ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირება სინერგეტიკის მეთოდებით

ვალიდა სესაძე, ვლადიმერ კეკენაძე, გელა ჭიკაძე,
ნანა მაღლაკელიძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

დინამიკური სისტემების თანამედროვე თეორიაში ბოლო პერიოდში სწრაფად ვითარება და განსაკუთრებული ადგილი უკავიათ დისიპატიურ სისტემებს. ნაშრომში განხილულია ჩაკეტილი ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების სინთეზი. კერძოდ, ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების პრობლემა განხილულია სინერგეტკის მეთოდების გამოყენებით, რომელსაც საფუძვლად უდევს ლეტოვ-კალმანის მეთოდი და დინამიკური სისტემების ასიმპტოტური მდგრადობის აუცილებელი პირობა. ნაჩვენებია, რომ ამ ამოცანის გადაწყვეტისას დამოუკიდებელი პრობლემაა შესაბამისი ხარისხის კრიტერიუმის ფორმირება. ოპტიმალური მართვის სინთეზის შემოთავაზებულ მეთოდს გააჩნია თვისებები, რომლებიც განასხვავებს მას არსებული ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების მეთოდებისაგან. ეს საკითხი განეკუთვნება მართვის ზოგადი სინერგეტიკული თეორიის ერთ-ერთ საკვანძო საკითხს.

1. შესავალი

თანამედროვე ეტაპზე ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონ-სტრუირების ამოცანა წარმოადგენს ოპტიმალური მართვის სისტემების მნიშ-ვნელოვან ამოცანას. ამ ამოცანების გადაწყვეტისას მნიშვნელოვანია ახალი მეთოდების შემუშავება, რომლებშიც ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანა ეფუძნება მართვის თანამედროვე სინერგეტიკის თეორიას.

სტატიაში განხილულია ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების სინთეზის მეთოდი, რომელსაც საფუძვლად უდევს ლეტოვ-კალმანის მეთოდი და დინამიკური სისტემების ასიმპტოტური მდგრადობის აუცილებელი პირობა [1,2].

ასეთ მიდგომას გააჩნია არსებითი თეორიული მნიშვნელობა, რადგანაც ოპტ-იმალური მართვის სინთეზის პროცედურა საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ კავშირი ოპტიმალურ მართვის ჩაკეტილ სისტემებსა და ფუნდამენტალურ ფიზიკურ პროცესებს შორის. ეს კავშირი საშუალებას გვაძლევს მოვახდინოთ მართვის ოპტიმალური დისიპატიური სისტემების ახალი კლასიფიკაცია, რომლებიც დაფუძნებულია ბუნების ფუნდამენტალურ კანონებზე. ასეთი მიდგომა პასუხობს მართვის თეორიის განვითარების თანამედროვე დონეს.

სტატიაში განხილულია ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონ-სტრუირების ამოცანის გადაწყვეტის ერთ-ერთი მეთოდი, რომელიც ეყრდნობა დისიპატიური სისტემების თვისებას, რომელიც წარმოადგენს ოპტიმალური მართვის სინერგეტიკული თეორიის საკვანძო საკითხს.

2. ძირითადი ნაწილი

დავუშვათ მართვის ობიექტი აღიწერება დიფერენციალური განტოლებებით, რომელიც ჩაწერილია ვექტორულ-მატრიცული ფორმით:

$$\dot{x} = (t) = f(x) + G(x)u \qquad (1)$$

სადაც $x=(x_1,...,x_n)^T$, $u=(u_1,...,u_n)^T$-შესაბამისად ფაზური კოორდინატებისა და მართვის ვექტორებია; $f(x,u)=(f_1(x,u), f_2(x,u),...f_n(x,u))^T$–ვექტორ-ფუნქციაა; $G(x)=(g_{ij}(x))$-$n\times m$ განზომილების მატრიცაა.

ოპტიმალური მართვის სინთეზის ამოცანა ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სახით: მოიძებნოს მართვის კანონი $u=u(x)$, რომელსაც გადაყავს (1) ობიექტი ნებისმიერი საწყისი $x(0)=x_0$ მდგომარეობიდან ფაზური სივრცის $x=0$ კორდინატთა სათავეში, უზრუნველყოფს ჩაკეტილი სისტემის ასიმპტოტურ მდგრადობას და მინიმუმს ანიჭებს შემდეგი სახის ფუნქციონალს

$$I = \int_0^\infty \left(F_0\left(x\right) + \left\langle u, Du \right\rangle \right) dt \, . \qquad (2)$$

აქ $F_0(x)$– ნიშანგანსაზღვრული x -ის მიმართ დადებითი ფუნქციაა. $D=diag(d_{ii})$ განტოლების დიაგონალური მატრიცაა.

ოპტიმალური მართვის სინთეზის ფორმულირებული ამოცანა წარმოადგენს ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ცნობილ ამოცანას [1]. ოპტიმალური სისტემების სინთეზის ყველაზე გავრცელებული პროცედურაა ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების პროცედურა, რომელიც დაფუძნებულია დინამიკური პროგრამირების მეთოდზე. წარმოდგენილი პროცედურის მთავარ ნაწილს წარმოადგენს ფუნქციონალური განტოლების ამონახსნის მოძებნა გარკვეული – დადებითი ფუნქციის სახით, რომელიც წარმოადგენს ლიაპუნოვის ოპტიმალურ ფუნქციას ჩაკეტილი ოპტიმალური მართვის სისტემებისათვის. რეგულატორები რომლებიც აგებული არიან ლიაპუნოვის ოპტიმალური ფუნქციების საფუძველზე უზრუნველყოფენ ასიმპტოტურ მდგრადობას და კონსტრუირებული სისტემების ხარისხის ფუნქციონალს ანიჭებენ ოპტიმალურობის თვისებას.

მართვის წრფივი სტაციონალური ობიექტების შემთხვევაში, ლიაპუნოვის ოპტიმალურ ფუნქციას ირჩევენ $v(x)=x^TCx$ სახით. თუ ასეთ ფორმას ჩავსვამთ ძირითად ფუნქციონალურ განტო ლე ბაში და კოეფიციენტების გავუტოლებთ ნულს, ბაზური კოორდინატების მიმართ მივიღებთ სხვადასხვა ხარისხის მქონე რიკატის ტიპის არაწრფივი ალგებრული განტოლებათა სისტემას. ასეთი ტიპის განტოლებებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდების შეფასება და მათთან დაკავშირებული პრობლემები აღწერილია ნაშრომში [3].

მართვის წრფივი არასტაციონალური ობიექტებისათვის ლაპუნოვის ფუნქცია კვადრატული ფორმის $v(x)=x^TC(t)x$ ფუნქციაა. ასეთ შემთხვევაში მიიღება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა რიკატის ტიპის სისტემა, რომლის საწყისი პირობა განისაზღვრება ფუნქციონალის ტერმინალური წევრის მიხედვით. მისი ამოხსნა შესაძლებელია ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლე ბების

ინტეგრირების რიცხვით მეთოდებით (ეილერის, რუნგე-კუტას და ა.შ.). არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების შემთხვევაში ამოხსნის პროცედურას გააჩნია სიძნელეები, როგორიცაა სიზუსტე, მდგრადობა და ა.შ.

თუ მართვის ობიექტი აღიწერება რთული არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემით (1), მაშინ ლიაპუნოვის ოპტიმალური ფუნქციის განსა-ზღვრის მეთოდი დაკავშირებულია ძირითადი ფუნქციონალური განტოლების ამოხსნის აუცილებლობასთან. ასეთი კლასის განტოლებების ამონახსნის მოძებნა კი დაკავშირებულია დიდ სიძნელეებთან [4].

მართვის არაწრფივი ობიექტების ოპტიმალური ალგორითმების სინთეზის პრობლემის გადაწყვეტამ მიგვიყვანა ორაკ-ის ისეთი მეთოდის შექმნასთან, რომელშიც სინთეზის ამოცანა დაიყვანება კერძოწარმობულებიანი წრფივი განტოლების ამოხსნამდე.

როგორც აღვნიშნეთ, ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუი-რების ლეტოვ-კალმანის მეთოდი დაფუძნებულია ლიაპუნოვის წონასწორობის თეორიისა და ოპტიმალური მართვის თეორიის ერთობლივი გამოყენების კონცეპციაზე. ავტომატური მართვის ამ ორი ძირითადი მიმართულების შერ წყმამ შესაძლებელი გახადა ლიაპუნოვის ოპტიმალური ფუნქციის შემოტანა. ეს ნიშნავს, რომ მართვის ოპტიმალური ჩაკეტილი სისტემების ტრაექტორიები მის ფაზურ სივრცე ში მიიზიდება მდ გრა დი წონასწორობის ამ წერტილისკენ-ატრაქტორისკენ.

სინთეზირებული ოპტიმალური მართვის ჩაკეტილი სისტემა ზოგად შემთხვევაში თვითონ წარმოადგენს დინამიკურ სისტემას, რომლებიც აღიწერება წრფივი დიფერენციალურ ვექტორულ-მატრიცული განტოლებით

$$\dot{x}(t) = \varphi(x)\,, \tag{3}$$

სადაც $\varphi(x) = f(x) + G(x)u(x)$; $u(x)$ –ოპტიმალური მართვის ვექტორია.

(3) სისტემის ფაზური ტრაექტორიების ყოფაქცევა ხასიათდება ვექტო-რული ველით $\varphi(x) = (p_1(x),..., p_1(x))^T$. ამიტომ ტრაექტორიის შესასწავლად მოცე-მული სისტემის ფაზურ სივრცეში შეიძლება შემოვიტანოთ ველის თეორიის ზოგიერთი მაჩვენებლები. კერძოდ, რადგანაც ჩაკეტილი ოპტიმალური სისტემა ასიმპტოტურად მდგრადია, ამიტომ მისი ტრაექტორიის ყოფაქცევის შესაფა-სებლად ყველაზე უფრო მისაღებია ისეთი მაჩვენებლის შემოტანა, როგორიცაა ვექტორის დივერგენცია $\varphi(x)(div\varphi(x))$. რომელიც ახასიათებს ფაზური ტრაექ-ტორიების კლებადობას წონასწორობის მდგრადი წერტილის შემოგარენში.. ჩაკეტილი ოპტიმალური სისტემა (3), სინთეზირებული ლეტოვ-კალმანის ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების მეთოდი დისიპატიურია. ე.ი. სრულდება უტოლობა

$$div\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\bigg|_{x \in \Omega} < 0, \tag{4}$$

ჩაკეტილი ოპტიმალური სისტემა (3), რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობა (4)-ს, ვუწოდებთ ჩაკეტილ ოპტიმალურ დისიპატიურ სისტემას. ასე, რომ დისიპატიური სისტემებისათვის დივერგენცია (4) ყოველთვის უარყოფითი სიდიდეა, რომელიც ახასიათებს ფაზური მოცულობის შეკუმშვის სიჩქარეს. ასეთ შემთხვევაში ყველა

ტრაექტორია ფაზურ სივრცეში აუცილებლად შეიკრიბება (მიიზიდება) რომელიმე მიმზიდავი სიმრავლისკენ – ატრაქტორისკენ, ხოლო მისი განზომილებები ყოველთვის ნაკლებია საწყისი სისტემის განზომილებებზე.

განვიხილოთ მაგალითი, რომლიც გვაძლევს საშუალებას შევაფასოთ მართვის ოპტიმალური დისიპატიური სისტემების სინთეზის მეთოდის ეფექტურობა ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების კლასიკურ მეთოდთან შედარებით.

განვიხილოთ ობიექტი, რომელიც აღიწერება დიფერენციალური განტოლებათა სისტემით

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \dot{x}_2(t) = u \,. \tag{5}$$

ხარისხის კრიტერიუმს აქვს შემდეგ სახე

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt \tag{6}$$

ჩავწეროთ ძირითადი ფუნქციონალური განტოლება შემდეგი სახით:

$$\min_u \left[x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + u \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + u^2) \right] = 0 \tag{7}$$

(7) განტოლებაში მინიმუმი u-ს მიმართ მიიღწევა მაშინ, როცა

$$u = -\frac{\partial u}{\partial x_2} \quad . \tag{8}$$

(7) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$2x_2 \frac{\partial x}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial x}{\partial x_2} \right)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \tag{9}$$

(5) სისტემა (8) ჩაკეტილი მართვით შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \dot{x}_2(t) = -\frac{\partial v}{\partial x_2} \tag{10}$$

(10) სისტემის დისიპატიურობა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} - \frac{\partial x_2}{\partial x_2} < 0 \tag{11}$$

ან შემდეგი განტოლების სახით

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - c = 0 \tag{12}$$

(12) განტოლებას გააჩნია კანონიკური სახე, ამიტომაც არ არის აუცილებელი x_1, x_2, კორდინატებიდან გადავიდეთ y_1, y_2, კორდინატებზე.

(12) განტოლების ინტეგრირებით მივიღებთ

$$v = \frac{1}{2}cx_2^2 + q_1(x_1)x_2 + q_2(x_1) \tag{13}$$

(13) ჩავსვათ (9)-ში მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას.

$$x_2^2 \frac{dq_1}{dx_1} + x_2 \frac{dq_2}{dx_1} - \frac{1}{2}c^2 x_2^2 - cx_2 q_1 - \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = 0 \tag{14}$$

(14) განტოლების მიმართ გამოვიყენოთ კოორდინატული ჩანაცვლების პროცედურა

$$x_2^2 : \frac{dq_1}{dx_1} - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2} = 0 \tag{15}$$

$$x_2^1 : \frac{dq_2}{dx_1} - cq_1 = 0 \tag{16}$$

$$x_2^0 : -\frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 = 0 \tag{17}$$

ამოვხსნათ (17) განტოლება q_1-ის მიმართ, მივიღებთ

$$q_1 = \pm\, x_1 \tag{18}$$

დავუშვათ $q_1 = x_1$, მაშინ (15)-დან მივიღებთ განტოლებას $c = \pm\sqrt{3}$. დავუშვათ $c = \sqrt{3}$, მაშინ (16)-დან მივიღებთ

$$q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1^2 + r \tag{19}$$

სადაც r – ერთგვარი კონსტანტაა, q_1, q_2-ის ჩასმით (13)-ში მივიღებთ

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2^2 + x_1x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1^2 + r \tag{20}$$

სასაზღვრო პირობიდან მივიღებთ, როცა $r = 0$. მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2^2 + x_1x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1^2 \tag{21}$$

მართვის ოპტიმალურ კანონს ექნება სახე

$$u = -\sqrt{3}x_2 - x_1 \tag{22}$$

მიღებული (22) მართვის კანონი ზუსტად ემთხვევა [1,2] ლეტოვის მიერ მიღებულ კანონს.

განხულული მაგალითიდან ჩანს ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების სინთეზის უპირატესობა ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების კლასიკურ მეთოდთან შედარებით. დისიპატიური სისტემები და ოპტიმალური დისიპატიური სისტემები მნიშვნელოვან როლს ასრულებს როგორც დინამიკური სისტემების ზოგად, ასევე მართვის სინერგეტიკის თეორიაში [1,2].

რასაკვირველია ეს მიდგომა მოითხოვს შემდგომ განვითარებას მართვის სისტემების სხვადასხვა კლასებთან მიმართებაში.

3. დასკვნა

ნაშრომში ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების პრობლემა განხილულია სინერგეტკის მეთოდების გამოყენებით. ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების სინთეზის მეთოდს საფუძვლად დაედო ლეტოვ-კალმანის მეთოდი და დინამიკური სისტემების ასიმპტოტური მდგრადობის აუცილებელი პირობა. ასეთი მიდგომა პასუხობს მართვის თეორიის განვითარების თანამედროვე დონეს.

ლიტერატურა:

1. Летов А.М. (1969). Динамика полета и управление. М.: Наука.
2. Колесников А.А. (1994). Синергетическая теория уавления. М.: Энергоатомиздат.
3. გუგუშვილი ა., ხუროძე რ., იმედაძე თ., გარგი დ. (2003). მართვის თეორია. სინერგეტიკა. მე-3 ნაწ., სტუ, თბილისი.
4. სესაძე ვ., სესაძე ნ., მაღლაკელიძე ნ. (2008). სინერგეტიკა, არაწრფივი სისტემე-ბის სინთეზი. სტუ. თბილისი.

ANALYTICAL DESIGNING OPTIMAL REGULATORS WITH METHODS OF SYNERGETRICS

Sesadze Valida, Kekenadze Vladimer, Chikadze Gela,
Maglakelidze Nana
Georgian Technical Universitat

Summary

In this paper synthesis of the closed optimal dissipative control systems is considered, in particular, the problem of analytical designing of optimal regulators is solved with use of synergetic methods. It is shown that at solutions a considerable and independent problem is formation of criteria of the corresponding quality. Let's – Kallmann's method and a necessary condition of asymptotic stability of dynamic systems is the cornerstone of the considered method. It is shown benefits of efficiency of a method of synthesis of optimal dissipative systems in comparison with classical methods of analytical designing of optimal regulators.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ МЕТОДАМИ СИНЕРГЕТИКИ

Сесадзе В., Кекенадзе В., Чикадзе Г., Маглакелидзе Н.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассматривается синтез замкнутых оптимальных диссипативных систем управления, в частности, проблема аналитического конструирования оптимальных регуляторов решена с использованием синергетических методов. Показано, что при решенний зтои задачи значительной и независимой проблемой является формирование критериев соответствующего качества. В основе рассматриваемого метода лежит метод Летова - Калмана и необходимое условие асимптотической устойчивости динамических систем. Показана преимущества эффективности метода синтеза оптимальных диссипативных систем по сравнению с классическими методами аналитического конструирования оптимальных регуляторов.