i+1}^{(2)} - u_{k,j-1}^{(2)}}{2h} - c_0^k(x)u_k^{(1)}(x) - \tag{18}$$

$$-\frac{u_k^{(0)}(x)-2u_{k-1}^{(0)}(x)+u_{k-2}^{(0)}(x)}{\tau^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{u_k^{(1)}-3u_{k-1}^{(1)}+3u_{k-2}^{(1)}-u_{k-3}^{(1)}}{\tau^3}\right), \qquad k=3,\dots,n, \quad i=1,\dots,m-1,$$

სადაც $u_{k,i}=u_k(x_i)$. (11) და (12) -ის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$u_{0,i}^{(0)}=\varphi(x_i), \; i=0,\dots,m;$$

$$u_{k,0}^{(0)}=\psi_0(t_k), \; u_{k,m}^{(0)}=\psi_1(t_k), \quad k=0,\dots,n.$$

შევადგინოთ ჯამი:

$$v_k=u_k^{(0)}+\tau u_k^{(1)}+\tau^2 u_k^{(2)}, \; k=3,\dots,n. \tag{19}$$

წინა პუნქტში ჩამოყალიბებული თეორემის თანახმად v_k გვაძლევს (10)-(12) ამოცანის მიახლოებით ამონახსნს $O(\tau^3)$ სიზუსტით.

განვიხილოთ, მოდელურ ამოცანებზე, MatLab გარემოში (10)–(12) ამოცანისათვის (16)–(19) შეშფოთებათა ალგორითმის რიცხვითი რეალიზაცია.

ამოცანა 1: $u(x,t)=x(1-x)t^4$,

კოეფიციენტები: $a_0(x,t)=1$, $a_1(x,t)=0$, $c_0(x,t)=0$,

ინტერვალები: $t\in]0,1]$, $x\in[0,1]$,

ბადის ბიჯი $\tau=h=0{,}1$.

მიღებულია შემდეგი შედეგები: $\Delta_1=0.0121$, $\Delta_2=0.0016$, $\Delta_3=1.5410\mathrm{e}-04$

ამოცანა 2: $u(x,t)=e^x\sin\pi t$,

კოეფიციენტები: $a_0(x,t)=1$, $a_1(x,t)=0$, $c_0(x,t)=0$,

ინტერვალები: $t\in]0,1]$, $x\in[0,1]$,

ბადის ბიჯი $\tau=h=0{,}1$.

მიღებულია შემდეგი შედეგები: $\Delta_1=0.0943$, $\Delta_2=0.0135$, $\Delta_3=0.0038$

ამოცანა 3: $u(x,t)=\sin\pi t\sin\pi x$,

კოეფიციენტები: $a_0(x,t)=x+t$, $a_1(x,t)=x$, $c_0(x,t)=t$,

ინტერვალები: $t\in]0,1]$, $x\in[0,1]$,

ბადის ბიჯი $\tau=0{,}1$, $h=0{,}01$.

მიღებულია შემდეგი შედეგები: $\Delta_1=0.0433$, $\Delta_2=0.0080$, $\Delta_3=0.0018$

აქ $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ არის (16)-(19) შეშფოთებათა ალგორითმის რიცხვითი რეალიზაციის შედეგად პირველ $(u_k^{(0)})$, მეორე $(u_k^{(0)}+\tau u_k^{(1)})$ და მესამე $(v_k=u_k^{(0)}+\tau u_k^{(1)}+\tau^2 u_k^{(2)})$ ეტაპებზე მიღებული მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებები.

4. დასკვნა

განხილული შეშფოთებათა ალგორითმის რიცხვითი რეალიზაციიდან ჩანს მისი შედეგების თანხვედრა თეორიულ შედეგებთან. ალგორითმი საშუალებას გვაძლევს ოთხშრიანი სქემიდან გადავიდეთ სამ, განსხვავებული მარჯვენა მხარეების მქონე, იდენტურ ორშრიან სქემებზე. ამასთან ნარჩუნდება საწყისი ოთხშრიანი სქემის სიზუსტე. ყოველივე ეს გაცილებით ამარტივებს, როგორც ალგორითმიზაციის პროცესს, აგრეთვე ეკონომიურია კომპიუტერული რესურსების გამოყენების თვალსაზრისითაც.

ლიტერატურა - References – Литература:

1. Годунов С.К., Рябенький В.С. (1973). Разностные схемы. -М.: Наука
2. Марчук Г.И. (1977). Методы вычислительной математики. -М.: Наука
3. Рихтмайер Р., Мортон К. (1972). Разностные методы решения краевых задач. -М.: Мир
4. Самарский А.А. (1977). Теория разностных схем. -М.: Наука
5. Яненко Н.Н. (1967). Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука
6. Агошков В.И., Гулуа Д.В. (1990). Алгоритм возмущений для реализации конечномерных аппроксимаций задач. -М.: ОВМ АН СССР.
7. Rogava J., Gulua D. (2018). The perturbation algorithm for realization of four-layer semi-discrete solution scheme of an abstract evolutionary problem. Georgian Mathematical Journal, Vol.25, No. 1, pp.77-92
8. Rogava J., Gulua D., Galdava R. (2017). Reduction of some semi-discrete schemes for an evolutionary equation to two-layer schemes and estimates for the approximate solution error. In book "Lie groups, Differential equations, and Geometry". Springer, Italy, pp.223-246
9. Milne W.E. (1949). Numerical Calculus//Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

ALGORITHM OF SPLITTING OF THE FOUR-LEVEL SCHEME FOR APPROXIMATE SOLUTION OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION AND RESULTS OF THE NUMERICAL REALIZATION

Gulua David, Gulua Ekaterine

Georgian Technical University

Summury

In the present paper is considered the perturbation algorithm for the four-level scheme for approximate solution of the initial-boundary value problem for parabolic equation. Using the perturbation algorithm, the four-level scheme is reduced to three two-level schemes. An approximate solution of the original problem is constructed by means of the solutions of these schemes. Note that the first two-layer scheme gives an approximate solution to an accuracy of first order, whereas the solution of each subsequent scheme is the refinement of the preceding solution by one order. In the paper also is considered the results of the numerical experiments.

АЛГОРИТМ РАСЩЕПЛЕНИЯ ЧЕТЫРЁХСЛОЙНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Гулуа Д., Гулуа Е.

Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассмотрен алгоритм возмущений для четырёхслойной схемы для приближённого решения начально-краевой задачи параболического уравнения. Четырёхслойная схема сведена к трём двухслойным схемам. Комбинацией решений этих схем получаем приближённое решение исходной задачи. Решение каждой из двухслойных схем улучшает погрешность на порядок, в результате сохраняя порядок аппроксимации четырёхслойной схемы. Получены результаты численной реализации рассматриваемого алгоритма.