მტყუნებათა ლოდინის დროის ანალიზი რთულ სისტემებში

რევაზ მიქაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

წარმოდგენილ ნაშრომში მიღებულია ლოდინის დროის განაწილების ფუნქციები რთული სისტემების მომსახურების კვანძებში. სახელდობრ, დასმულია კითხვა, თუ რა დრო დასჭირდება მტყუნებათა ფიქსირებული k რაოდენობის მოხდენას და როგორია ამ დროის განაწილების ფუნქცია. ასევე, როგორ არის განაწილებული შემთხვევითი დრო პირველ მტყუნებამდე. ნაშრომში ამ კითხვებზე გაცემულია დასაბუთებული პასუხები.

საკვანძო სიტყვები: პუასონის (უმარტივესი) ნაკადი. განაწილების ფუნქცია. განაწილების სიმკვრივე.

1. შესავალი

მეოცე საუკუნის ბოლო ათწლეულებში ინფოკომუნიკაციების სფეროში განხორციელდა მნიშვნელოვანი ცვლილებები, რამაც დიდი გავლენა იქონია ინფოკომუნიკაციური მომსახურების ბაზარზე. ამ პერიოდში მსოფლიოს განვითარებულ ქვეყნებში მოხდა ბაზრის დემონოპოლიაცია და ინფოკომუნიკაციური მომსახურებებს უკვე უზრუნველყოფდა არა სახელმწიფოები, არამედ კერძო კომპანიები; ამის შედეგად შეიქმნა ტრადიციული და ახალი ტიპის სერვისების ღია ბაზარი, გამძაფრდა კონკურენცია მომსახურების მიმწოდებელ კომპანიებს შორის; სწრაფად განვითარდა ახალი ტექნოლოგიები; გაიზარდა მოთხოვნა ინფოკომუნიკაციურ სერვისებზე. ამ ცვლილებების შედეგად გაიზარდა ინტერესი სატელეკომუნიკაციო ქსელების და მათი ელემენტების საიმედოობის პრობლემებისადმი, რომლის არსია, რომ დაბალი საიმედოობის შედეგად, მომსახურების მიმწოდებლებმა შესაძლოა დაკარგონ არა მხოლოდ კლიენტები, არამედ მიიღონ პირდაპირი უარყოფითი გავლენა ეკონომიკურ მაჩვენებლებზე [1-3].

ცნობილია, რომ რთული სისტემების მათემატიკური მოდელირების ამოცანებში მნიშვნელოვან როლს თამაშობს პუასონის პროცესი, რომელთანაც მჭიდროდაა დაკავშირებული პუასონის (უმარტივესი) ნაკადის ცნება [4-7]. განვიხილოთ რთულ სისტემაში ძირითადი ელემენტების მტყუნებათა პროცესი. ჩავთვალოთ, რომ მტყუნების შემდეგ მტყუნებული ელემენტი გადაეცემა სარემონტოს. წარმოვიდგინოთ, რომ დაკვირვებას ვიწყებთ $t=0$ დროში და აღვრიცხოთ ძირითადი ელემენტის თითოეული მტყუნება. ჩვენი ინტერესის საგანია $N(t)$, ესაა მტყუნებების რაოდენობა t დროის ჩათვლით. $N(t)$ პრაქტიკაში არის საფეხურეობრივი ფუნქცია, სადაც ფუნქცია ნახტომს აკეთებს მაშინ, როცა ძირითადი ელემენტი მტყუნდება.

მტყუნებებზე დაკვირვება ყოველ t მომენტში გვიჩვენებს $N(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის მნიშვნელობას დროის $[0,t]$ ინტერვალში. $N(t)$ შემთხვევითი სიდიდის სიმაღლე tფიქსირებულ დროის მომენტში არის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, რომელმაც შეიძლება მიიღოს 0, 1, 2, 3, ... მნიშვნელობები. საინტერესოა გავიგოთ $N(t)=n$ ალბათობა, რომელიც შეიძლება გამოვსახოთ, როგორც $P[N(t)=n]$ ან $P_n(t)$, როცა $n=0,1, 2, 3…$

[8]-ში მიღებულია $P_n(t)$ ფუნქციის გამოსახულება ისეთი სისტემებისთვის, რომელიც ერთგვაროვან ელემენტთა დიდ რაოდენობას (ასეულები, ათასეულები) შეიცავს. ასეთ სისტემებში დიდი სიზუსტით სრულდება პირობა, რომელიც მათემატიკური მოდელირების პროცესში აქსიომების როლს ასრულებს. ეს პირობებია:

(i) მტყუნებების რაოდენობა ორ ან მეტ არაურთიერთთანაკვეთ დროის ინტერვალში არის ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი დისკრეტული სიდიდეები;

(ii) მტყუნების ალბათობა (t, t+h) ინტერვალში, სადაც h>0 h არის მცირე სიდიდე, იქნება „მიახლოებით“ λh, ან უფრო ზუსტად λh+o(h). ამ შემთხვევაში λ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, როგორც მტყუნებათა რაოდენობა დროის ერთეულ მონაკვეთში;

(iii) ორი ან მეტი მტყუნებათა ალბათობა h დროის ინტერვალში იქნება o(h).

2. ძირითადი ნაწილი

ცნობილია, რომ ზემოთ მოყვანილ პირობებში რთულ სისტემებში ელემენტთა მტყუნებების ნაკადი პუასონურია [8]. საინტერესოა დავსვათ შემდეგი შეკითხვა: რა დრო დასჭირდება მტყუნებათა ფიქსირებული k რაოდენობის მოხდენას? ეს ლოდინის დრო აღვნიშნოთ T_k-თი. T_k-ს ალბათური განაწილების ფუნქცია (c.d.f.) აღვნიშნოთ $F_k(t)$, სადაც $F_k(t)=P(T_k\leq t)$.

იმისთვის, რომ ვიპოვოთ $F_k(t)$, უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ორი ხდომილება $\{T_k\leq t\}$ და $\{N(t)\geq k\}$ ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

შესაბამისად,

$$F_k(t)=P(N(t)>=k)=\sum_{j-k}^{\infty} Pj(t)=\sum_{j=k}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^3}{J!}=1-\sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^3}{J!},\ t>=0.$$

ალბათური განაწილების სიმკვრივე $f_k(t)$ არის $F_k(t)$-ს დიფერენციალი, აღიწერება

$$F_k(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}e^{-\lambda t}}{(k-1)!},\quad t\geq 0$$

ეს გამოსახულება ცნობილია, როგორც γ განაწილება k და λ პარამეტრებით.

როცა k=1 ანუ როცა პირველად გამტყუნდება ელემენტი, მაშინ გამოსახულებებს აქვს შემდეგი სახე:

$$F_1(t)=1-e^{-\lambda t},\qquad t\geq 0$$

$$f_1(t)=\lambda e^{-\lambda t},\qquad t\geq 0$$

შემთხვევითი ცვლადი, რომლის განაწილების სიმკვრივეც ამ ბოლო ცვლადით აღიწერება, განაწილებულია ექსპონენციალურად, λ>0 პარამეტრით. ანუ T_1, დრო, სანამ პირველი მტყუნება მოხდება, მიყვება ექსპონენციალურ განაწილებას. ასევე, უნდა ითქვას, რომ პუასონის ჰომეგენური პროცესისთვის, ნებისმიერ ორ მტყუნებას შორის ლოდინის დრო აღიწერება $f_1(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, t≥0 გამოსახულებით.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ $f_k(t)$ შეიძლება დავითვალოთ პირდაპირ. ხდომილება, რომ K რიგითობის მტყუნება მოხდება (t,t+h] შუალედში, შეიძლება მოხდეს ორი გზით:

(i) (k-1) მტყუნების რაოდენობა მოხდა (0,t] დროში და ერთი მტყუნება მოხდა (t,t+h] დროის შუალედში;

(ii) (k-j) მტყუნების რაოდენობა მოხდა (0,t] დროში და j მტყუნება მოხდა (t,t+h] დროის შუალედში (2≤j≤k);

პუასონის ჰომოგენური პროცესის დაშვებიდან გამომდინარე ჩანს, რომ (i) და (ii) შემთხვევების ალბათობები არის:

$$\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\lambda h + o(h) \quad \text{და } o(h)$$

ანუ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$P(t<T_k \leq t+h)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k-1}\lambda h}{(k-1)!}+o(h)$$

$$f_k(t)=\lim_{h\to 0}\frac{P(t<T_k\leq t+h)}{h}.$$

თუ გამოსახულების

$$P(t<T_k \leq t+h)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k-1}\lambda h}{(k-1)!}+o(h)$$

ორივე ნაწილს გავყობთ h-ზე და $h \to 0$, მაშინ მივიღებთ

$$f_k(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}e^{-\lambda t}}{(k-1)!}, \quad t\geq 0.$$

აღსანიშნია, რომ T_k-ს ალბათური ლოდინი და დისპერსია მოცემულია ასე:

$$E(T_k) = k / \lambda \text{ და } Var(T_k) = k / \lambda^2.$$

ამის ჩვენება შესაძლებელია შემდეგი გამოსახულებიდან:

$$T_k=T_1+(T_2-T_1)+\ldots+(T_k-T_{k-1}).$$

პუასონის ერთგვაროვანი პროცესის დაშვებიდან გამომდინარეობს რომ

$$\{T_1, T_2-T_1, T_3-T_2,\ldots T_k-T_{k-1}\}$$

ურთიერთდამოუკიდებელი სიდიდეებია და მათი ალბათური განაწილების სიმკვრივეა

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}, \ t\geq 0.$$

აქედან გამომდინარე,

$$E(T_k)=KE(T_1)=k/\lambda \text{ და } Var(T_k)= k/\lambda^2$$

3. დასკვნა

როგორც ნაშრომში ჩატარებული მსჯელობები ადასტურებს, რთულ სისტემებში პირველი მტყუნებამდე შემთხვევითი დრო განაწილებულია ექსპონენტური კანონით. ასევე, დასაბუთებულია, რომ ფიქსირებული k რაოდენობის მტყუნებათა მოხდენის დროს, როგორც შემთხვევით სიდიდეს აქვს გამა განაწილება.

ლიტერატურა - References - Литература:

1. Kołowrocki K., Soszyńska-Budny J. (2013). Modelling reliability of complex systems. Reliability: Theory & Applications 8(4)

2. Kuo W., Zuo M.J. (2003). Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.

3. Limnios N., Ionescu D., Cezar (Eds.), (1999). Statistical and Probabilistic Models in Reliability

4. Khairy A., Helmy K.D.N., Prabhakar M, (2008). Complex System Maintenance. Handbook

5. Torben K. (2016). Capacitated Planned Maintenance: Models, Optimization Algorithms, Combinatorial and Polyhedral Properties

6. Neal A. (2000). Network Maintenance and Troubleshooting Guide. Fluke Networks

7. Haquea L, Armstrong M.J. (2007). A survey of the machine interference problem. European Journal of Operational Research. Vol. 179, Issue 2, 1 June, pp.469–482

8. კაკუბავა ი., მიქაძე რ. (2018). მტყუნებათა ნაკადის ანალიზი ინფოკომუნიკაციურ ქსელებში. სტუ-ს შრ.კრ. „მართვის ავტომატიზებული სისტემები“, N 3(27). თბ., გვ. 13-17

ANALYSIS OF WAITING TIME OF FAILURE IN COMPLEX SYSTEMS

Mikadze Revaz

Georgian Technical University

Summary

In the paper distribution functions of waiting time in service nodes of complex systems are resulted. Namely, there are questions: how much time will be required to occur k number of failures and what is the distribution function for this time; Also, how is it distributed random time before the first failure; These questions have been answered by the substantive arguments.

АНАЛИЗ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ ОТКАЗОВ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

Микадзе Р.

Грузинский Технический Университет

Резюме

В статье получены функции распределения времени ожидания в центрах обслуживания сложных систем. А именно, поставлены вопросы: сколько времени потребуется, чтобы произошло k отказов и какова функция распределения этого времени; кроме того, как распределено случайное время до первого отказа. Получены обоснованные ответы на эти вопросы.