დისკრეტული დინამიკური ფრაქტალები და ჟულიას სიმრავლეები

თამაზ ობგაძე

საქართველოს უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია დისკრეტულ დინამიკურ სისტემებში წარმოქმნილი ფრაქტალები. შესწავლილია კვადრატული ფუნქციის შესაბამისი იტერირებად ფუნქციათა სისტემა. აგებულია ჟულიას სიმრავლეები და ასახვის შესაბამის მუდმივათა მანდელბროტის ფრაქტალი.

საკვანძო სიტყვები: დისკრეტული ფრაქტალი. ჟულიას სიმრავლე. მანდელბროტის ფრაქტალი.

1. შესავალი

ფრაქტალთა სამყარო მეტად ფართოა და მრავალფეროვანი. ფრაქტალებს ვხვდებით მექანიკასა და აკუსტიკაში, ქიმიასა და ბიოლოგიაში. ახალი რიცხვითი მეთოდები საშუალებას იძლევა თავიდან ავიცილოთ მოსალოდნელი სოციალური კატასტროფებიც. სინერგეტიკის სპეციალისტები უკვე დარწმუნდნენ, რომ ქიმიური, ფიზიკური, ბიოლოგიური და სოციალურ-ეკონომიკური პროცესები უფრო ზუსტად აღიწერება ფრაქტალური სტრუქტურებით [1-22], ვიდრე კლასიკური უწყვეტი და გლუვი ფუნქციებით. ფრაქტალები ახალი მიმართულება გახდა ხელოვნებაშიც, სადაც მათი საშუალებით იქმნება საოცარი სილამაზისა და მიმზიდველობის სურათები. თუმცა, ჩვენი ინტერესების სფეროა ის მათემატიკური კანონზომიერებები, რაც დაკავშირებულია ფრაქტალებთან.

2. დისკრეტული დინამიკური ფრაქტალები

ფრაქტალის ძირითადი მახასიათებელია თვითმსგავსების თვისება, რაც გამოიხატება მამა-ფრაქტალისა და გენეტიკური კოდის საშუალებით, რომლებიც საშუალებას იძლევა დედა-ფრაქტალიდან შესაბამისი **რეკურსიით** (რეკურენტული ფორმულით) მივიღოთ დინამიკური ფრაქტალი [20].

განვიხილოთ $z = x + iy$ kompleqsuri cvladi da kompleq − suri ricxvi $c = a + ib$. მათი საშუალებით შევადგინოთ რეკურენტული ფორმულა:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \tag{1}$$

რომელიც შეგვიძლია გადავწეროთ სხვა სახითაც, თუ გამოვყოფთ მასში ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, მართლაც:

$$x_{n+1} + iy_{n+1} = (x_n + iy_n)^2 + a + ib, \tag{2}$$

ანუ

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \tag{3}$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b. \tag{4}$$

განვიხილოთ კონკრეტული შემთხვევა, როცა

$$x_0 = 0,\ \ y_0 = 0,\ \ a = -0.1194,\ \ b = 0.6289. \tag{5}$$

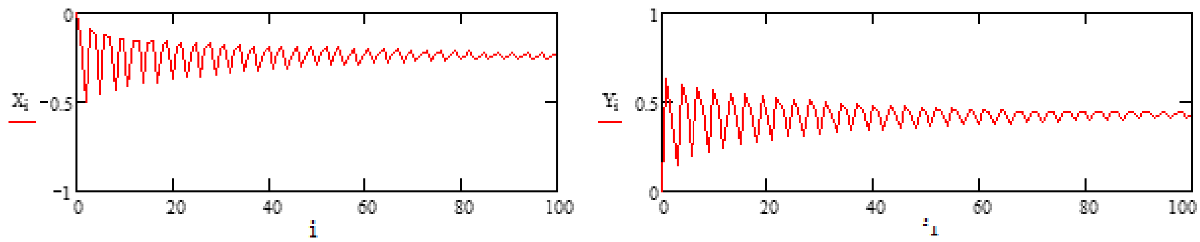
შევადგინოთ პროგრამა და გამოვთვალოთ (x_i, y_i) წერტილების მნიშვნელობები $n = \overline{1,100}$ მნიშვნელობებისათვის, რომლის გრაფიკიც იქნება 1-ელ ნახაზზე, ხოლო შესაბამისი სისტემის ფაზური პორტრეტი მოყვანილია 1.a ნახაზზე.

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა და ვაწარმოოთ გამოთვლა Mathcad პროგრამის ბაზაზე:

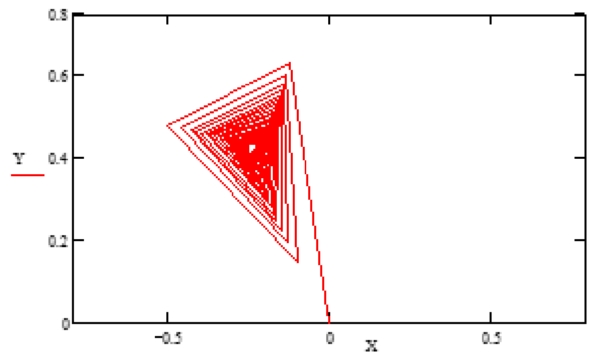
$X_0 := 0 \quad Y_0 := 0 \quad i := 0..100$

$a_i := -0.1194 \quad b_i := 0.6289$

$$\begin{pmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} (X_i)^2 - (Y_i)^2 + a_i \\ 2 \cdot X_i \cdot Y_i + b_i \end{bmatrix}$$

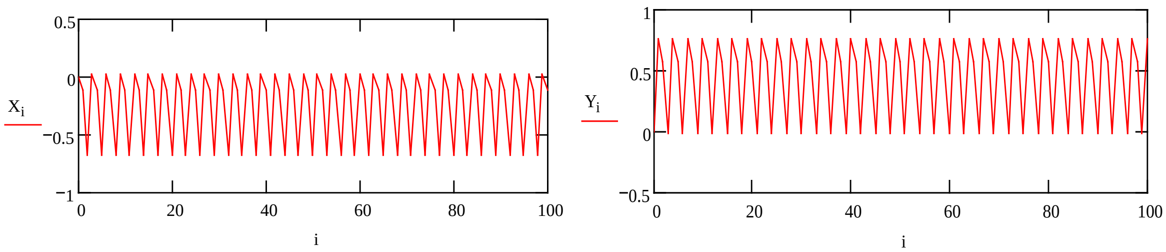


ნახ.1. დისკრეტული დინამიკური სისტემის დინამიკა, როცა $a = -0.1194$, $b = 0.6289$

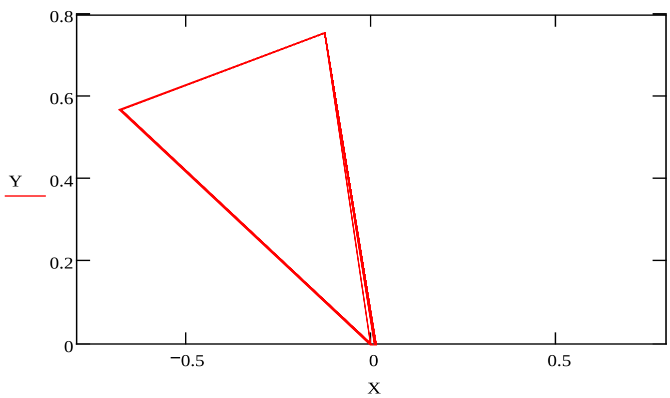


ნახ.1a. დისკრეტული დინამიკური ფრაქტალის ორბიტა, როცა $a = -0.1194$, $b = 0.6289$

ანალოგიურად, თუ (a ;b) პარამეტრების მნიშვნელობებია $a = -0.1244$, $b = 0.756$, გვექნება პერიოდულად ცვლადი დინამიკური სისტემა ნახ. 2, ხოლო შესაბამის ფაზურ პორტრეტს ექნება სახე ნახ. 2a.

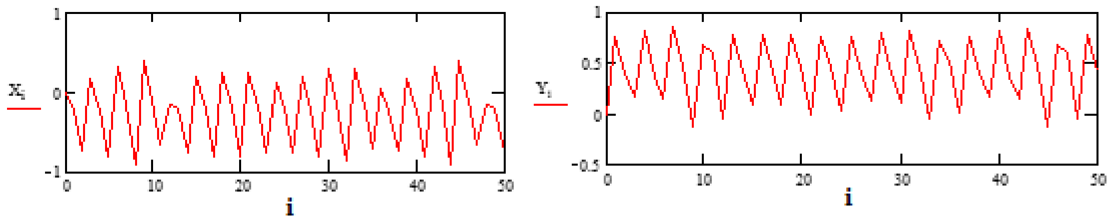


ნახ.2. დისკრეტული დინამიკური სისტემის დინამიკა, როცა $a = -0.1244$, $b = 0.756$

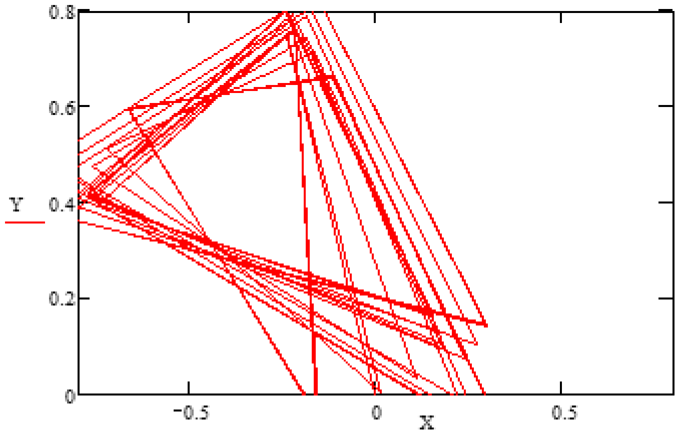


ნახ.2.a. დისკრეტული სამის პერიოდის მქონე დინამიკური სისტემის პერიოდული ორბიტა, როცა $a = -0.1244$, $b = 0.756$

თუ (a ;b) პარამეტრების მნიშვნელობებია $a = -0.237$, $b = 0.75$, გვექნება ქაოსური დინამიკური სისტემა (ნახ.3), შესაბამისი ფაზური პორტრეტით (ნახ.3a).

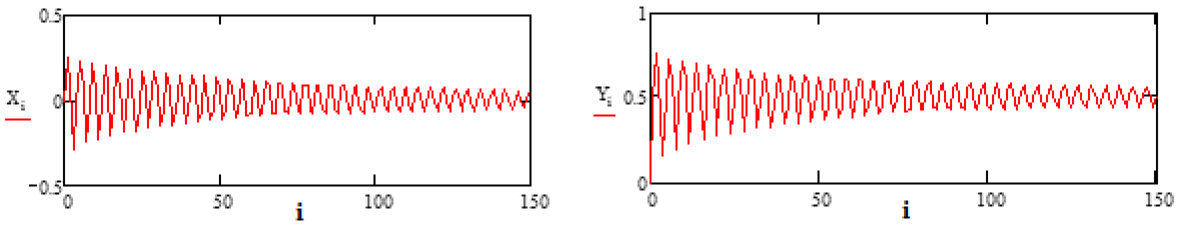


ნახ.3. დისკრეტული ქაოსური სისტემის დინამიკა, როცა $a = -0.237$, $b = 0.75$

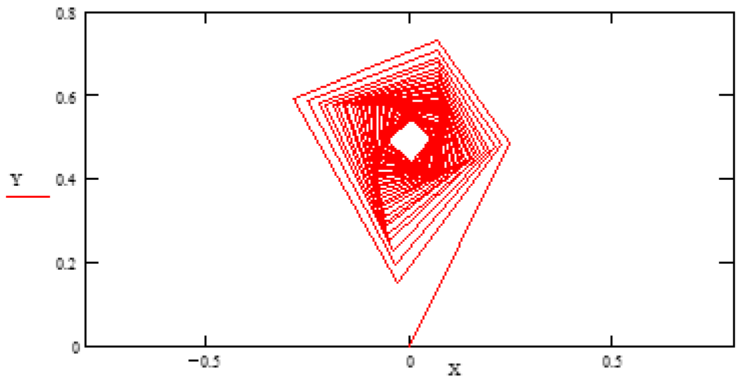


ნახ.3.a. დისკრეტული ქაოსური, უსასრულობისაკენ მიმავალი სისტემის ორბიტა, როცა $a = -0.237$, $b = 0.75$

თუ (a ;b) პარამეტრების მნიშვნელობებია $a = 0.25$, $b = 0.49$, მაშინ გვქნება ფრაქტალური ცენტრისაკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა (ნახ.4), რომლის ფაზურ პორტრეტს აქვს ფრაქტალური ორბიტის სახე (ნახ.4a).

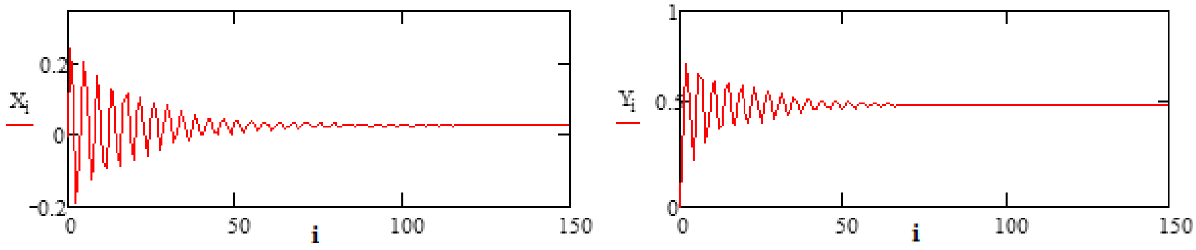


ნახ.4. ფრაქტალური ცენტრისკენ მიმავალი სისტემა

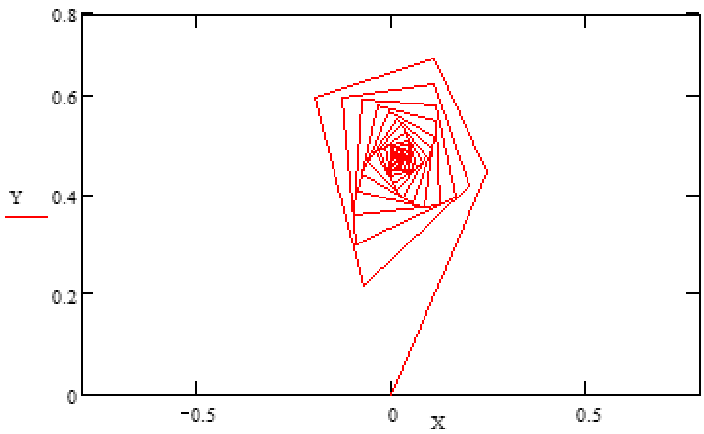


ნახ.4a. ფრაქტალური ცენტრისკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა $a = 0.25$, $b = 0.49$

თუ განვიხილავთ (a ;b) პარამეტრების მნიშვნელობებს: $a = 0.25$, $b = 0.45$, მაშინ კვლავ გვაქვს ცენტრისაკენ კრებადი დინამიკური სისტემა (ნახ.5), შესაბამისი (ნახ.5a), ფაზური პორტრეტით.

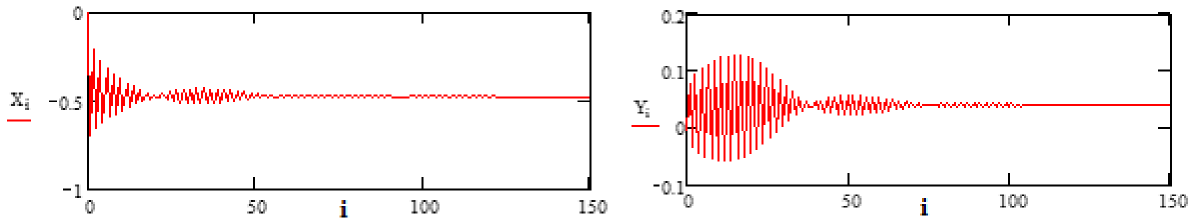


ნახ.5. ფრაქტალური ცენტრისკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა, როცა $a = 0.25,\ b = 0.45$

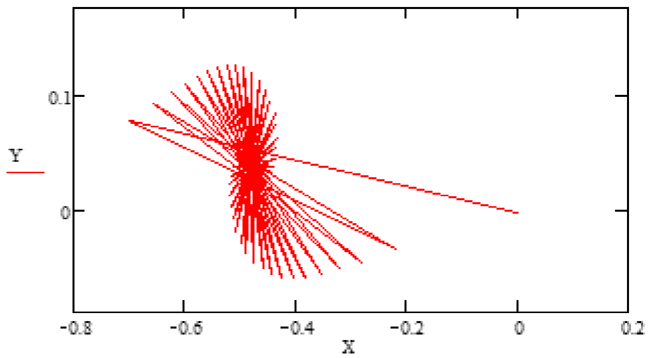


ნახ.5a. ფრაქტალური ცენტრისკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა $a = 0.25,\ b = 0.45$

განვიხილოთ (a ;b) პარამეტრების მნიშვნელობებს: $a = -0.7,\ b = 0.08$, მაშინ კვლავ გვაქვს ცენტრისაკენ კრებადი დინამიკური სისტემა ნახ. 6, შესაბამისი ნახ. 6a, ფაზური პორტრეტით, რომელიც გამოსახავს დინამიკური სისტემის ორბიტას.

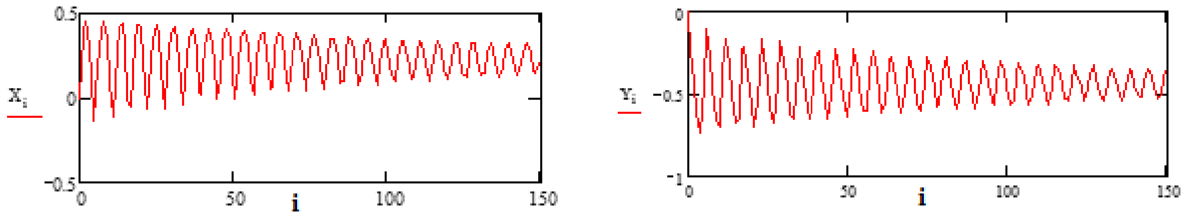


ნახ.6. ფრაქტალური ცენტრისკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა, როცა $a = -0.7,\ b = 0.08$

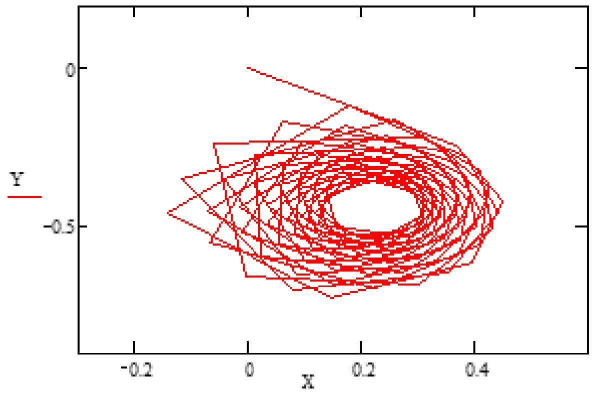


ნახ.6 a. ფრაქტალური ცენტრისკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა $a = -0.7,\ b = 0.08$

განვიხილავთ (a ;b) პარამეტრების მნიშვნელობებს: $a = 0.37,\ b = -0.24$, მაშინ კვლავ გვაქვს ცენტრისაკენ კრებადი დინამიკური სისტემა (ნახ.7), შესაბამისი ფაზური პორტრეტით (ნახ.7a), რომელიც გამოსახავს დინამიკური სისტემის ორბიტას.

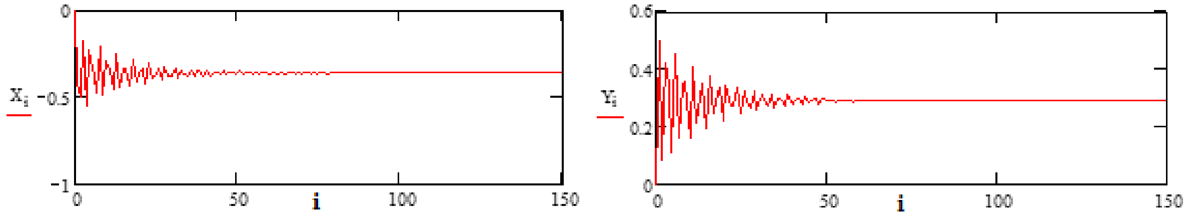


ნახ.7. ფრაქტალური ცენტრისკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა, როცა $a = 0.37,\ b = -0.24$

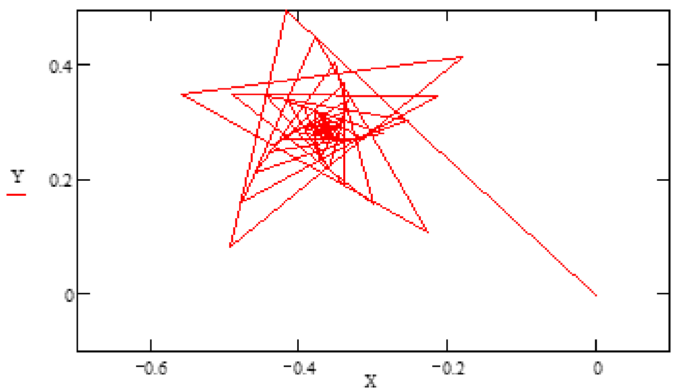


ნახ.7a. ფრაქტალური ცენტრისკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა $a = 0.37,\ b = -0.24$

განვიხილოთ (a ;b) პარამეტრების მნიშვნელობები: $a = -0.4161,\ b = 0.5,$ მაშინ კვლავ გვაქვს ცენტრისაკენ კრებადი დინამიკური სისტემა ნახ. 8, შესაბამისი ნახ. 8a, ფაზური პორტრეტით, რომელიც გამოსახავს დინამიკური სისტემის ორბიტას.



ნახ.8. ფრაქტალური ცენტრისკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა, როცა $a = -0.4161,\ b = 0.5$



ნახ.8a. ფრაქტალური ცენტრისკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა $a = -0.4161,\ b = 0.5$

განვიხილოთ (3), (4) იტერაციული ფორმულებით მოცემული დისკრეტული დინამიკური სისტემის (x,y) ორბიტები, რომლებიც წარმოიშობა სისტემის სხვადასხვა საწყისი (a,b) პირობების შემთხვევაში. 1a ნახაზი **დისკრეტული დინამიკური ფრაქტალია**, რომელიც წარმოიშობა (5) საწყისი პირობების შემთხვევაში და მიისწრაფის (-0.2381; 0.4242) მიზიდულობის ცენტრისაკენ. 2a ნახაზი არაა ფრაქტალი, იგი **პერიოდული ორბიტაა**, რომლის პერიოდიცაა სამი,

თუმცა, მისი საწყისი პირობები, დიდად არ განსხვავდება წინა (ნახ.1a) ფრაქტალის საწყისი პირობებისაგან. 3a ნახაზი უსასრულობისკენ მიმავალი იტერაციული ორბიტაა, რომელიც შეესაბამება ქაოსურ სისტემას.

ამრიგად, ჩვენ განვიხილეთ **სამი სხვადასხვა ტიპის ორბიტა: ა) ფრაქტალური, მიზიდულობის ცენტრისკენ მიმავალი ორბიტა** (ნახ.1a; 4a-8a)**; ბ) პერიოდული ორბიტა** (ნახ.2a) **და გ) ქაოსური, უსასრულობისკენ მიმავალი ორბიტა** (ნახ.3a).

ყველაზე მეტ ყურადღებას იმსახურებს ფრაქტალური ორბიტები.

3. ფრაქტალური ორბიტები და ჟულიას სიმრავლეები

განვიხილოთ უფრო დეტალურად (1) დისკრეტული დინამიკური სისტემა, რათა გავერკვეთ თუ რატომ არსებობს საწყის მონაცემებსა და პარამეტრის არჩევაზე დამოკიდებული სამი სხვადასხვა ტიპის ორბიტა.

ამ პრობლემის შესწავლის მიზნით, განვიხილოთ ჯერ (1) დინამიკური სისტემის მსგავსი, ნამდვილი ცვლადის (6) დინამიკური სისტემა:

$$f(x):\ x_{n+1} = x_n^2 + a, \quad a = const. \tag{6}$$

დავუშვათ, რომ $a = 0$, მაშინ (6) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$x_{n+1} = x_n^2, \tag{7}$$

ამ სისტემის უძრავი (წონასწორობის) წერტილების საპოვნელად უნდა ვიგულისხმოთ, რომ

$$x_{n+1} = x_n = x_0. \tag{8}$$

მაშინ (7) იტერაციული ფორმულიდან მივიღებთ:

$$x_0 = x_0^2 \text{ anu } x_0 = 0 \ \vee \ x_0 = 1 \ \vee x_0 = \infty\,. \tag{9}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ (7) დინამიკურ სისტემას აქვს სამი წერტილი $x_0 = 0$, $x_0 = \infty$ da $x_0 = 1$.

შევისწავლოთ მათი მდგრადობის საკითხი. ამისათვის, წონასწორობის წერტილს უნდა მივცეთ მცირე ნაზრდი $0 < \delta_n \ll 1$ და (7) სისტემიდან გამომდინარე შევისწავლოთ ნაზრდის დინამიკა. თუ ის იზრდება, მაშინ შესაბამისი წერტილი არაა მდგრადი, ხოლო თუ ნულისკენ მიისწრაფის, მაშინ გვაქვს მდგრადობა. განვიხილოთ ცალ-ცალკე წონასწორობის წერტილების მდგრადო-ბის საკითხი.

ა) $x_0 = 0$. მაშინ განვიხილავთ ამ წერტილის შეშფოთებას ანუ $x_n = 0 + \delta_n$. (10)

თუ გავითვალისწინებთ (7) სისტემის სახეს, გვექნება:

$$\delta_{n+1} = \delta_n^2, \tag{11}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \delta_n \ll 1, \tag{12}$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0. \tag{13}$$

ე.ი. წონასწორობის წერტილი $x_0 = 0$ მდგრადია. რაც იმას ნიშნავს, რომ ჩვენ თუ ავიღებთ სისტემის საწყის მდებარეობად $|x_0| < 1$ მნიშვნელობას, მაშინ სისტემას აქვს ფრაქტალური მიზიდვის ცენტრი $x = 0$ და ნებისმიერი ასეთი $|x_0| < 1$ საწყისი პირობის შემთხვევაში, მისი ორბიტა მიიზიდება ამ ცენტრის მიერ. ასევე, მიზიდულობის ცენტრია $x_0 = \infty$ და მისკენ მიიზიდებიან ისეთი წერტილების ორბიტები, რომელთათვისაც $|x_0| > 1$.

ბ) $x_0 = 1$. მაშინ განვიხილავთ ამ წერტილის შეშფოთებას ანუ

$$x_n = 1 + \delta_n. \tag{14}$$

თუ გავითვალისწინებთ (7) სისტემის სახეს, გვექნება :

$$1 + \delta_{n+1} = (1 + \delta_n)^2, \tag{15}$$

ანუ

$$1 + \delta_{n+1} = 1 + 2\delta_n + \delta_n^2, \tag{16}$$

მაშინ

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = 2 + \delta_n. \tag{17}$$

და რადგან $0 < \delta_n \ll 1$, მივიღებთ რომ

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \infty. \tag{18}$$

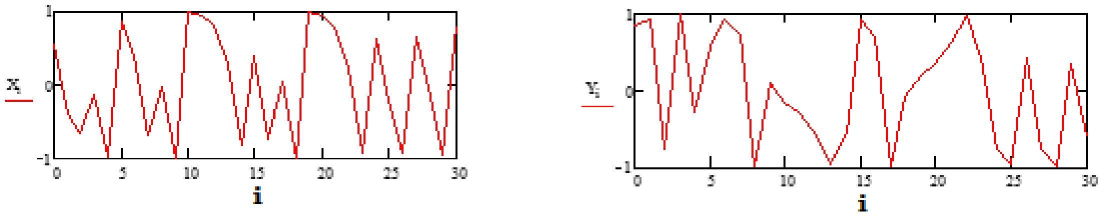
რაც იმას ნიშნავს, რომ $x_0 = 1$ წონასწორობის წერტილი არაა მდგრადი. მაშასადამე, თუ სისტემის საწყისი მდგომარეობაა $x_0 = 1$ მაშინ მცირე შეშფოთებაც კი საკმარისია რომ სისტემის ორბიტა წავიდეს უსასრულობაში, თუმცა შეშფოთების არ არსებობის შემთხვევაში, სისტემა იძლევა პერიოდულ პროცესს. თუ საწყისი მნიშვნელობა $|x_0| > 1$ მაშინ სისტემა იძლევა უსასრულობაში მიმავალ ორბიტას. ეს სამი შემთხვევა, შეესაბამება (ნახ. 1a - 3a) სამ შემთხვევას.

ახლა განვიხილოთ კომპლექსური ცვლადების შემთხვევა (1).

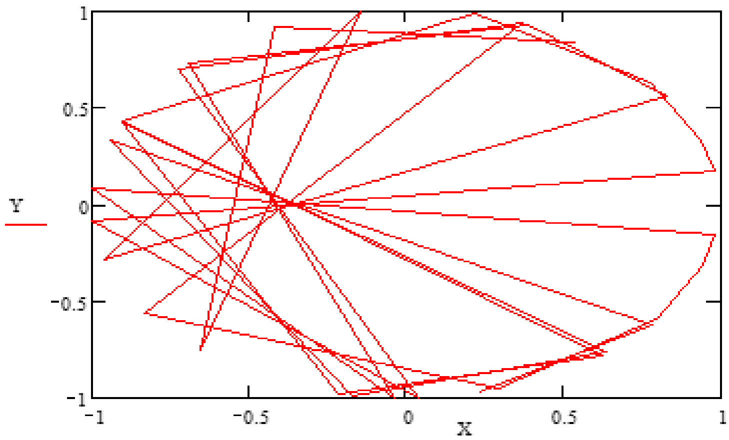
$$z_{n+1} = z_n^2 + c. \tag{19}$$

თუ იტერაციის რომელიმე ბიჯზე $|z_n| > 1$ მაშინ ფუნქცია მოგვცემს უსასრულობაში მიმავალ ორბიტას. არსებობს ზღვრული შემთხვევა $|z_n| = 1;\ c = 0$.

მაგალითად, თუ $x_0 = \cos 1;\ y_0 = \sin 1$, მაშინ წერტილები ლაგდებიან ერთეულოვანი რადიუსის წრეწირზე, თუმცა, რამდენიმე ბიჯის შემდეგ თანდათან ცილდება მას (ნახ.9, ნახ.9a). ითვლება რომ, წრეწირზე მდებარე წერტილები არამდგრადია და ისინი ან მოგვცემს უსასრულობაში მიმავალ ორბიტას ან მიიზიდება წრის რომელიმე შიგა წერტილის მიერ.



ნახ.9. სისტემის დინამიკა როცა $|z_n| = 1;\ c = 0$



ნახ.9a. დისკრეტული დინამიკური სისტემის ორბიტა, როცა $|z_n| = 1;\ c = 0$

$f(z)$ ფუნქციის $J(f)$ **ჟულიას სიმრავლე,** ეწოდება იმ **z წერტილების სიმრავლის საზღვარს რომელთა ორბიტაც უსასრულობისკენ მიდის n-თან ერთად** [3].

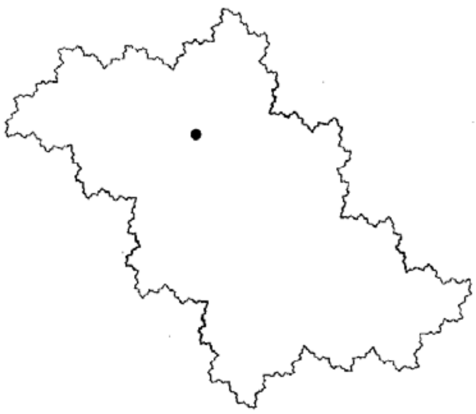
$$J(f) = \partial\left\{z\colon \lim_{n\to\infty} z_n \to \infty\right\}. \tag{20}$$

ან სხვანაირად:

$J(f)$ ჟულიას სიმრავლე, არის **f** **ფუნქციის ყველა მიზიდულობის წონასწორობის წერტილის (მათ შორის ∞-ის), მიზიდულობის ველის საზღვარი.**

უმარტივესი $z_{n+1} = z_n^2$ სისტემისათვის **ჟულიას სიმრავლეს** აქვს სახე $|z| = 1$. აქ გვაქვს ქაოსი, თუმცა, ეს სიმრავლე არ წარმოადგენს ფრაქტალს, მაგრამ როგორც წესი, **ჟულიას სიმრავლე** ფრაქტალია[21]. ამიტომ როგორც წესი, განიხილავენ მოცემული c მნიშვნელობისათვის z-ის ისეთ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც $|z| < 2$ და შესაბამისი წერტილების სიმრავლეს **ჟულიას შიდა სიმრავლეს** უწოდებენ. ითვლება, რომ თუ $|z| > 2$ მაშინ შესაბამისი ორბიტა მიდის უსასრულობისაკენ. **ჟულიას შიდა სიმრავლის საზღვარს ჟულიას წირს** უწოდებენ. ხოლო ჟულიას წირის დამატებით სიმრავლეს - **ფატუს სიმრავლეს** [4,22].

$1a$ ნახაზზე გამოსახული დისკრეტული დინამიკური სისტემის შესაბამის ჟულიას სიმრავლეს აქვს მე-10 ნახაზზე მოცემული სახე.



ნახ.10. დისკრეტული დინამიკური სისტემის ჟულიას სიმრავლე, რომლის ორბიტაც გამოსახულია ნახ. $1a$-ზე

განვიხილოთ $\mathbf{z_{n+1} = z_n^2 + c}$ სქემისათვის ჟულიას შიდა სიმრავლის აგების პროგრამა ფსევდოკოდებში, სადაც $\mathbf{c = a + ib}$:

მონაცემების შეტანა:

$a\,,b$

(c,d) (ფანჯრის ცენტრი)

s (ფანჯრის ზომები)

p (პიქსელების რაოდენობა ფანჯრის ყოველ გვერდში)

შედეგების გამოტანა:

ჟულიას შიდა სიმრავლის გამოსახვა

ინიციალიზაცია:

გრაფიკული ეკრანის ფანჯრის ზომებია $\left[\boldsymbol{c} - \frac{s}{2}, \boldsymbol{c} + \frac{s}{2}\right] \times \left[\boldsymbol{d} - \frac{s}{2}, \boldsymbol{d} + \frac{s}{2}\right]$

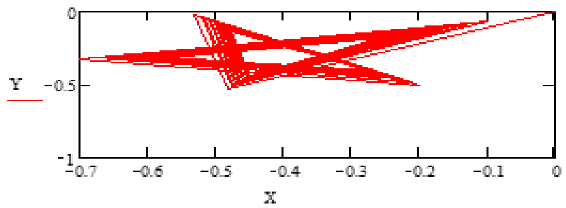
ბიჯები:

$$\text{for m} = 1 \text{ to p}$$
$$x_0 = c - \frac{s}{2} + \frac{ms}{p}$$
$$for\ n = 1\ to\ p$$
$$y_0 = d - \frac{s}{2} + \frac{ns}{p}$$
$$x = x_0$$
$$y = y_0$$

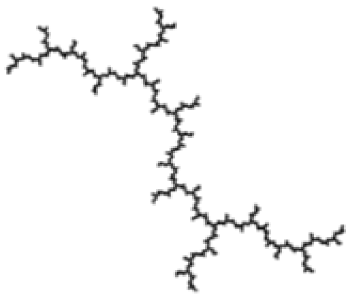
$$z = 0$$
$$iter = 1$$
$$while\ \ iter < 20$$
$$iter = iter + 1$$
$$x_1 = x^2 - y^2 + a$$
$$y_1 = 2xy + b$$
$$x = x_1$$
$$y = y_1$$
$$z = x^2 + y^2$$
$$if\ z > 4 \text{ ციკლიდან გამოსვლა, } end\ if$$
$$end\ While$$
$$if\ z < 4 \text{ ავაგოთ წერტილები}(x_0, y_0),\ end\ if$$
$$end\ for$$
$$end\ for$$

უფრო ხშირად განიხილავენ ჟულიას შიგა სიმრავლის საზღვარს და მას უწოდებენ ჟულიას წირს, რომელთა მაგალითებიც გამოსახულია 11-14 ნახაზებზე.

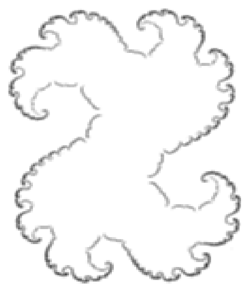
ნახ.11. ჟულიას წირი. პარაბოლური შემთხვევა, როცა $c = -0.48 - 0.53i$



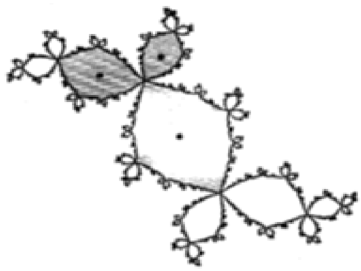
ნახ.11ა. ფაზური პორტრეტი ვარსკვლავის ფორმის ორბიტაა, როცა $c = -0.48 - 0.53i$



ნახ.12. ჟულიას წირი. დენდრიტი როცა $c = i$



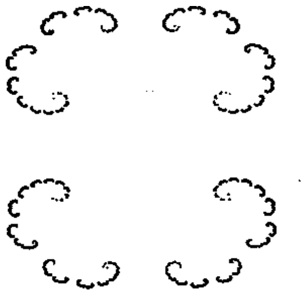
ნახ.13. ჟულიას წირი, როცა $c = 0.32 + 0.043i$



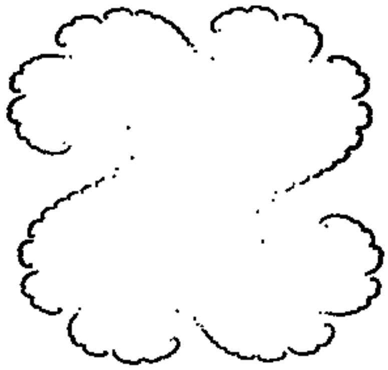
ნახ.14. დისკრეტული სამის პერიოდის მქონე დინამიკური სისტემის ჟულიას სიმრავლე, რომლის ორბიტაც გამოსახულია $2a$- ნახაზზე

4. მანდელბროტის სიმრავლე

როგორც უკვე ვიცით, $f(z) = z^2 + c$ ფუნქციის ჟულიას სიმრავლე შეიძლება იყოს სხვადასახვა ტიპის, იმის მიხედვით თუ როგორია c პარამეტრის მნიშვნელობა. ამის მიუხედავად, ამ ფუნქციისათვის არსებობს მხოლოდ ორი ტიპის ჟულიას სიმრავლე: ა) ბმული სიმრავლე; ბ) სრულიად არაბმული. ბმული ჟულიას სიმრავლეები ერთმანეთისაგან შეიძლება ძალიან განსხვავდებოდეს ვიზუალური თვალსაზრისით. ერთნი შეიძლება წარმოადგენდეს შეკრულ წირებს ფრაქტალური სტრუქტურით, როგორც მაგალითად, $0 < |c| < 0.25$ შემთხვევაში; ხოლო სრულიად არაბმულ ჟულიას სიმრავლეებს აქვს კანტორის მტვერის გეომეტრიული სტრუქტურა (ნახ.15,16).



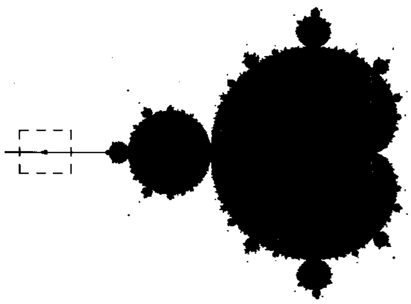
ნახ.15. ჟულიას სიმრავლე,
როცა $c = 0.5$



ნახ.16. ჟულიას სიმრავლე,
როცა $c = 0.31 + 0.04i$

მოცემული $f(z) = z^2 + c$ ფუნქციის ჟულიას სიმრავლის ტიპის **ინდიკატორს** წარმოადგენს მისი **მანდელბროტის სიმრავლე** რომლის ყველა შიგა c წერტილს შეესაბამება ბმული ჟულიას სიმრავლე (ნახ.17). მანდელბროტის სიმრავლის ყოველ c წერტილს შეესაბამება ბმული ჟულიას სიმრავლე, ხოლო მის დამატებით სიმრავლეს კი – სრულიად არაბმული ჟულიას სიმრავლე(კანტორის მტვერი).

განსაზღვრება: $f(z) = z^2 + c$ ფუნქციის მანდელბროტის სიმრავლე ეწოდება ისეთი $c \in \mathbb{C}$ კომპლექსური რიცხვების სიმრავლეს, რომლებისთვისაც 0 წერტილის ორბიტები შემოსაზღვრულია.



ნახ.17. მანდელბროტის სიმრავლე

ახლა შევადგინოთ $f(z) = z^2 + c$ ფუნქციის მანდელბროტის სიმრავლის აგების პროგრამა ფსევდოკოდებში:

მონაცემების შეტანა:

(i, j) (ფანჯრის ცენტრი მაგ. (0 ; 0))

s (ფანჯრის ზომები $s \times s$)

p (პიქსელების რაოდენობა ფანჯრის ყოველ გვერდში)

$iter$ (იტერაციათა რაოდენობა)

შედეგების გამოტანა:

მანდელბროტის სიმრავლის გამოსახვა

ინიციალიზაცია:

გრაფიკული ეკრანის ფანჯრის ზომებია $\left[\mathrm{i} - \frac{\mathrm{s}}{2}, \mathrm{i} + \frac{\mathrm{s}}{2}\right] \times \left[\mathrm{j} - \frac{\mathrm{s}}{2}, \mathrm{j} + \frac{\mathrm{s}}{2}\right]$

ბიჯები:

$$\mathrm{for\ m = 1\ to\ p}$$
$$a = i - \frac{s}{2} + \frac{ms}{p}$$
$$for\ n = 1\ to\ p$$
$$b = j - \frac{s}{2} + \frac{ns}{p}$$
$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$iter = 1$$

$$while\ iter \leq 20$$
$$iter = iter + 1$$
$$x1 = x^2 - y^2 + a$$
$$y1 = 2xy + b$$
$$x = x1$$
$$y = y1$$
$$z = x^2 + y^2$$
$if\ z > 4$, ციკლიდან გამოსვლა, $end\ if$
$$end\ while$$
$$if\ z < 4$$
$$plot(a; b)$$
$$end\ if$$
$$end\ for$$
$$end\ for$$

5. დასკვნა

როგორც ვხედავთ, ისეთი მარტივი ერთბიჯიანი იტერაციული სისტემებისათვისაც კი, როგორიცაა კვადრატული ასახვით წარმოქმნილი სქემა, დამახასიათებელია გეომეტრიულად არარეგულარული რეჟიმების არსებობა. თუმცა, ცოცხალი სისტემებისათვის დამახასიათებელი „არჩევანის თავისუფლება", რასაც გამოხატავენ ხოლმე ასახვის დაკავშირებით შემთხვევით პროცესებთან, განაპირობებს ფრაქტალური პორტრეტების მრავალფეროვნებას.

ლიტერატურა – References – Литература:

1. Мандельброт Б. (2002). Фрактальная геометрия природы. Пер. с англ., Ижевск,
2. Lauwerier H.A. (1991). Fractals – images of chaos. Princetion Univ., press.
3. Кроновер Р.М. (2000). Фракталы и хаос в динамических системах. Пер. с англ., -М.
4. Julia G. (1918). Memoir sur l'iteration des functions rationnells. J. de Mathematiques pures et appliqees, v. 1, Paris.
5. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. (1993). Красота фракталов. Пер. с англ., Мир, -М.
6. Мандельброт Б. (2004). Фракталы, случай и финансы. Пер. с франц., Ижевск, -М.
7. Мандельброт Б. (2009). Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Пер. с англ., Ижевск, -М.
8. Richardson L.F. (1922). Weather prediction by numerical process. Cambridge University press.
9. Морозов А.Д. (2002). Введение в теорию фракталов. Институт компьютер-ных исследований, Ижевск, -М.
10. Божокин С.В., Паршин Д.А. (2001). Фракталы и мультифракталы. НИЦ «регулярная и хаотическая динамика», Ижевск.
11. Уэлстид С. (2003). Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. Учебное пособие, пер. с англ.,Триумф, -М.
12. Hutchinson J.E. (1981). Fractals and Self Similarity. Indiana University Mathematics Journal, Vol. 30, No. 5, pp. 713-747
13. Barnsley M. (1993). Fractals Everywhere. Academic Press, Boston.

14. Daubechies I. (1992). Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF conference series in applied mathematics. SIAM Ed.

15. Shumaker L., Webb G., editor. (1993). Recent Advances in Wavelet Analysis. New York.: Academic Press.

16. Teolis A. (1998). Computational Signal Processing with Waveletes. Birkhauser.

17. Добеши И. (2001). Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Е.В. Мищенко. Под ред. А.П.Петухова. –М.

18. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. (1997). Основные конструкции всплесков// Фундаментальная и прикладная математика, т.3, вып. 4.

19. Дьяконов В.П. (2002). От теории к практике. Вейвлеты. –М.

20. Акимов О.Е. (2005).Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы. -М.

21. Мильнор Дж. (2000). Голоморфная динамика, пер. с англ., Ижевск.

22. Fatou P. (1919). Sur les equations fonctionnelles, bulletin societe, Math.France, v.47.

DISCRETE DYNAMIC FRACTALS AND SETS OF ZHYULIA

Obgadze Tamaz

Georgian Technical University

Summary

In work the fractals arising in discrete dynamic systems are considered. The system of the iterated functions arising at square displays is studied. Sets of Zhyulia and Mandelbrot's great number of the corresponding constants of display are constructed.

ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ И МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА

Обгадзе Т.

Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассматриваются фракталы возникающие в дискретных динамических системах. Изучена система итерированных функций возникающих при квадратичных отображениях. Построены множества Жюлиа и фракталь Мандельброта соответ-ствующих постоянных отображения.