სპექტრული გაზომვების სახესხვაობები, ფურიე და ვეივლეტ-გარდაქმნების შედარება

ომარ ტომარაძე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია სპექტრული გაზომვების გამოყენების სფეროები. კერძოდ, სიხშირის, სიმძლავრის, მოდულაციის და დამახინჯებების გაზომვა. აღნიშნულია, რომ ტელეგაზომვებში, კომუნიკაციებსა და კავშირგაბმულობაში ძალიან მნიშვნელოვანია გაიზომოს როგორც გადამცემის ისე მიმღების დამახინჯებები. მოცემულია ფურიე და ვეივლეტგარდაქმნების თეორიული საფუძვლების მოკლე აღწერა. ფურიე და ვეივლეტ-გარდაქმნების შედარებისთვის მოცემულია სპექტრის უახლესი ვეივლეტ–წარმოდგენა, რომელიც ხასიათდება სპექტროგრამის უფრო მეტი დეტალიზებით. ვეივლეტ–გარდაქმნა დაფუძნებულია სიგნალების და ფუნქციების წარმოდგენის ახალ მათემატიკურ ბაზაზე, რომელიც გაცილებით მრავალმხრივია ვიდრე სინუსოიდური ფუნქციები. ვეივლეტები მოსახერხებელია არასტაციონარული სიგნალებისა და წყვეტადი ფუნქციებისთვის.

საკვანძო სიტყვები: სპექტრული გაზომვები. ფურიე-გარდაქმნა. ვეივლეტ-გარდაქმნა. ვეივლეტ-სპექტროგრამა. მოდულაციის ხარისხი. ხმაური.MATLAB-Wavelet Toolbox.

1. შესავალი

სპექტრის ანალიზატორით ყველაზე ხშირად ზომავენ სიხშირეს, სიმძლავრეს, მოდულაციას, დამახინჯებებს და ხმაურს. სიგნალის სპექტრული შედგენილობის ცოდნა ძალიან მნიშვნელოვანია, განსაკუთრებით შეზღუდული სიგანის სიხშირრული ზოლის სისტემებისათვის. გადაცემული სიმძლავრე არის აგრეთვე მნიშვნელოვანი გასაზომი პარამეტრი. ძალიან მცირე სიმძლავრე ნიშნავს, რომ სიგნალი ვერ აღწევს დანიშნულების წერტილს. ძალიან დიდი სიმძლავრე მალე ხარჯავს ელემენტის მუხტს, ქმნის დამახინჯებებს და ზედმეტად ზრდის სისტემის ტემპერატურას [3].

სტატიის მიზანია სპექტრული გაზომვების შესაძლებლობების ანალიზი, აგრეთვე ამ მიმართულებით ფურიე და ვეივლეტ-გარდაქმნების შედარება.

2. ძირითადი ნაწილი

ტელეგაზომვებში, კომუნიკაციებსა და კავშირგაბმულობაში ძალიან მნიშვნელოვანია გაიზომოს როგორც გადამცემის ისე მიმღების დამახინჯებები. გადამცემის გამოსასვლელზე ზედმეტმა ჰარმონიკულმა მდგენელმა შეიძლება შექმნას დამახინჯებები სხვა საკომუნიკაციო სიხშირეებისათვის. მიმღების წინასწარი გაძლიერების ბლოკებში არ უნდა იყოს ინტერმოდულაცია, რომ გამოვრიცხოთ სიგნალის გადაჯვარედინება. სიგნალის გადამტანის ინტერმოდულაციის კარგი მაგალითია საკაბელო ტელევიზია, რომელსაც განაწილე- ბულ სისტემაში გავრცელების დროს შეაქვს დამახინჯებები ამავე კაბელის სხვა არხებში. დამახინჯებების გავრცელებული გაზომვებია ინტერმოდულაციისა და ჰარმონიკების პარაზიტული გამოსხივების გაზომვა [1].

1807 წელს ფურიემ თეორიულად დაასაბუთა ნებისმიერი პერიოდული დამოკიდებულების ჰარმონიკული სინთეზის შესაძლებლობა. ეს დამოკიდებულება უნდა აკმაყოფი–

ლებდეს (–π, π) შუალედში დირიხლეს პირობებს. ასეთი დამოკიდებულების მწკრივი, რომელიც ფურიეს მწკრივის სახელითაა ცნობილი, გამოისახება ასე:

$$Y(x)=(\alpha_0/2)+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k Sin(kx)+b_k Cos(kx).$$

მწკრივის კოეფიციენტებს ანგარიშობენ ეილერ–ფურიეს ფორმულებით:

$$\alpha_k=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} Y(x)Cos(kx)dx$$

$$b_k=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} Y(x)Sin(kx)dx.$$

ფურიეს მწკრივის გამოყენების მნიშვნელოვანი სფეროა ყველა ის სამუშაოები, სადაც პერიოდული სიგნალები წარმოდგება როგორც Y(t) დროითი ფუნქციები [0, T] მონაკვეთზე ან [-T/2, T/2] პერიოდით. $T=1/f_1$, სადაც f_1 არის პერიოდული სიგნალის პირველი ჰარმონიკის სიხშირე. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ ფურიეს მწკრივი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$Y(t)=(\alpha_0/2)+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k Cos(2\pi k f_1 t)+b_k Sin(2\pi k f_1 t),$$

სადაც

$$\alpha_k=(2/T)\int_0^T Y(t)Cos(2\pi k f_1 t)dt,\ \ b_k=(2/T)\int_0^T Y(t)Sin(2\pi k f_1 t)dt.$$

ამ შემთხვევაში α_k და b_k კოეფიციენტები აღიწერება T პერიოდიანი და $1/f_1$ სიხშირიანი სიგნალის k–ური ჰარმონიკის კოსინუსური და სინუსური მდგენელებით. ხშირად გამოიყენება ფურიეს მწკრივის გამარტივებული გამოთვლა:

$$Y(t)=(\alpha_0/2)+\sum_{k=1}^{N} M_k Cos(2\pi k f_1 t+\varphi_k),$$

აქ ჰარმონიკების ამპლიტუდები M_k და მათი ფაზები φ_k განისაზღვრება გამოსახულებებით:

$$M_k=(\alpha_k^2+b_k^2)^{1/2},$$

$$\varphi_k=-\arctan(b_k/\alpha_k).$$

ფურიეს გარდაქმნის დიდი გამოთვლითი სიძნელეების თავიდან აცილების მიზნით, შემოთავაზებული იქნა ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის მეთოდი, სადაც გამოიყენება სპე–ციალური ტექნიკა. ფუნქციის კომბინაციური ანათვალი გამრავლებული წინასწარ გამოთ–ვლილ თანამამრავლზე და ითვალისწინებს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების პერიოდუ–ლობის მნიშვნელობას. ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის ალგორითმი არ ამცირებს გამოთვლის ცდომილებას წინასწარ მოცემული ჰარმონიკების რაოდენობის დროს, მაგრამ მკვეთრად ამცირებს სპექტრული ანალიზის და სინთეზის ხანგრძლივობას, განსაკუთრებით მაშინ როდესაც $Y_i(t)$ დროითი ანათვლები 2^N–ის ჯერადია. სადაც N მთელი რიცხვია [2].

ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის ალგორითმში სრულდება დაახლოებით NlogN ოპე–რაცია, სადაც N არის სიგნალის ანათვლების რაოდენობა. ფურიეს სწრაფი გარდაქმნა გამოიყენება არა მარტო კომპიუტერული მათემატიკის სისტემებში, არამედ სხვა მრავალ მოწყობილობებში და პროგრამულ სისტემებში. არსებობს მიკროსქემები, რომლებიც ასრულებს ფურიეს სწრაფ გარდაქმნას.

ბევრ დადებით მხარეებთან ერთად ფურიე–გარდაქმნას აქვს მნიშვნელოვანი უარყოფითი თვისებები. საკმარისია აღვნიშნოთ სინუსის და კოსინუსის ბაზისური ფუნქციების შეზღუდულობა, რომლებიც უწყვეტია, ვერ ასახავს სიგნალის ნახტომებს, განსაზღვრულია დროის უსასრულო ინტერვალზე როგორც წინ, ისე უკან, იძლევა

მდოვრედ კრებად მწკრივებს და არ იძლევა საშუალებას კორექტულად წარმოვადგინოთ დროში პარამეტრცვლადი არასტაციონარული სიგნალები. მაგალითად, რამდენიმე სიხშირის ერთმანეთზე დადებული სინუსოიდის და სიგნალის, აგრეთვე დროში თანამიმდევრულად წარმოდგენილი ამ სინუსოიდების (მათი ზედდების გარეშე) სპექტრი ერთნაირად ჩანს, თუმცა ეს სიგნალები სრულიად განსხვავებულია ერთმანეთისგან. სპექტრის თავისებურებებიდან გამომდინარე არ შეიძლება განვსაზღვროთ დროში თავისებურებათა მდგომარეობა. თუმცა ფურიეს „ფანჯრისებრი" გარდაქმნა ნაწილობრივ ამ ამოცანას დროითი „ფანჯრის" ზომის ფარგლებში წყვეტს.

ამასთან დაკავშირებით ბოლო ორი ათწლეულის განმავლობაში წარმოიშვა და ვითარდება ნებისმიერი სიგნალის წარმოდგენის ახალი სფერო ვეივლეტ–გარდაქმნა. ვეივლეტი მოკლე ტალღაა დროის ღერძზე გადაადგილებადი და მასშტაბირებული. ამ დროს სიგნალი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$S(t)=\sum_k C_k(\alpha,b)\psi_k(t,\alpha,b),$$

სადაც α პარამეტრი ვეივლეტის სიგანეა, ხოლო b –მისი მდებარეობა.

ვეივლეტ–გარდაქმნის საფუძველია ორი უწყვეტი და მთელ ღერძზე ინტეგრირებადი t (ან x) ფუნქციის გამოყენება:

- ვეივლეტ–ფუნქცია psi$\psi(t)$ $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt = 0$;
- მასშტაბირებელი ან სკელინგ–ფუნქცია phi $\psi(t)$ $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varphi)dt = 1$.

Phi-ფუნქცია, რომელიც გვაძლევს სიგნალის უხეშ მიახლოებას (აპროქსიმაციას) ახასი–ათებს მხოლოდ ორთოგონალურ ვეივლეტებს, ხოლო მადეტალიზირებელი psi–ფუნქცია იქმნება ამა თუ იმ $\psi_0(t)$ ბაზისური ფუნქციით, რომელიც განსაზღვრავს ვეივლეტის სახეს. psi–ფუნქცია უნდა ექვემდებარებოდეს დროში გადაადგილებას და მასშტაბირებას:

$$\psi(t,\alpha,b)\equiv\psi(\alpha,b,t)=\alpha^{-1/2}\psi_0[(t-b)/\alpha].$$

S(t) სიგნალის უწყვეტი პირდაპირი ვეივლეტ–გარდაქმნის მოცემა ხდება ვეივლეტ–კოეფიციენტების შემდეგი ფორმულით ანგარიშით:

$$C(\alpha,b)=[S(t),\psi(\alpha,b,t)]=\int_{-\infty}^{\infty}S(t)\alpha^{1/2}\psi[(t-b)/\alpha]dt.$$

ჩვეულებრივ სიგნალების განსაზღვრის არის შემოსაზღვრულობის გათვალისწინებით და $\alpha,b\in R$, $\alpha\neq0$ შეიძლება დავწეროთ:

$$C(\alpha,b)=\int_R S(t)\alpha^{1/2}\psi[(t-b)/\alpha]dt.$$

უწყვეტი უკუ ვეივლეტ–გარდაქმნა ხორციელდება დროის არეში რეკონსტრუქციის ფორმულის მიხედვით:

$$f=C^{-1}_{\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(d\,\alpha db)/\alpha^2[f,\psi^{\alpha b}]\,\psi^{\alpha b}.$$

MATLAB-Wavelet Toolbox სისტემის გაფართოების პაკეტში გამოიყენება სიგნალის რე–კონსტრუქციის შემდეგი ფორმულა:

$$S(t)=(1/K_{\psi})\int_{R+}\int_R C(\alpha,b)\,\alpha^{-1/2}\psi[(t-b)/\alpha][(d\,\alpha db)/\alpha^2],$$

სადაც K_{ψ}–მუდმივა, განისაზღვრება ψ ფუნქციით.

თუ α–ს და b-ს წარმოვადგენთ დისკრეტულად, რაც ჩვეულებრივ კეთდება, მივი-ღებთ დისკრეტულ ვეივლეტ–გარდაქმნას. პრაქტიკაში გამოიყენება ისეთი დისკრეტული ვეივლეტ–გარდაქმნა, როდესაც ვეივლეტის სიგანე იცვლება ორჯერ მორიგ L-გარდაქმნაზე

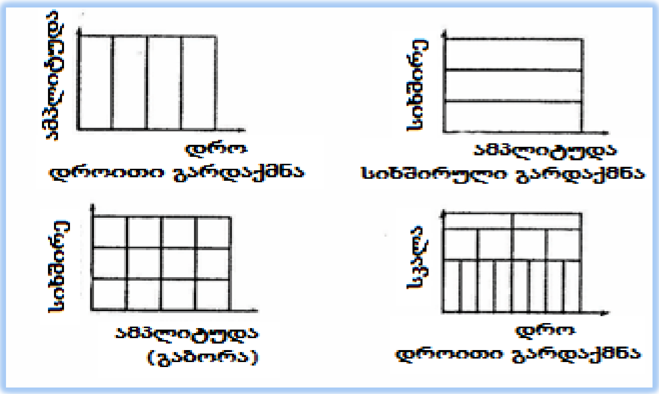
გადასვლისას. ასეთ გარდაქმნას დუადური ჰქვია. არსებობს დისკრეტული სწრაფი ვეივ–ლეტ–გარდაქმნის ალგორითმები.

რიგ პროგრამაში (MATLAB, Mathcad და Mathematika) არის ვეივლეტის გაფართოების პაკეტები. ვევლეტების რაოდენობა აღწევს მრავალ ათეულს. პაკეტები შეიცავს პირდაპირი და უკუ დისკრეტული ვეივლეტ–გარდაქმნის ფუნქციებს და მრავალრიცხოვან ფუნქციას სიგნალების ვეივლეტ–დამუშავებაზე. კერძოდ, სიგნალის გაწმენდა ხმაურისგან, ვეივლეტ–კომპრესია და დეკომპრესია, ვეივლეტ–სპექტოგრამების აგება და სხვა.

სიგნალების ფურიე–ანალიზის და სინთეზის განხილულ მეთოდებს პრაქტიკული პოზიციიდან თუ შევხედავთ დავინახავთ, ანგარიშისათვის ესაჭიროება დიდი დრო. გარდა ამისა არ გამოიყენება არასტაციონარული სიგნალებისათვის, როგორიცაა ახალი კომპონენტებით გამოჩენილი შემთხვევითი სიგნალი.

არასტაციონარული სიგნალების ფურიე–ანალიზი იძლევა არასწორ სპექტრს. მაგალითად, T პერიოდში მოცემული სამი ჰარმონიკის ჯამისგან შემდგარი და არასტაცი-ონარული სპექტრის მქონე სიგნალს, რომელიც შედგენილია სამი სინუსოიდისგან და თითოეული მათგანი მოცემულია T/3 პერიოდში ექნება ერთნაირი სპექტრი, თუმცა სიგნალების დროითი მახასიათებლები მკვეთრად განსხვავებულია. სტაციონარული სიგნალის შემთხვევაში მაგალითად, სპექტრი იანგარიშება სწორად, ხოლო არასტაციო-ნარულის – შეცდომით.

ანგარიშისათვის საჭირო დიდი დრო დაკავშირებულია იმასთან, რომ ფურიეს კო–ეფიციენტების ფორმულებში არის სწრაფად ოსცილირებული მამრავლები, რაც მოითხოვს ინტეგრირების ინტერვალების დაყოფას ძალიან მცირე ნაწილებად. შედეგად გამოთვლითი ოპერაციების მოცულობა მკვეთრად იზრდება. 1-ელ ნახაზზე მოცემულია სპექტრის წარმოდგენის ძირითადი ვარიანტები.

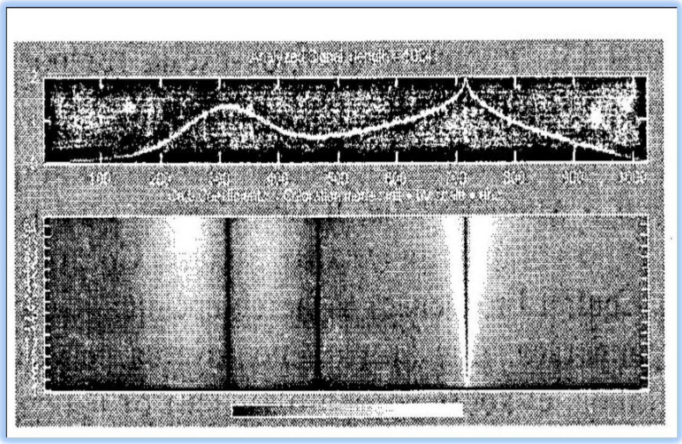


ნახ.1. სპექტრის წარმოდგენის ძირითადი სახეები

Time Domain გვაძლევს სიგნალის ანათვლებს ამპლიტუდა–დროის სიბრტყეში. სიხშირის არეში Frequncy Domain იძლევა ჰარმონიკების ამპლიტუდას (ან სპექტრულ ფართს) ამპლიტუდა–სიხშირე სიბრტყეში. სპექტრის წარმოდგენის აღნიშ- ული სახეების მთავარი უარყოფითი მხარეა დროში ამა თუ იმ პროცესის მონაცემების არარსებობა. ფანჯრული გარდაქმნა (Gabor) ანათვლების ბლოკისთვის იგება სიხშირე–დროის

სიბრტყეში და ამ სიბრტყეს ყოფს სწორკუთხა უჯრედებად, ყოველი მათგანი ხასიათდება ამპლიტუდით. ამ წარმოსახვას სპექტროგრამას უწოდებენ.

შედარებისთვის მე-2 ნახაზზე მოცემულია სპექტრის უახლესი ვეივლეტ–წარმოდგენა, რომელიც ხასიათდება სპექტროგრამის უფრო მეტი დეტალიზებით. ვეივლეტ–გარდაქმნა დაფუძნებულია სიგნალების და ფუნქციების წარმოდგენის ახალ მათემატიკურ ბაზაზე, რომელიც გაცილებით მრავალმხრივია ვიდრე სინუსოიდური ფუნქციები. ვეივლეტები მოსახერხებელია არასტაციონარული სიგნალებისა და წყვეტადი ფუნქციებისთვის.



ნახ.2. კომპიუტერული მათემათემატიკური სისტემით MATLAB, მიღებული რთული სიგნალის ვეივლეტ–სპექტროგრამა

ვეივლეტ-სპექტროგრამა იგება დროის სიბრტყეში (ან დისკრეტული ათვლის ნომე–რი) ვეივლეტ–კოეფიციენტების ნომრები. ხოლო ვეივლეტ–კოეფიციენტების დონეები მო–იცემა სიკაშკაშით (ფერით). ვეივლეტ–სპექტროგრამა იძლევა სპექტრის თავისებურების მკვეთრ მიბმას დროსთან და საშუალებას იძლევა ადვილად მოხდეს სიგნალების თვისე–ბების კლასიფიცირება – მათ შორის არასტაციონარულისაც, რასაც ვერ ახერხებს ფურიეს ფანჯრული გარდაქმნა.

დღეისათვის უკვე არსებობს ვეივლეტგარდაქმნის მიკროსქემები და ვეივლეტ–გარდაქმნა შეიძლება გამოვიყენოთ ციფრული ხელსაწყოების ინტეგრაციისათვის არსე-ბული კომპიუტერული ტექნოლოგიების საშუალებით.

3. დასკვნა

განხილულია სპექტრული გაზომვების გამოყენების სფეროები. ფურიე და ვეივლეტ-გარდაქმნების შედარებამ აჩვენა, რომ ვეივლეტ-გარდაქმნა ხასიათდება სპექტროგრამის უფრო მეტი დეტალიზებით. ვეივლეტ–გარდაქმნა დაფუძნებულია სიგნალების და ფუნ-ქციების წარმოდგენის ახალ მათემატიკურ ბაზაზე, რომელიც გაცილებით მრავალმხრივია ვიდრე სინუსოიდური ფუნქციები. ვეივლეტები მოსახერხებელია არასტაციონარული სიგნალებისა და წყვეტადი ფუნქციებისთვის.

ლიტერატურა - References – Литература:

1. Афонский А.А., Дьяконов В.П. (2013). Цифровые анализаторы спектра, сигналов и логики. - М.: СОЛОН-Пресс.

2. ტომარაძე ო. (2013). შემთხვევითი შეცდომების ზემოქმედების პირობებში საინფორმაციო–საზომ მონაცემთა გადაცემის ეფექტურობის კვლევა. სტუ. დის. დოქტ. აკად. ხარ. თბ., –191 გვ. http://www.nplg.gov.ge/dlibrary/collect/0002/000643/Disertacia_Omari_Tomaradze.pdf

3. აზმაიფარაშვილი ზ., ტომარაძე ო. (2016). სპექტრული გაზომვების საფუძვლები და საშუალებები. სტუ. თბილისი. -170 გვ

VARIETIES OF SPECTRAL MEASUREMENTS, A COMPARISON BETWEEN THE FOURIER AND WAVELET TRANSFORM

Tomaradze Omar
Georgian Technical University

Summary

We consider the scopes of spectral measurements. In particular, the measurement of frequency, power, modulation, and noise distortions. It is noted that in telemetry of communication is important to measure the distortion of both transmitter and receiver. We give a brief description of the Fourier and wavelet-transformations. For comparison, the Fourier and wavelet-transformations given the latest wavelet-representation of the spectrum, which is characterized by a more detailed spectrogram. The wavelet transform is based on the signals and functions of representation on a new mathematical framework that is much more diverse than the sine function. Wavelets are suitable for non-stationary signals and discontinuous functions.

РАЗНОВИДНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ, СРАВНЕНИЕ ФУРЬЕ И ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Томарадзе О.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассматриваются сферы применения спектрального измерения. В частности, измерения частоты, мощности, модуляций, искажений и шума. Отмечено, что в телеизмерении коммуникаций и связи важно измерить искажения как передатчика, так и приёмника. Даётся краткое описание Фурье и Вейвлет-преобразований. Для сравнения Фурье и Вейвлет-преобразований даётся новейшее Вейвлет-представление спектра, которое характеризуется более детализированной спектрограммой. Вейвлет-преобразование основано на представлении сигналов и функции на новой математической базе, которая гораздо многообразнее, чем синусоидальные функции. Вейвлеты удобны для нестационарных сигналов и прерывных функций.