

## სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა რეაქოვ-ობგადის RO მეთოდით

თამაზ ობგამე, ვერა ქორთიევა  
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

### რეზიუმე

განხილულია რეაქოვ-ობგადის RO მეთოდი. აგებულია მრავლადბმული საზღვრის განტოლების შედგენის ალგორითმი, რისთვისაც გამოყენებულია ობგადის ჰომომორფიზმები. შემუშავებულია დიფერენციალურ განტოლებებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის ალგორითმები, რომლებიც შემოწმებულია რიგი ტესტური ამოცანების რიცხვითი ამოხსნით Mathcad-ის ბაზაზე. განხილულია კომის ამოცანა პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის, შესწავლილია კვადრატული კვების მილში სითხის დინების ამოცანა, ამოხსნილია სასაზღვრო ამოცანა სითბოგამტარობის ერთ-განზომილებიანი არასტაციონარული განტოლებისათვის და შესწავლილია ბიურგერის განტოლების რიცხვითი ამონახსნი RO მეთოდით. რიცხვითი ამონახსნის შედეგები შედარებულია ცნობილ ზუსტ და სხვა მეთოდებით ამოხსნილ შედეგებთან. მოცემულია აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებების სიდიდეები.

**საკვანძო სიტყვები:** რეაქოვ-ობგადის RO მეთოდი. ცდომილება. ჰომომორფიზმი.

### 1. რეაქოვ-ობგადის ფუნქციების აგების დიაგრამა და საზღვრის ანალიზური კოდირების RO-მეთოდი

პრაქტიკაში, ხშირად, ვხვდებით ცვლადების შემცველ გამონათქვამ-ფუნქციებს: „x რაციონალური რიცხვია”, „y კეთილი ადამიანია”. . .

**განსაზღვრება:** ცვლადის შემცველ გამონათქვამებს პრედიკატებს უწოდებენ.

ხარკოველმა ინჟინერმა რეაქოვმა შექმნა გეომეტრიული კოდირების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელსაც **R-ფუნქციის** მეთოდს უწოდებენ. შემდგომში, ეს ფუნქციები გამოყენებული იქნა მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამოხსნისათვის [1].

მოგვიანებით, R-ფუნქციის მეთოდი თამაზ ობგადის მიერ გადაყვანილ იქნა თანამედროვე ალგებრის ენაზე [2], რამაც საშუალება მოგვცა მათემატიკური სიზუსტით ჩამოყალიბებულიყო R-ფუნქციის აგების ალგორითმი და განზოგადებულიყო მრავლადბმული არეების შემთხვევისათვისაც.

ახლა გადავიდეთ R-ფუნქციის აგების ალგორითმზე, რომელსაც წარმოვადგენთ დიაგრამის საშუალებით **ბულის ალგებრების კატეგორიაში**, სადაც მორფიზმები ინდუცირებულია **ბუნებრივი ჰომომორფიზმებით**:

$$L_1 \rightarrow L_p \rightarrow L_R, \quad (1)$$

სადაც  $L_1$  არის სიმრავლეებზე აგებული ბულის ალგებრა;  $L_p$  – პრედიკატებზე აგებული ბულის ალგებრა;  $L_R$  – რეაქოვის ფუნქციების ბულის ალგებრა. ისრებით აღნიშნულია ბუნებრივი ჰომომორფიზმები.

განვიხილოთ ეს ალგორითმი კონკრეტულ მაგალითზე. ვთქვათ, გვსურს ავაგოთ რთული წირის განტოლება, მაშინ როცა ვიცით თუ, მისი ნაწილები რომელი ფუნქციების გრაფიკებია (ნახ.1)



ნახ.1. ორი წრეწირი R და r რადიუსებით

ჩვენი ამოცანაა შევადგინოთ ისეთი ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს მხოლოდ ამ ორი წრეწირის საზღვარზე.

(1) დიაგრამიდან გამომდინარე, ჯერ  $L_1$  სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში ვაგებთ საყრდენ სიმრავლებებს ანუ იმ სიმრავლებებს, რომელთა საშუალებითაც შეგვიძლია სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აღვწეროთ საძებნი წერტილების სიმრავლე.

$$\Omega_1 = \{(x, y) | (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 \geq 0\}, \quad (2)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2 \geq 0\}, \quad (3)$$

$$\Omega_3 = \{(x, y) | (x - c)^2 + (y - d)^2 - r^2 \geq 0\}, \quad (4)$$

$$\Omega_4 = \{(x, y) | r^2 - (x - c)^2 - (y - d)^2 \geq 0\}. \quad (5)$$

ეს ის სიმრავლებებია, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება ავაგოთ საძებნი ფუნქციის სიმრავლური განტოლება:

$$\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4). \quad (6)$$

საყრდენი სიმრავლებების აგებისას, ვიყენებთ შესაბამისობას „მეტია ან ტოლი ნულზე“, რაც ამ შემთხვევაში საჭიროა, რათა შევძლოთ ჰომომორფიზმების საშუალებით სიმრავლეთა ბულის ალგებრიდან გადავიდეთ პრედიკატთა ბულის  $L_p$  ალგებრაში. მართლაც, ბუნებრივი ჰომომორფიზმის საშუალებით  $L_p$ -ში მივიღებთ საძებნელი წირის პრედიკატულ განტოლებას:

$$P = (P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge P_4), \quad (7)$$

სადაც  $P_1$  – გამონათქვამია  $x_1 \geq 0$ ,

$P_2$  – გამონათქვამია  $x_2 \geq 0$ ,

$P_3$  – გამონათქვამია  $x_3 \geq 0$ ,

$P_4$  – გამონათქვამია  $x_4 \geq 0$ ,

$$x_1 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2;$$

$$x_2 = R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2;$$

$$x_3 = (x - c)^2 + (y - d)^2 - r^2; \quad (8)$$

$$x_4 = r^2 - (x - c)^2 - (y - d)^2.$$

ახლა გადავიდეთ  $L_R$ -ში რეაჩოვის ჰომომორფიზმებით:

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i + x_j + \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i + x_j - \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ \neg P_i \Leftrightarrow -x_i \end{cases} \quad (9)$$

მივიღებთ  $R$  – ფუნქციას შემდეგი სახით:

$$R = (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2}) \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{x_3^2 + x_4^2} + \sqrt{(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2})^2} \quad (10)$$

სადაც გათვალისწინებული უნდა იყოს (8) თანადობები.

ისეთ შემთხვევებში, როცა ზუსტადაა ცნობილი ბმის რამდენიმე ელემენტის მქონე წირის შემადგენელი ელემენტების განტოლებები, უფრო მიზანშეწონილია **ობგადის ჰომომორფიზმები** [2] **სტრუქტურებს შორის**:

$$K_1 \rightarrow K_p \rightarrow K_R, \quad (11)$$

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i \cdot x_j \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i^2 + x_j^2 \end{cases} \quad (12)$$

აქ გვაქვს შესაბამისობა: „ჭეშმარიტი“  $\Leftrightarrow$  „უდრის ნულს“;  
„მცდარი“  $\Leftrightarrow$  „არ უდრის ნულს“.

განხილული მაგალითის შემთხვევაში, საყრდენი სიმრავლეები იქნება:

$$\Omega_1 = \{(x, y) | (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0\}, \quad (13)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | (x - c)^2 + (y - d)^2 - r^2 = 0\}. \quad (14)$$

მაშინ,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2; \quad (15)$$

$$\text{ე.ი. } P = P_1 \vee P_2; \quad (16)$$

სადაც

$$P_1 - \text{გამონათქვამია } (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0, \quad (17)$$

$$P_2 - \text{გამონათქვამია } (x - c)^2 + (y - d)^2 - r^2 = 0; \quad (18)$$

ე.ი.

$$RO = [(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2] \cdot [(x - c)^2 + (y - d)^2 - r^2].$$

როგორც ვხედავთ, **ობგადის** [2] **ჰომომორფიზმები** საგრძნობლად ამარტივებს საძიებელი მრავლადბმული წირის ანალიზურ განტოლებას.

ასევე, რიგ შემთხვევებში მნიშვნელოვნად მარტივდება  $R$ -ფუნქციის ანალიზური სახეც [3,4]. ამიტომ, მიღებულ ალგორითმს რვაჩოვ-ობგადის **RO – მეთოდს** უწოდებენ.

## 2. კომის ამოცანის ამოხსნა პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის რვაჩოვ-ობგადის RO – მეთოდით

**რვაჩოვ-ობგადის RO – მეთოდის** ინტერპრეტაციისათვის, განვიხილოთ მარტივი დიფერენციალური განტოლება [6]:

$$\frac{dy}{dx} - y = 0, \quad (19)$$

სასაზღვრო საწყისი პირობით:

$$y(0) = 1. \quad (20)$$

ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ  $G[0; 1]$  შუალედში.

ცხადია, რომ ამ ამოცანის ზუსტ ამონახსნს აქვს სახე:  $y = e^x$ , რაც ადვილი შესამოწმებელია (19) განტოლებაში ჩასმით.

ავაგოთ ახლა მიახლოებითი ამონახსნი რვაჩოვ-ობგაძის RO –მეთოდით. ამისათვის ამოვირჩიოთ უმარტივესი ბაზისური ფუნქციების სისტემა:

$$\varphi_j(x) = x^j. \quad (21)$$

ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$y_\alpha = 1 + \sum_{j=1}^N \alpha_j x^j. \quad (22)$$

ცხადია, რომ ამ გამოსახულების პირველი წევრი არჩეულია სასაზღვრო (20) პირობიდან გამომდინარე. ადვილი მისახვედრია, რომ (22) წარმოდგენა შეგვიძლია გადავწეროთ (23) შემდეგნაირად:

$$y_\alpha = \sum_{j=0}^N \alpha_j x^j, \quad (23)$$

სადაც  $\alpha_0 = 1$ .

(23) გამოსახულება ჩავსვათ (19) განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ  $R$  ცდომილებას შემდეგი სახით:

$$R(x, \alpha) = -1 + \sum_{j=1}^N \alpha_j (jx^{j-1} - x^j). \quad (24)$$

კოლოკაციის მეთოდით ამოხსნისას, ცდილობენ რომ  $\alpha_j$  კოეფიციენტების საპოვნელად გამოიყენონ განტოლებათა სისტემა:

$$R(x_k, \alpha) = 0, \quad x_k \in G[0; 1], \quad k = \overline{1, N}. \quad (25)$$

ცხადია, რომ რაც მეტ წერტილს ავიღებთ კოლოკაციის მეთოდში, მით უფრო ზუსტი იქნება ამონახსნი, თუმცა, წერტილების რაოდენობის გაზრდა იწვევს განტოლებათა სისტემის რიგის გაზრდას, რაც ხშირად გვამძლევს ცუდად განპირობებულ მატრიცას (წრფივი ოპერატორების შემთხვევაში), ეს კი თავის მხრივ, ართულებს ამოცანის ამოხსნის საჭირო სიზუსტით შესრულებას. ამიტომ შემუშავებული იქნა ალტერნატიული **რვაჩოვ-ობგაძის მეთოდი**.

რვაჩოვ-ობგაძის მეთოდით ამოხსნისას, გაშლის  $\alpha_j$  კოეფიციენტების საპოვნელად იყენებენ  $L_2(G)$  ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს  $R(x, \alpha)$  ფუნქციასა და 0-ს შორის მანძილის მინიმუმაციის პირობიდან:

$$I(\alpha) = \int_0^1 (R(x, \alpha) - 0)^2 dx \rightarrow \min. \quad (26)$$

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**-ზე და შევადაროთ რვაჩოვ-ობგაძის RO მეთოდით მიღებული ამონახსნი ზუსტ ამონახსნს. შევაფასოთ აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებები:

ORIGIN := 1

N := 3

$$R(x, \alpha) := -1 + \sum_{j=1}^N [\alpha_j (j \cdot x^{j-1} - x^j)] \quad I(\alpha) := \int_0^1 (R(x, \alpha))^2 dx$$

i := 1.. N

$\alpha_i := 0$

Given

$$S_{\alpha} := \text{Minimize}(I, \alpha)$$

$$S = \begin{pmatrix} 1.013 \\ 0.425 \\ 0.28 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i := S$$

$$y(x) := e^x \quad f(x) := 1 + \sum_{i=1}^N (\alpha_i \cdot x^i)$$

$$x := 0.1, 0.2, \dots, 1$$

$$e^x =$$

1.105
1.221
1.35
1.492
1.649
1.822
2.014
2.226
2.46
2.718

$$f(x) =$$

1.106
1.222
1.35
1.491
1.648
1.821
2.014
2.226
2.46
2.718

აბსოლუტური ცდომილება:

$$|e^x - f(x)| =$$

$6.694 \cdot 10^{-4}$
$4.658 \cdot 10^{-4}$
$9.576 \cdot 10^{-5}$
$6.225 \cdot 10^{-4}$
$8.571 \cdot 10^{-4}$
$6.915 \cdot 10^{-4}$
$1.828 \cdot 10^{-4}$
$4.293 \cdot 10^{-4}$
$7.036 \cdot 10^{-4}$
$2.431 \cdot 10^{-5}$

ფარდობითი ცდომილება:

$$\frac{|e^x - f(x)|}{e^x} =$$

$6.057 \cdot 10^{-4}$
$3.813 \cdot 10^{-4}$
$7.094 \cdot 10^{-5}$
$4.173 \cdot 10^{-4}$
$5.199 \cdot 10^{-4}$
$3.795 \cdot 10^{-4}$
$9.079 \cdot 10^{-5}$
$1.929 \cdot 10^{-4}$
$2.861 \cdot 10^{-4}$
$8.942 \cdot 10^{-6}$

ამ ორი სვეტის შედარება ნათლად გვიჩვენებს, რომ რეაჩოვ-ობგადის მეთოდი ამ შემთხვევაში, იძლევა საკმაოდ დიდ სიზუსტეს.

### 3. რეაჩოვ-ობგადის მეთოდის გამოყენება კვადრატული კვების მილში

#### ბლანტი სითხის ერთგანზომილებიანი დინების შესასწავლად

ეს ამოცანა დაიყვანება პუასონის განტოლებაზე:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 1 = 0. \tag{27}$$

სასაზღვრო პირობებით:

$$w = 0 \text{ if } x = \pm 1, y = \pm 1. \tag{28}$$

რეაჩოვ-ობგადის მეთოდით ამ ამოცანის ამოსახსნელად, შევადგინოთ შესაბამისი RO-ფუნქცია:

$$RO = (1 - x^2) \cdot (1 - y^2). \quad (29)$$

ცხადია, რომ ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს (28) სასაზღვრო პირობებს. მაშასადამე (27) განტოლების ამონახსნი შეგვიძლია ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$w = RO \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_{ij} \cdot \varphi_{ij}(x, y), \quad (30)$$

სადაც  $\varphi_{ij}(x, y)$  ბაზისური ფუნქციებია, ხოლო  $\alpha_{ij}$  კოეფიციენტებს ვპოულობთ ცდომილების ფუნქციის  $L_2(G)$  ნორმით მინიმიზაციის პირობიდან.

ავირჩიოთ საბაზისო ფუნქციები ისე, რომ არის შიგნით ყველა წევრი არ ხდებოდეს ნულის ტოლი, მაგალითად შემდეგნაირად:

$$\varphi_{ij}(x, y) = (1 - x^2)^{i-1} \cdot (1 - y^2)^{j-1}. \quad (31)$$

მაშინ გვექნება ამონახსნი ფინლეისონის [9] წარმოდგენა:

$$w = \sum_{i=0}^N \alpha_i (1 - x^2)^i \cdot (1 - y^2)^i \quad (32)$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ:

$$w_{xx} = \sum_{i=2}^N \alpha_i \cdot i \cdot (i - 1) \cdot (1 - x^2)^{i-2} \cdot (1 - y^2)^i \cdot (-2x) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot i \cdot (1 - x^2)^{i-1} \cdot (1 - y^2)^i \cdot (-2). \quad (33)$$

რაც შეეხება  $w_{yy}$ -ს მასაც ფუნქციის სიმეტრიულობის გამო, ანალოგიური სახე აქვს (30). მაშასადამე, შეგვიძლია შევადგინოთ  $R(x, y, \alpha)$  ცდომილების ფუნქციის გამოსახულება. ამისათვის (32) უნდა შევიტანოთ პუასონის (27) განტოლებაში და მოვახდინოთ გარდაქმნები:

$$R(x, y, \alpha) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 1 = \sum_{i=2}^N \alpha_i \cdot i \cdot (i - 1) \cdot (1 - x^2)^{i-2} \cdot (1 - y^2)^i \cdot (-2x) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot i \cdot (1 - x^2)^{i-1} \cdot (1 - y^2)^i \cdot (-2) + \sum_{i=2}^N \alpha_i \cdot i \cdot (i - 1) \cdot (1 - y^2)^{i-2} \cdot (1 - x^2)^i \cdot (-2y) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot i \cdot (1 - y^2)^{i-1} \cdot (1 - x^2)^i \cdot (-2) + 1. \quad (34)$$

აქ გაშლის  $\alpha_j$  კოეფიციენტების საპოვნელად ვიყენებთ  $L_2(G)$  ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს  $R(x, y, \alpha)$  ფუნქციასა და 0-ს შორის მანძილის მინიმიზაციის პირობიდან:

$$I(\alpha) = \int_0^1 (R(x, \alpha) - 0)^2 dx \rightarrow \min. \quad (35)$$

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**-ზე და შევადაროთ რვაჩოვ-ობგადის RO მეთოდით მიღებული B ამონახსნი  $w(x, y)$ , გალიორკინის მეთოდით მიღებულ A ამონახსნს  $G(x, y)$ .

$$\begin{aligned} N &:= 3 \\ w_{xx}(x, y, \alpha) &:= \left[ \sum_{i=1}^N \left[ \alpha_i \cdot i \cdot (1 - x^2)^{i-1} \cdot (-2) \cdot (1 - y^2)^i \right] + \sum_{i=2}^N \left[ \alpha_i \cdot i \cdot (i - 1) \cdot (1 - x^2)^{i-2} \cdot (-2 \cdot x) \cdot (1 - y^2)^i \right] \right] \\ w_{yy}(x, y, \alpha) &:= \left[ \sum_{i=1}^N \left[ \alpha_i \cdot i \cdot (1 - y^2)^{i-1} \cdot (-2) \cdot (1 - x^2)^i \right] + \sum_{i=2}^N \left[ \alpha_i \cdot i \cdot (i - 1) \cdot (1 - y^2)^{i-2} \cdot (-2 \cdot y) \cdot (1 - x^2)^i \right] \right] \end{aligned}$$

$$R(x, y, \alpha) := w_{xx}(x, y, \alpha) + w_{yy}(x, y, \alpha) + 1$$

$$G(x, y) := \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \left[ \left( \frac{8}{\pi^2} \right)^2 \frac{(-1)^{\frac{2 \cdot k + 2 \cdot m - 2}{2}}}{(2 \cdot k - 1) \cdot (2 \cdot m - 1) \cdot [(2 \cdot k - 1)^2 + (2 \cdot m - 1)^2]} \cdot \cos \left[ (2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot x \right] \cdot \cos \left[ (2 \cdot m - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot y \right] \right]$$

$$I(\alpha) := \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R(x, y, \alpha)^2 dx dy$$

$$i := 0..N \quad \alpha_i := 0$$

Given

$$\alpha_i := S$$

$$I(\alpha) = 0.272$$

$$w(x, y) := \sum_{i=0}^N \left[ \alpha_i (1 - x^2)^i \cdot (1 - y^2)^i \right]$$

$$i := 0..4 \quad j := 0..4$$

$$x_i := -1 + 0.5 \cdot i$$

$$y_j := -1 + 0.5 \cdot j$$

$$A_{i,j} := G(x_i, y_j)$$

$$B_{i,j} := w(x_i, y_j)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.182 & 0.231 & 0.182 & 0 \\ 0 & 0.231 & 0.297 & 0.231 & 0 \\ 0 & 0.182 & 0.231 & 0.182 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

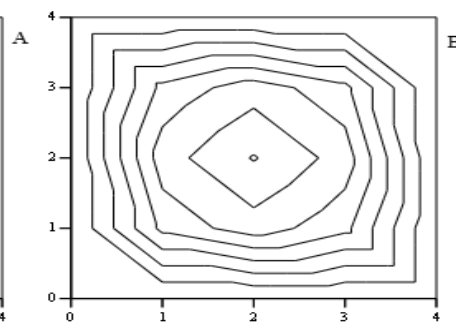
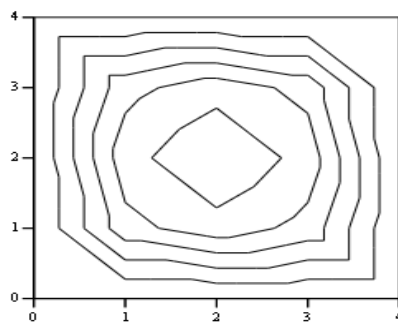
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.215 & 0.278 & 0.215 & 0 \\ 0 & 0.278 & 0.354 & 0.278 & 0 \\ 0 & 0.215 & 0.278 & 0.215 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S := \text{Minimize}(I, \alpha)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.402 \\ -0.021 \\ -0.027 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.032 & 0.047 & 0.032 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.057 & 0.047 & 0 \\ 0 & 0.032 & 0.047 & 0.032 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\max(B - A) = 0.057$$



6sb.2

4. რვაჩოგ-ობგადის მეთოდის გამოყენება არასტაციონარული სითბოგამტარობის ამოცანის ამოსახსნელად

განვიხილოთ სითბოგამტარობის უგანზომილებო განტოლება:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0, \tag{36}$$

საწყისი პირობით:

$$\vartheta(x, 0) = \sin \pi x + x \tag{37}$$

და სასაზღვრო პირობებით:

$$\vartheta(0, t) = 0 \text{ და } \vartheta(1, t) = 1. \tag{38}$$

(36), (37), (38) ამოცანის ამოსახსნელად ავირჩიოთ მიახლოებითი ამონახსნის შემდეგი ფორმა:

$$\vartheta_\alpha(x, t) = \vartheta_0(x) + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \cdot \varphi_i(x), \tag{39}$$

სადაც  $\vartheta_0(x) = \sin \pi x + x$ ,  $\varphi_i(x) = x^i - x^{i+1}$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ  $\vartheta_0(x)$  ფუნქცია აკმაყოფილებს სასაზღვრო (38) პირობებს; ხოლო  $\varphi_i(x)$  ფუნქციები აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს ანუ ამონახსნს ვეძებთ ფორმით:

$$\vartheta(x, t) = \sin \pi x + x + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \cdot (x^i - x^{i+1}). \tag{40}$$

$\alpha_i(t)$  კოეფიციენტების საპოვნელად, წარმოვადგინოთ ისინი დროის ხარისხოვანი მწკრივის სახით:

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=1}^N \beta_{ij} t^j. \tag{41}$$

თუ (41) წარმოდგენას ჩავსვამთ (40) განტოლებაში, გვექნება ამონახსნის წარმოდგენა:

$$\vartheta(x, t) = \sin \pi x + x + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_{ij} t^j \cdot (x^i - x^{i+1}), \tag{42}$$

ცხადია რომ (42) წარმოდგენა ითვალისწინებს (37) საწყის პირობებს. მაშასადამე, ამოცანის ამოსახსნელად, საჭიროა ვიპოვოთ  $\beta_{ij}$  კოეფიციენტების მნიშვნელობები (42) წარმოდგენაში.

რვაჩოგ-ობგადის მეთოდის შემდეგი ეტაპია  $R(x, t, \beta)$  ცდომილების პოვნა, რისთვისაც (42) წარმოდგენა უნდა ჩავსვათ (36) განტოლებაში და მიღებული შედეგი ჩავწეროთ ერთგვაროვანი სახით:

$$R(x, t, \beta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \cdot j \cdot t^{j-1} \cdot (x^i - x^{i+1}) - \pi^2 \cdot \sin \pi x - \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^N \beta_{ij} t^j \cdot (i \cdot (i-1) x^{i-2} - (i+1) \cdot i \cdot x^{i-1}). \tag{43}$$

აქ გაშლის  $\beta_{ij}$  კოეფიციენტების საპოვნელად ვიყენებთ  $L_2(G)$  ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს  $R(x, t, \beta)$  ფუნქციასა და 0-ს შორის მანძილის მინიმიზაციის პირობიდან:

$$I(\beta) = \int_0^1 \int_0^\infty (R(x, t, \beta) - 0)^2 dt dx \rightarrow \min. \tag{44}$$

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**-ზე და შევადაროთ რვაჩოგ-ობგადის RO მეთოდით მიღებული ამონახსნი  $\vartheta(x, t)$ , გალიორკინის მეთოდით მიღებულ ამონახსნს:

$$\overset{N:=3}{\underline{R}}(x, t, \beta) := \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \beta_{i,j} \cdot j \cdot t^{j-1} \cdot (x^i - x^{i+1}) \right] \right] - \pi^2 \cdot \sin(\pi \cdot x) - \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^N \left[ \beta_{i,j} \cdot t^j \cdot [i \cdot (i-1) \cdot x^{i-2} - i \cdot (i+1) \cdot x^{i-1}] \right]$$



$$I(\beta) := \int_0^1 \int_0^1 (R(x, t, \beta))^2 dt dx$$

$$i := 1..N$$

$$j := 1..N$$

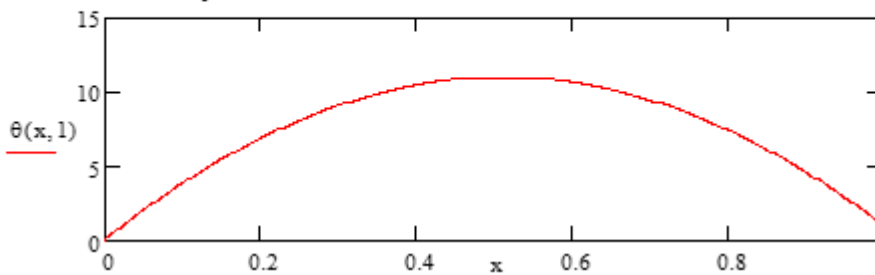
$$\beta_{i,j} := 0$$

Given

$$S := \text{Minimize}(I, \beta) \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 37.785 & -0.268 & 0.159 \\ 0 & 1.546 & -2.704 & 1.436 \\ 0 & -1.617 & 2.934 & -1.603 \end{pmatrix}$$

$$\beta := S$$

$$\theta(x, t) := \sin(\pi \cdot x) + x + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\beta_{i,j} \cdot t^i \cdot (x^i - x^{i+1})]$$



ნახ.3

შედეგების შედარება გვარწმუნებს რვაჩოვ-ობგადის მეთოდის უპირატესობაში. რადგან ამონახსნი მიიღება უფრო სწრაფად და ზუსტად.

### 5. ბიურგერის განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა რვაჩოვ-ობგადის მეთოდით

ბიურგერის განტოლებას ახასიათებს ისეთივე არაწრფივობა, როგორც ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემას, ამიტომ როცა უნდათ შეამოწმონ ნავიე-სტოქსის განტოლებების ამოხსნის ახალი რიცხვითი მეთოდი, მას ამოწმებენ ბიურგერის განტოლებაზე, როგორც ტესტურ ამოცანაზე [6-7]. მითუმეტეს რომ, ზოგიერთი სასაზღვრო და საწყისი პირობების შემთხვევაში ბიურგერის განტოლებისათვის არსებობს ზუსტი ამონახსნიც. ბიურგერის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (45)$$

შევეცადოთ ამოვხსნათ ბიურგერის განტოლება, როცა სივრცული ცვლადი  $x \in [-1; 1]$  შუალედს და  $t \geq 0$ . ვთქვათ, საწყისი და სასაზღვრო პირობები მოიცემა შემდეგნაირად:

$$u_0(x) = u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = 0 \\ 0, & \text{if } x = 1 \end{cases} \quad (46)$$

$$u(-1, t) = 1, \quad u(1, t) = 0. \quad (47)$$

ამ მოცანის რვაჩოვ-ობგადის მეთოდით, მიახლოებით ამოსახს-ნელად გამოვიყენებთ პოლინომებს:

$$T_i(x) = x^i. \quad (48)$$

ბიურგერის განტოლების მიახლოებით ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$u_\alpha(x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \cdot x^i. \quad (49)$$

გარდა ამისა, წარმოვადგინოთ  $\alpha_i(t)$  კოეფიციენტები დროის ხარისხოვანი მწკრივის სახით:

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=1}^N \beta_{ij} t^j, \quad (50)$$

მაშინ, გვექნება რომ

$$u(x; t) = 1 - x + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_{ij} t^j x^i. \quad (51)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (51) წარმოდგენა ითვალისწინებს საწყის პირობებს. ამ წარმოდგენაში საპოვნელია  $\beta_{ij}$  გაშლის კოეფიციენტები. მათ საპოვნელად, ჩავსვათ (51) გამოსახულება ბიურგერის (45) განტოლებაში და შევადგინოთ ცდომილების  $R(x, t, \beta)$  ფუნქცია. მივიღებთ, რომ

$$u_x = -1 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_{ij} t^j \cdot i \cdot x^{i-1}; \quad (52)$$

$$u_{xx} = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^N \beta_{ij} t^j i(i-1) x^{i-2}; \quad (53)$$

$$R(x, t, \beta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N j \cdot \beta_{ij} \cdot t^{j-1} \cdot x^i + \left( 1 - x + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_{ij} t^j x^i \right) \cdot \left( -1 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_{ij} t^j \cdot i \cdot x^{i-1} \right) - \frac{1}{Re} \cdot \left( \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^N \beta_{ij} t^j i(i-1) x^{i-2} \right). \quad (54)$$

აქ გაშლის  $\beta_{ij}$  კოეფიციენტების საპოვნელად ვიყენებთ  $L_2(G)$  ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს  $R(x, t, \beta)$  ფუნქციასა და 0-ს შორის მანძილის მინიმიზაციის პირობიდან:

$$I(\beta) = \int_0^1 \int_0^\infty (R(x, t, \beta) - 0)^2 dt dx \rightarrow \min. \quad (55)$$

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**-ზე და შევადაროთ რეაჩოვ-ობგადის RO მეთოდით მიღებული ამონახსნი  $u(x, t)$ , გალიორკინის მეთოდით მიღებულ ამონახსნს.

$N := 3$        $Re := 100$   
 $ORIGIN := 1$

$$ux(x, t, \beta) := -1 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \beta_{i,j} \cdot t^j \cdot i \cdot x^{i-1} \right)$$

$$u_{xx}(x, t, \beta) := \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \beta_{i,j} \cdot t^j \cdot (i-1) \cdot i \cdot x^{i-2} \right] \right]$$

$$RO(x, t, \beta) := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \beta_{i,j} \cdot t^{j-1} \cdot x^i \cdot j \right) + \left[ 1 - x + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \beta_{i,j} \cdot t^j \cdot x^i \right) \right] \cdot ux(x, t, \beta)$$

$$R(x, t, \beta) := R_0(x, t, \beta) - \frac{1}{\text{Re}} \cdot u_{xx}(x, t, \beta)$$

$$I(\beta) := \int_0^1 \int_0^1 R(x, t, \beta)^2 dx dt$$

$$i := 1..N$$

$$j := 1..N$$

$$\beta_{i,j} := 0$$

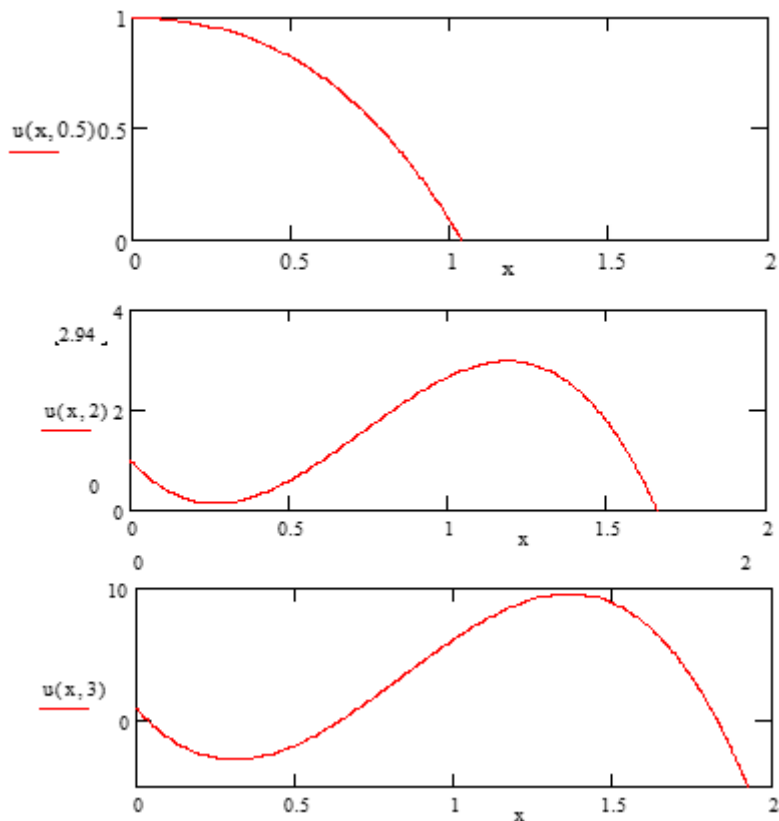
Given

$$S := \text{Minimize}(I, \beta)$$

$$S = \begin{pmatrix} 2.499 & -0.677 & -1.039 \\ -1.892 & 1.416 & 1.752 \\ -0.82 & 0.05 & -0.726 \end{pmatrix}$$

$$\beta := S$$

$$u(x, t) := 1 - x + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\beta_{i,j} \cdot t^j \cdot x^i)$$



ნახ.4

## 6. დასკვნა

ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები გვაძლევს იმის საშუალებას, რომ რეაქოვ-ობგამის RO მეთოდი გამოვიყენოთ ჰიდროაეროდინამიკის არაწრფივი ამოცანების ამოსახსნელად.

**ლიტერატურა:**

1. Рвачёв В.Л. (1982). Теория -функций и некоторые её приложения. Киев. Наукова думка
2. Обгадзе Т.А. (1989). Применение методов  $R$  – функций и  $\Psi$  – преобразования для решения операторных уравнений, Сообщения АН ГССР, т.136, №1.
3. Обгадзе Т.А. Об одном методе решения задач теории обтекания тел вязкой жидкостью, Сб. науч.тр. ГПИ, сер. МСС, №6(262), Тбилиси.
4. Обгадзе Т.А. (1989). Элементы математического моделирования, Уч.пособие, министерство высшего и среднего образования ГССР, ГПИ, Тбилиси.
5. Мироновский Л.А. (2004). Моделирование разностных уравнений, учебное пособие, Санкт-Петербургский Гос. Унив. Аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург.
6. Флетчер К. (1988). Численные методы на основе метода Галёркина. -М., Мир.
7. Fletcher C.A. (1982). Burger's equation: a model for all reasons. In: Numerical solution of partial differential equations. Ed. J.Noye. North-Holland.

**DECISION OF BOUNDARY PROBLEMS BY RO-METHOD  
RVACHEV-OBGADZE**

Obgadze Tamaz, Kortieva Vera

Georgian Technical University

**Summary**

In work the RO method of Rvachyov-Obgadze is considered. The algorithm, for creation of the equation of multicoherent border is under construction; Obgadze's homomorphisms are for this purpose applied. Algorithms are developed for the solution of boundary tasks which are checked by solutions of a number of test tasks on the basis of Mathcad. Cauchy's task for the differential equation of the first order is considered, the problem of a current of liquid in a pipe of square section is studied, the non-stationary problem of heat conductivity and Byurgers's equation on the basis of a RO method is solved. Results of numerical calculations are compared to known exact and numerical solutions of the corresponding tasks. Numerical values of an absolute and relative error in each of the solved tasks are calculated.

**РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ РО-МЕТОДОМ РВАЧЁВА-ОБГАДЗЕ**

Обгадзе Т.А., Кортиева В.В.

Грузинский Технический Университет

**Резюме**

Рассматривается РО-метод Рвачёва-Обгадзе. Строится алгоритм, для построения уравнения многосвязной границы; для этого применяются гомоморфизмы Обгадзе. Разработаны алгоритмы для решения граничных задач, которые проверены решениями ряда тестовых задач на основе Mathcad. Рассмотрена задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка, изучена задача течения жидкости в трубе квадратного сечения, решается нестационарная задача теплопроводности и уравнение Бюргерса на основе РО-метода. Результаты численных расчетов сравниваются с известными точными и численными решениями соответствующих задач. Вычисляются численные значения абсолютной и относительной погрешности в каждой из решенных задач.