РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ROG МЕТОДОМ

Обгадзе Т.А.

Грузинский Технический Университет

Резюме

Предлагается алгоритм численного расчета, определяющих параметров стационарного течения вязкой, несжимаемой жидкости вокруг инженерных сооружений, сложной геометрической конфигурации. Для учета условия прилипания жидкости к стенкам обтекаемых сооружений, применяется RO метод Рвачева-Обгадзе, а в качестве базисных функций, используются регулярные источники Обгадзе-Габричидзе OG. Подставляя поученные разложения в уравнениях Навье-Стокса и удовлетворяя кинематическим условиям, получаем невязки задачи обтекания сооружений сложной геометрической формы. Полученные невязки для каждого уравнения записываем по норме $L_2(G)$, где G область изучаемого течения. Построенный алгоритм расчета основывается на методе ROG Рвачева-Обгадзе-Габричидзе.

Ключевые слова: обтекание. Сооружение. Метод ROG.

1. Математическое моделирование стационарного потока вязкой несжимаемой жидкости

Рассмотрим задачу стационарного обтекания кругового цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью. Эта задача является плоской, т.е. математическая модель имеет вид:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

$$u|_{\partial G} = v|_{\partial G} = 0, \tag{4}$$

где $G = [-5; 5] \times [-3; 3]$ компакт из $\mathbb{R}^2$, а ∂G граница множества G;

$(u; v)$-компоненты скорости, -давление, Re-число Рейнольдса.

Зададимся кинематическими условиями:

$$u(-5; y) = 1 - \frac{1}{9}y^2, \;\; v(-5; y) = 0. \tag{5}$$

Кинематические условия (5) моделируют набегающий поток вязкой жидкости с параболическим профилем скоростей рис.1, а граничные условия (4) – условия прилипания жидкости к стенкам. Нашей целью является нахождение функций: $u(x, y); v(x, y), p(x, y)$ для $\forall (x, y) \in G$.

2. Численный метод расчета определяющих параметров

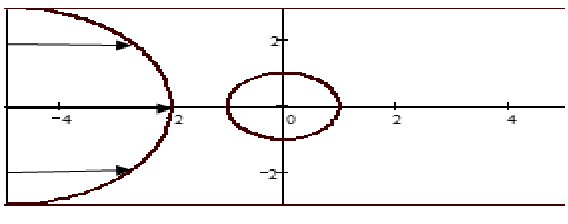

Рис. 1. Схема течения жидкости

Для решения задачи, представляем искомые функции в виде разложений:

$$u(x,y,\alpha) = RO(x,y)\sum_i \alpha_i \varphi_i(x,y), \quad (6)$$

$$v(x,y,\beta) = RO(x,y)\sum_i \beta_i \varphi_i(x,y), \quad (7)$$

$$p(x,y,\gamma) = \sum_i \gamma_i \varphi_i, \quad (8)$$

где $RO(x,y)$-функция Рвачева-Обгадзе, которая обращается в нуль для всех точек ∂G границы множества G $[1-4]$.

В нашем случае, получаем что

$$RO(x,y) = \frac{(x^2+y^2-1)(9-y^2)}{216}. \quad (9)$$

Знаменатель 216 является нормирующим множителем для $(x^2+y^2-1)(9-y^2)$ на множестве G, иначе говоря,

$$max[(x^2+y^2-1)(9-y^2)] = 216. \quad (10)$$

Функция $RO(x,y)$ дает возможность учета (4) граничных условий прилипания вязкой жидкости к стенкам границы.

В качестве базисных функций $\varphi_i(x,y)$, используются функции регулярных источников $[1-4]$. Для этого, выбираем точки локализации регулярных источников (ξ_i, η_i), рис. 2.

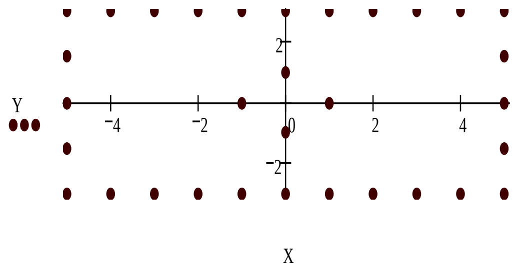

Рис.2. Точки расположения регулярных источников (ξ_i, η_i), $i = \overline{1.32}$

Для решения данной задачи применяются регулярные источники простейшего вида:

$$\varphi_i(x,y) = r_i^2 = (x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2, \quad (11)$$

тогда получаем представления определяющих параметров в виде:

$$u(x,y,\alpha) = \frac{(x^2+y^2-1)(9-y^2)}{216}\sum_{i=1}^{N} \alpha_i[(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2], \quad (12)$$

$$v(x,y,\alpha) = \frac{(x^2+y^2-1)(9-y^2)}{216}\sum_{i=1}^{N} \beta_i[(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2], \quad (13)$$

$$p(x,y,\gamma) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i[(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2], \quad (14)$$

где коэффициенты разложения: α_i, β_i, γ_i определяются по алгоритму:

1. Подставляем выражения (12),(13),(14) в (1),(2),(3),(5);
2. Строим соответствующие невязки: $R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma)$, $R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma)$, $R3(x,y,\alpha,\beta)$, $R4(y,\alpha)$, $R5(y,\beta)$;
3. Далее, составляем невязки в смысле $L_2(G)$:

$$I1(\alpha,\beta,\gamma) = \int_{-3}^{3}\int_{-5}^{5}\left[\left(R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma)\right)^2 + \left(R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma)\right)^2\right]dxdy;$$

$$I2(\alpha,\beta) = \int_{-3}^{3}\int_{-5}^{5}\left[\left(R3(x,y,\alpha,\beta,\gamma)\right)^2\right]dxdy;$$

$$I3(\alpha,\beta) = \int_{-3}^{3}((R4(y,\alpha))^2 + (R5(y,\beta))^2)dy;$$

4. Составляем суммарную невязку:
$I(\alpha,\beta,\gamma)=I1(\alpha,\beta,\gamma)+I2(\alpha,\beta)+I3(\alpha,\beta)$;
5. Далее, минимизируем суммарную невязку $I(\alpha,\beta,\gamma)\rightarrow min$ при условиях $u(-5,y,\alpha)\geq 0.9$ и добавляем условие постоянства расхода в сечениях $x=-5;\; x=0;\; x=5$.

В следствии решения задачи условной минимизации, определяем параметры разложения: $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i$.

3. Результаты расчетов

Определив оптимальные значения определяющих параметров (таблица 1), получаем формулы полуаналитического решения нашей задачи:

$$u(x,y,\alpha)=\frac{(x^2+y^2-1)(9-y^2)}{216}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2], \tag{15}$$

$$v(x,y,\alpha)=\frac{(x^2+y^2-1)(9-y^2)}{216}\sum_{i=1}^{N}\beta_i[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2], \tag{16}$$

$$p(x,y,\gamma)=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2], \tag{17}$$

Используя программный комплекс $Mathcad$, рассчитываем поле скоростей и давлений в области течения вязкой несжимаемой жидкости.

Оптимальные значения коэффициентов разложения (Таб.1)

$\alpha=$

	1
1	0.015
2	0.315
3	0.005
4	-0.019
5	0.015
6	-0.028
7	-0.002
8	-0.079
9	-0.01
10	-0.096
11	-0.01
12	-0.078
13	-0.002
14	-0.027
15	0.015
16	0.313
17	0.005
18	-0.019
19	0.015
20	-0.029
21	-0.002
22	-0.081
23	-0.011
24	-0.098
25	-0.011
26	-0.081
27	-0.003
28	-0.03
29	-0.02
30	-0.121
31	-0.02
32	-0.126

$\beta=$

	1
1	-0.021
2	-0.053
3	0.004
4	-0.021
5	0.005
6	-0.022
7	0.009
8	-0.01
9	0.01
10	-0.01
11	0.008
12	-0.018
13	0.006
14	-0.023
15	0.004
16	-0.025
17	0.005
18	-0.034
19	0
20	-0.012
21	0.012
22	0.014
23	0.016
24	0.014
25	0.014
26	0.004
27	0.012
28	0.026
29	0.027
30	0.079
31	0.032
32	0.068

$\gamma=$

	1
1	0.011
2	-0.005
3	0.011
4	-0.005
5	0.011
6	-0.006
7	0.011
8	-0.008
9	0.01
10	-0.011
11	0.01
12	-0.013
13	0.009
14	-0.015
15	0.008
16	-0.016
17	0.008
18	-0.016
19	0.008
20	-0.015
21	0.009
22	-0.013
23	0.01
24	-0.01
25	0.01
26	-0.008
27	0.011
28	-0.006
29	0.01
30	-0.011
31	0.01
32	-0.01

Получаем векторное поле течения (рис.3).

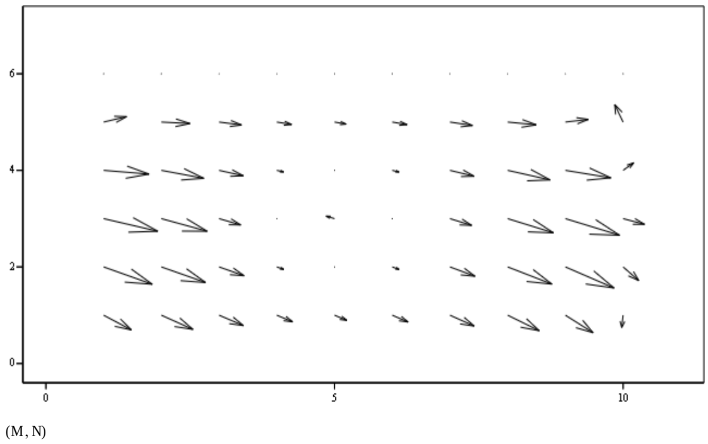

Рис.3. Векторное поле течения при числе Рейнольдса 5000

А по разным сечениям канала, компоненты скоростей изменяются по следующему правилу, рис. 4-8

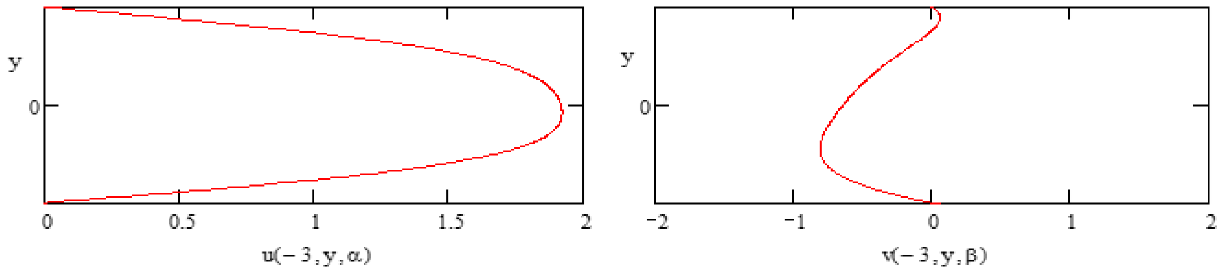

Рис.4. Компоненты скорости при $x = -3$

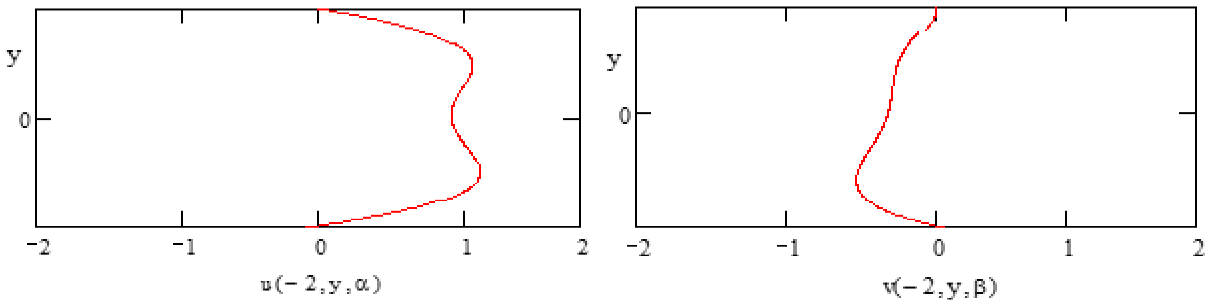

Рис.5. Компоненты скорости при $x = -2$

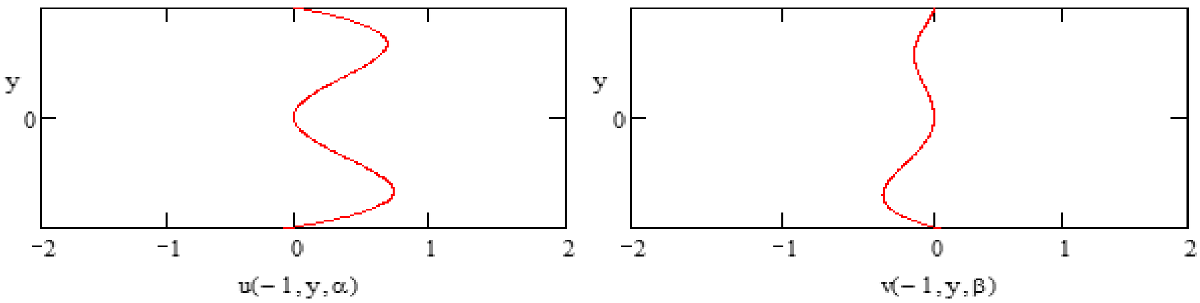

Рис.6. Компоненты скорости при $x = -1$

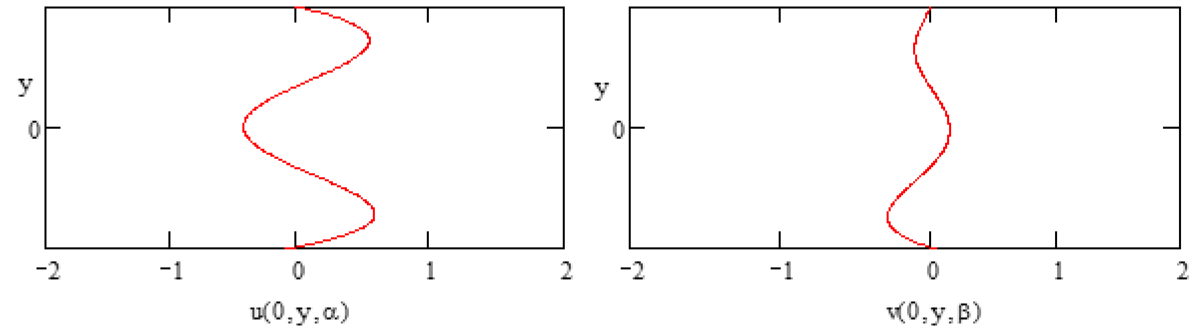

Рис.7. Компоненты скорости при $x = 0$

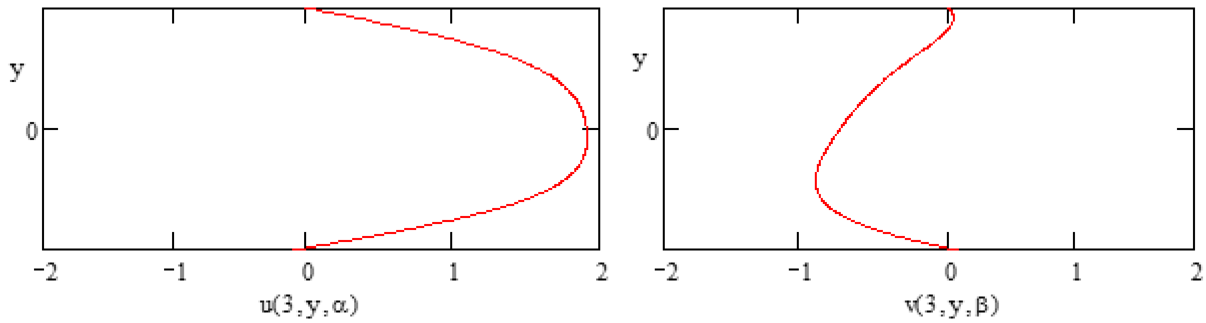

Рис.8. Компоненты скорости при $x = 3$

Как явствует из сравнения результатов расчета с известными результатами расчетов другими методами и с результатами известных экспериментов [5 – 8], ROG метод хорошо работает для стационарных задач.

ლიტერატურა - References – Литература:

1. Рвачёв В.Л. (1982). Теория - функций и некоторые её приложения, Киев, Наукова думка.

2. Обгадзе Т.А. (1989). Применение методов $R-$функций и $\Psi-$преобразования для решения операторных уравнений, Сообщения АН ГССР, т.136, №1.

3. Обгадзе Т.А. (1983). Об одном методе решения задач теории обтекания тел вязкой жидкостью, Сборник науч. трудов ГПИ им. В.И. Ленина, сер. МСС, №6(262), Тбилиси.

4. Обгадзе Т.А. (1989). Элементы математического моделирования, Учебное пособие, министерство высшего и среднего образования ГССР, ГПИ им. В.И. Ленина.

5. Обгадзе Т.А. (2006). The inverse variation Kupradze-Brebbia formulation for the Navier-Stokes equations. Georgien Electronic Scientific Journals, Computer Sciences and Telecommunications, № 2(9).

6. Обгадзе Т.А., Пескова М.В. (2000). Применение метода регулярных источников OG для расчета течения в пограничном слое над уличными каньонами. Тезисы докладов Воронежского симпозиума "Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках" Воронеж, 20-27 января.

7. Fletcher C.A. (1982). Burger's equation: a model for all reasons. In: Numerical solution of partial differential equations. Ed. J.Noye. North-Holland.

8.Обгадзе Т.А., Прокошев В.Г. (1999). Вычислительная физика, Учебное пособие, ВлГУ, Владимир.

SOLUTION OF THE STATIONARY PROBLEM OF THE FLOW OF THE CIRCULAR CYLINDER VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID BY ROG METHOD

Obgadze Tamaz
Georgian Technical University

Summary

In work the algorithm, numerical calculation of the defining parameters of a stationary current of viscous, incompressible liquid round engineering constructions, a difficult geometrical configuration is under construction. For the accounting of a condition of sticking of liquid to walls of streamline constructions, the RO method of Rvachev-Obgadze, and as basic functions is applied, regular sources of Obgadze-Gabrichidze OG are used. Substituting the taught decomposition in Navier-Stokes's equations and meeting kinematic conditions, we receive not knitting of a problem of a flow of constructions of a difficult geometrical form. The received not knitting for each equation we write down on norm $L_2(G)$, where G area of the studied current. The constructed algorithm of calculation is based on the ROG method of Rvachev-Obgadze-Gabrichidze's.

წრიული ცილინდრის ბლანტი უკუმში სითხით სტაციონარული გარსდენის ამოცანის ამოხსნა ROG მეთოდით

თამაზ ობგაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ნაშრომში შემუშავებულია, რთული გეომეტრიული ფორმის საინჟინრო ნაგებობების ბლანტი უკუმში სითხით გარსდენისას, განმსაზღვრელი პარამეტრების გათვლის ალგორითმი. ბლანტი სითხის საზღვართან მიკვრის პირობების გათვალისწინება ხდება რვაჩოვ-ობგაძის RO მეთოდით, ხოლო ბაზისურ ფუნქციებად გამოიყენება ობგაძე-გაბრიჩიძის რეგულარული წყაროს ტიპის OG ფუნქციები. განმსაზღვრელი პარამეტრების მიღებული გაშლის ფორმულების ჩასმით ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემაში უკუმში სითხის შემთხვევაში და კინემატიკური პირობების დაკმაყოფილებით, მიიღება რთული გეომეტრიული ფორმის საინჟინრო ნაგებობების გარსდენის ამოცანის ცდომილების ფუნქციები. ცდომილების მიღებული ფუნქციები ჩაიწერება $L_2(G)$-ს ნორმით, სადაც G შესასწავლი ნაკადის კომპაქტია. შემუშავებული ალგორითმი დაფუძნებულია რვაჩოვ-ობგაძე-გაბრიჩიძის ROG მეთოდზე.