ვარიაციული ამოცანები განაწილებულპარამეტრებიან ეკონომიკურ სისტემებში

ნოდარ ნარიმანაშვილი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია მარტივი ჩაკეტილი ეკონომიკური სისტემის განაწილებულპარამეტრებიანი მათემატიკური მოდელი. ვარიაციული პრინციპის საფუძველზე ფორმულირებულია ფასის განსაზღვრისა და მაქსიმალური მოგების მიღების ამოცანები. ნაჩვენებია დასმული ამოცანის ამოხსნის გზები საბაზრო პირობების გათვალისწინებით, რის საფუძველზეც შემუშავებულია რეკომენდაციები დაგეგმვის ოპტიმალური სტრატეგიის შესარჩევად.

საკვანძო სიტყვები: ეკონომიკური სისტემები. განაწილებულპარამეტრებიანი მოდელი. ვარიაციული ამოცანა. ოპტიმალური სტრატეგია.

1. შესავალი

დღეისათვის კარგადაა ცნობილი განაწილებულპარამეტრებიანი მათემატიკური მოდელები, რომლებიც წარმატებით გამოიყენება სხვადასხვა ფიზიკური ბუნების მქონე ტექნიკური სისტემების მართვაში. სამართავი სიდიდეები ამ სისტემებში ისეთი უნივერსალური ფიზიკური პარამეტრებია, როგორიცაა ტემპერატურა, კონცენტრაცია, დეფორმაცია, რხევა და სხვა.

ხშირად ასეთი პროცესების მათემატიკური აღწერა ხდება უწყვეტი თავმოყრილ-პარამეტრებიანი მოდელების ფორმით, რაც პროცესის ერთგვარი იდეალიზაციაა [1,2]. ამასთან ერთად ნივთიერებათა ან ზემოქმედებათა არაერთგვაროვნების გამო შესაძლებელია სითბური ან დიფუზიური პროცესი მკაცრად უწყვეტად არ მიმდინარეობდეს, მაგრამ როგორც გამოცდილება გვიჩვენებს, დისკრეტული განაწილება შეიძლება მაღალი სიზუსტით ჩანაცვლდეს უწყვეტი მიახლოებით ან ჩაიწეროს ზღვრული ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებების სახით [1,2].

პროცესების ასეთი ხედვა საშუალებას იძლევა განაწილებულპარამეტრებიანი მოდელები წარმატებით გამოვიყენოთ არაფიზიკური ბუნების, მაგალითად ეკონომიკური, საბანკო-საფინანსო, ბიოლოგიური და სხვა სახის პროცესების მოდელირებისა და მართვისათვის.

ქვემოთ ნაჩვენებია განაწილებულპარამეტრებიანი მოდელების გამოყენების შესაძლებლობა მრავალპროდუქტიანი წარმოების ეკონომიკური სისტემის წონასწორული მდგომარეობის აღწერისათვის, რაც საშუალებას აძლევს მეწარმეს გამოიმუშავოს ოპტიმალური სტრატეგია მაქსიმალური მოგების მისაღებად.

2. ძირითადი ნაწილი

განვიხილოთ წარმოებისა და მოხმარების მარტივი ჩაკეტილი მოდელი [2,3]. ვთქვათ წარმოების რომელიმე დარგში გვაქვს საწარმოთა n სიმრავლე, რომელთაგან თითოეული უშვებს ერთი დასახელების პროდუქტს. წარმოებული პროდუქტების სიმრავლე აღვნიშნოთ x-ით და ცხადია $0 \le x \le n$. x პროდუქტის მომხმარებელთა რაოდენობა აღვნიშნოთ m-ით და ყოველ მომხმარებელს მივანიჭოთ კონკრეტული y ნომერი:

$$y=y(x);\ 0 \le y \le m \qquad (1)$$

ვგულისხმობთ, რომ ურთიერთობა წარმოებასა და მოხმარებას შორის რეგულირდება ბაზრის მეშვეობით. დავუშვათ, რომ ბაზარზე დამყარდა ფასების გარკვეული $c(x)$ განაწილება. ამასთან ყოველ y მომხმარებელს აქვს გარკვეული $s(y)$ შემოსავალი, რომლიც შეიძლება დახარჯოს $c(x)$ ფასად x პროდუქტის შესაძენად. აღვნიშნოთ $p(x,y)$-ით x პროდუქტის რაოდენობა, რომელსაც

ნამდვილად შეიძენს y მომხმარებელი, მაშინ $p(x,y)$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც x ცვლადის ფუნქცია ფიქსირებული y მნიშვნელობისთვის, სადაც $y \in [o;m]$, მაშინ $p(x,y)=p_y(x)$. $p(x,y)$ განაწილების განსაზღვრისათვის დავუშვათ, რომ ყოველი y მომხმარებელი პროდუქციის შეძენისას ეყრდნობა სარგებლიანობის რაღაც $Q(p_y(x))$ კრიტერიუმს, ანუ ცდილობს მოახდინოს $Q(p_y(x))$ ფუნქციონალის მაქსიმიზაცია $p(y)$ შემოსავლისა და $c(x)$ საბაზრო ფასის პირობებში. მაშინ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ თითოეული მომხმარებელი ცდილობს გადაწყვიტოს შემდეგი სახის ვარიაციული ამოცანა:

$$\left.\begin{array}{c} Q(p_y(x)) \rightarrow \max \\ S(y) - \int_0^n c(x) p_y(x) dx = 0, \quad 0 \le y \le m \end{array}\right\} \tag{2}$$

ასეთი ტიპის ვარიაციული ამოცანა შიძლება ამოიხსნას ლაგრანჟის მეთოდის გამოყენებით [4]. ამოხსნისათვის საჭიროა ისეთი $\lambda(y)$ მამრავლის არსებობა, რომ

$$F(x, y) = Q\left(p_y(x)\right) - \lambda(y) \int_0^n c(x) p(y_x) dx \tag{3}$$

ფუნქციონალმა მიიღოს მინიმალური მნიშვნელობა.

სარგებლიანობის კრიტერიუმის ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი ფორმაა კვადრატული ინტეგრალური გადახრა y მომხმარებლის რეალურ მომარებასა და იდეალურ მოხმარებას შორის:

$$Q\left(p_y(x)\right) = \int_0^n (p_y(x) - {p_y}^*(x))^2 dx \rightarrow min, \quad 0 \le y \le m \tag{4}$$

სადაც ${p_y}^*(x)$-ით აღნიშნულია y მომხმარებლის მოხმარების იდეალური განაწილება. ცხადია, რომ (4)-ს მინიმიზაციისათვის სასურველია შესრულდეს პირობა: ${p_y}^*(x) = p_y(x)$, $0 \le x \le n$; $0 \le y \le m$ (5) თუმცა ეს პირობა ვერ სრულდება $S(y)$ შემოსავლებზე რეალური შეზღუდვების არსებობის გამო, მაგრამ ყოველი მომხმარებელი მიისწრაფის შეამციროს ${p_y}^*(x) - p_y(x)$ სხვაობა.

(4)-ე კრიტერიუმით მოთხოვნის ოპტიმალური განაწილება ლაგრანჟის მიხედვით შეიძლება შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$${p_y}^*(x) - p_y(x) = , \quad 0 \le y \le m \tag{6}$$

შევიტანოთ (6) გამოსახულება (2)-ში შემავალ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$S(y) = \int_0^n c(x)(p_y^*(x) \text{-} \lambda(y) c(x) dx; \tag{7}$$

საიდანაც ლაგრანჟის $\lambda(y)$ მამრავლის განსაზღვრისათვის მივიღებთ:

$$\lambda(y) = \left(\int_0^n c(x)(p_y^*(x) dx - S(y)\right) / \int_0^n c^2(x) dx\,; \tag{8}$$

ფასების ნორმირების პირობებში: $S(y) = kc(x), k > 0,$ SeiZleba CavTvaloT: $\int_0^n c^2(x) dx = 1$, მაშინ შემოსავლების ოპტიმალური განაწილება ინდივიდუალური y მომხმარებლისათვის მიიღებს სახეს:

$$p_y(x) = p_y^*(x) - \left(\int_0^n c(x) p_y^*(x) dx - S(y)\right) c(x) \tag{9}$$

$$\int_0^n c(x) p_y^*(x) dx = S^*(y) \tag{10}$$

სადაც $S^*(y)$-ით აღნიშნულია შემოსავლის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა y მომხმარებლის იდეალური მოთხოვნილების დასაკმაყოფილებლად. მაშინ (9) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\mathrm{p_y(x)} = p_y^*(x) - \big(S^*(y) - S(y)\big)c(x), \quad 0 \le x \le n, \quad 0 \le y \le m, \tag{11}$$

მოთხოვნის p(x) ფუნქციის მისაღებად მოვახდინოთ (11)-ის მარჯვენა მხარის y ცვლადით ინტეგრება [0; m] ინტეგრალში:

$$\int_0^m p_y(x)dx = \int_0^m p_y^*(x)dx - c(x)\int_0^m \big(S^*(y) - S(y)\big)dx\,; \tag{12}$$

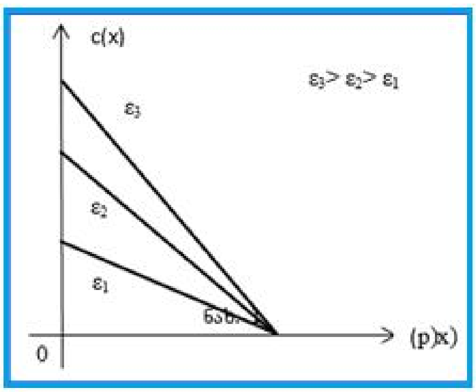
შევიტანოთ აღნიშვნები:

$$p(x) = \int_0^m p_y(x)dx; \quad p^x(x) = \int_0^m p_y^*(x)dx; \quad S^* - S = \xi, \tag{13}$$

მაშინ (12) განტოლება შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$p(x) = \; p^x(x) - \xi c(x), \qquad \xi \ge 0 \tag{14}$$

(14)-ე ფორმულაში $p^x(x)$ – შეესაბამება იმ ფულად თანხას, რომელიც აუცილებელია მომხმარებელთა საზოგადოებისათვის, რომ მან სრულიად დაიკმაყოფილოს მოთხოვნილებები x პროდუქტზე მოცემული c(x) ღირებულების პირობებში, ξ-კოეფიციენტი კი აღნიშნავს დეფიციტს იდეალურ მოთხოვნასა და რეალურ დაკმაყოფილებას შორის. მე-(14) განტოლება წრფივია და ξ-კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის აქვს 1-ელ ნახაზზე ნაჩვენები სახე.



ნახ.1

მიღებული შედეგები საშუალებას იძლევა გადავწყვიტოთ რამდენიმე პრაქტიკულად საინტერესო ამოცანა:

1. თუ ცნობილია x პროდუქტით მიღებული რეალური და იდეალური მოხმარების მაჩვენებლები, შესაძლებელია განვსაზღვროთ ამ პროდუქტის ფასი:

$$\mathrm{c(x)} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\mathrm{p^x(x)} - \mathrm{p(x)}\right) \tag{15}$$

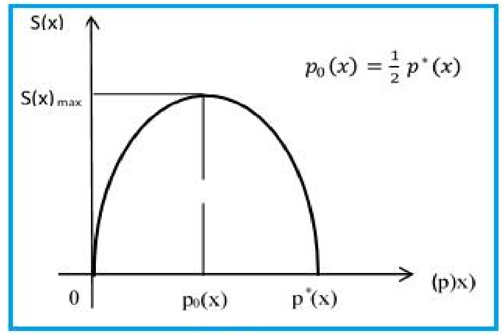
ხოლო x პროდუქტის წარმოებით მიღებული D(x) შემოსავალი შეიძლება შემდეგნაირად შევაფასოდ:

$$S(x) = c(x)p(x) = \frac{p(x)}{\varepsilon}\left(\,p^*(x) - p(x)\right) = -\frac{1}{\varepsilon}\left(p^2(x) + \,p^*(x)p(x)\right) \tag{16}$$

2. შემოსავლის მაქსიმალური მნიშვნელობის მისაღებად (16)-ე კვადრატული ფუნქციის ანალიზის საფუძველზე ადვილად ვღებულობთ (იხ. ნახ. 2)

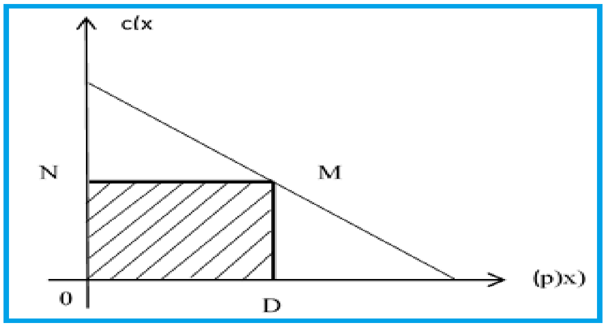
$$\mathrm{S(x)_{max}} = \mathrm{S}\big(\mathrm{p_0(x)}\big) = \mathrm{S}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{p^*(x)}\right) = \frac{1}{4\varepsilon}\,\mathrm{p^{*2}(x)} \tag{17}$$

თუ (17)-ე შედეგს ავსახავთ (15)-ე წრფივი ფუნქციის გრაფიკზე, საჭირო იქნება გრაფიკის ისეთი M წერტილის მოძებნა, რომ ODMN მართკუთხედის ფართობი იყოს მაქსიმალური (ნახ.3).



ნახ.2

ადვილი საჩვენებელია, რომ ოპტიმალურ M წერტილს $p(x)=0,5\, p^{*}(x)$ მნიშვნელობა შეესაბამება.



ნახ.3

3. დასკვნა

ზემოთ ფორმულირებული ამოცანის შეზღუდვების პირობების გათვალისწინებით შეიძლება გავაკეთოთ დასკვნა: x სახეობის პროდუქციის რეალიზაციით მაქსიმალური მოგების (შემოსავლების) მისაღებად საჭიროა მისი წარმოება განვსაზღვროთ პროდუქციაზე იდეალური მოთხოვნის მნიშვნელობის ნახევრით.

ლიტერატურა:

1. Нариманашвили Н.И. (1990). Идентификация нелинейных объектов с распределенными параметрами. Автореф. дисс., ГПИ, Тбилиси

2. Бутковский А.Г. (1985). Методы управления системами с распределенными параметрами. -М., “Наука”

3. Иванилов Ю.П; Лотов А.В. (1979). Математические модели в экономике. -М., “Наука”

4. გუგუშვილი ა., სალუქვაძე მ., ჭიჭინაძე ვ. (1997). ოპტიმალური და ადაპტური სისტემები. წ.2, გამომც. „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი.

VARIATIONAL PROBLEMS IN ECONOMIC SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

Narimanashvili Nodar
Georgian Technical University

Summary

Mathematical model of simple, closed economic system with distributed parameters is considered. On the basis of variation principle the problem of price determination and maximal profit is formulated. The techniques of solution of this problem are shown considering market conditions and recommendations are given for selection of optimal strategy of planning.

ВАРИАЦИОНЫЕ ЗАДАЧИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Нариманашвили Н.
Грузинский Тхнический Университет

Резюме

Рассмотрена простая замкнутая модель распределенной экономической системы. На основе вариационного принципа сформулированы задачы определения цены и получения максимальной прибыли. С учетом рыночных условий, показаны пути решения задач и выработаны рекомендаций по выбору оптимальной стратегии планирования.