მდგომარეობის სივრცის მეთოდი ციფრული მოქმედების მართვის სისტემებში

ნოდარ ნარიმანაშვილი, დავით ნარიმანაშვილი, ვლადიმერ წვერავა
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ციფრული მოქმედების მართვის სისტემების ანალიზისათვის გამოყენებულია მდგომარეობის სივრცის მეთოდი. შემოთავაზებულია მდგომარეობის განტოლების ამოხსნის რამდენიმე ალტერნატიული მეთოდი, რომლებიც ადვილად რეალიზდება თანამედროვე კომპიუტერული პროგრამების გამოყენებით.

საკვანძო სიტყვები: მართვის ციფრული სისტემები. მდგომარეობის განტოლებები. მდგომარეობის მატრიცა. z-გარდასახვა.

1. შესავალი

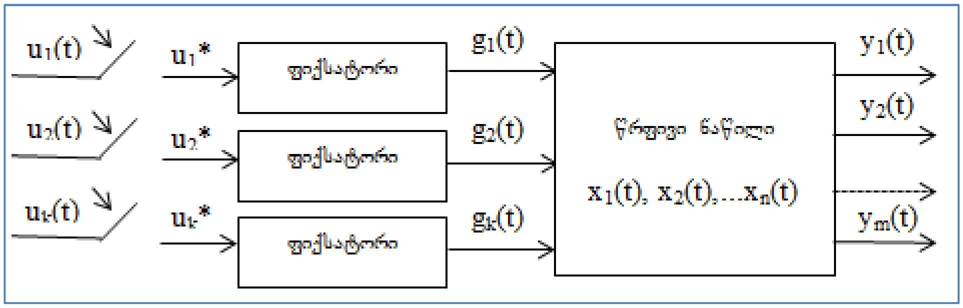
მართვის თანამედროვე მრავალგანზომილებიანი სისტემების ანალიზისა და სინთეზის ამოცანებში ტრადიციულ ოპერატორულ და სიხშირულ მეთოდებთან ერთად ფართოდ გამოიყენება მდგომარეობის სივრცის მეთოდი. თუ მართვის სისტემა n-განზომილებიანია, მაშინ მდგომარეობის სივრცეს უწოდებენ n-გამზომილებიანი მართკუთხა საკოორდინატო სისტემას, რომლის ღერძებზეც სისტემის მდგომარეობის კოორდინატებია გადადებული და რომლის ყოველ წერტილს სისტემის სრულიად გარკვეული მდგომარეობა შეესაბამება. ეს მეთოდი საშუალებას იძლევა საწყისი $\overline{x(t_0)}$ მდგომარეობისა და შემავალი $\overline{u(t)}$ ცვლადების საშუალებით განისაზღვროს სისტემის მდგომარეობა $t \geq t_0$ მომენტში. ამ მეთოდის ერთ-ერთი ძირითადი უპირატესობა სხვა მეთოდებთან შედარებით ისაა, რომ იგი მოხერხებულად ჯდება თანამედროვე კომპიუტერულ პროგრამებში, რასაც ხელს უწყობს მდგომარეობის განტოლებების ჩაწერის კომპაქტური მატრიცული ფორმა. გარდა ამისა, მეთოდი წარმატებით გამოიყენება საკმაოდ ფართო კლასის არაწრფივი და არასტაციონალური მართვის სისტემების ანალიზში.

უწყვეტი დინამიკური სისტემების კვლევა დროით არეში, რომელიც მდგომარეობის სივრცის მეთოდს ემყარება, უკვე კარგადაა აპრობირებული პრაქტიკაში და თანამედროვე კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებით ეფექტურად წყვეტს მრავალგანზომილებიანი სისტემების მართვის ისეთ პრობლემატურ ამოცანებს, როგორიცაა მდგრადობის ანალიზი, გარდამავალი პროცესის ხარისხობრივი შეფასება, სისტემის მართვადობა, დაკვირვებადობა და სხვა [1,2].

ამავდროულად, დღიდან დღემდე აქტუალური ხდება მართვის მრავალგანზომილებიანი სისტემების კვლევის ამოცანები, რაც განპირობებულია იმ ელემენტარული ჭეშმარიტებით, რომ ყველა თანამედროვე სისტემა შეიცავს ციფრულ ელემენტებს და ამიტომ მთლიანობაში ისინი მიეკუთვნებიან ციფრული (დისკრეტული) მოქმედების სისტემებს. მდგომარეობის სივრცის მეთოდის გამოყენება ციფრულ სისტემებში საშუალებას იძლევა გადავწყვიტოთ ასეთი სისტემების კვლევის სხვადასხვა ამოცანა სიგნალების დაკვანტვის განსხვავებული ფორმებისათვის.

2. ძირითადი ნაწილი

მეთოდის გამოყენების საილუსტრაციოდ ჩავწეროთ მდგომარეობის სივრცის განტოლებები მრავალგანზომილებიანი წრფივი დისკრეტული სისტემისათვის, რომელშიც ხდება სიგნალების დაკვანტვა მუდმივი ტაქტით მისი შემდგომი ფიქსაციით. მაშინ ღია სისტემის გამარტივებული სქემა მიიღებს შემდეგ სახეს:



ნახ.1

სადაც $x_1(t)$, $x_2(t)$,...$x_n(t)$ – სისტემის მდგომარეობის კოორდინატებია, $y_1(t)$, $y_2(t)$,...$y_m(t)$ – სისტემის გამოსასვლელი სიდიდეები, $u_1(t)$, $u_2(t)$,...$u_k(t)$ – სისტემის უწყვეტი შემავალი ზემოქმედებები, u_k^* - მუდმივი ბიჯით დაკვანტვის შედეგია, ხოლო $g_i(t)$ განისაზღვრება შემდეგი განტოლებებით:

$$\left.\begin{array}{l} g_i(t)=g_i(KT)=u_i(KT), \quad KT\le t<(K+1)T \\ i = 1,2,3,\dots;\ K = 0,1,2,\dots; \end{array}\right\} \tag{1}$$

T დაკვანტვის ბიჯია და სიმარტივისათვის შეიძლება მივიღოთ T=1. მაშინ როგორც ცნობილია დისკრეტული სისტემის ვექტორული სხვაობითი განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით [3, 4]:

$$X(K+1) = AX(K) + BG(K) \tag{2}$$

სადაც A სისტემის მატრიცაა და მისი განზომილება (nxn), ხოლო B მართვის გადაცემის მატრიცაა განზომილები (nxm).

სისტემის გამოსასვლელი ანალოგიურად შეიძლება შემდეგი ვექტორული განტოლებით წარმოვადგინოთ:

$$Y(K) = C^T X(K) + DG(K) \tag{3}$$

სადაც C და D რიცხვითი მატრიცებია.

სისტემის წრფივი უწყვეტი ნაწილის ვექტორული განტოლებები შემდეგი სახისაა [1;2]:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bg(t) \\ Y(t) = C^T x(t) + Dg(t) \end{array}\right\} \tag{4}$$

ამ სისტემის პირველი განტოლების ამონახსნი X(0) საწყისი პირობებისათვის შემდეგნაირად ჩაიწერება [1;2;3]:

$$X(t) = \Phi(t)X(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)B(\tau)g(\tau)d\tau \tag{5}$$

სადაც Φ(t) სისტემის გარდამავალი მატრიცა განისაზღვრება ფორმულით:

$$\Phi(t) = e^{-At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} \tag{6}$$

(5) ამონახსნის ანალოგიურად ციფრული სისტემის მდგომარეობის (2) განტოლების ამონახსნი (1)-ის გათვალისწინებით შეიძლება შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$X(K+1) = \Phi(K)X(K) + G(K)\int_K^{K+1} \Phi(K+1,\tau)B(\tau)d\tau \tag{7}$$

ამ განტოლებაში Φ(K) სისტემის გარდამავალი მატრიცის მნიშვნელობაა დისკრეტიზაციის K მომენტში, როდესაც A და B რიცხვითი მატრიცებია.

(2)-ე ვექტორული სხვაობითი განტოლების ამოხნის ალტერნატიული გზაა შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულებების გამოყენება:

$$\left.\begin{aligned} x(1) &= AX(0) + Bg(0) \\ x(2) &= AX(1) + Bg(1) = A^2X(0) + ABg(0) + Bg(1) \\ &\dots\dots\dots \\ x(n) &= AX(N-1) + Bg(N-1) = A^nX(0) + \sum_{i=1}^{N} A^{i-1}Bg(N-i) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

სისტემის გამოსასვლელი y(k) სიგნალები განისაზღვრება (3)-ე განტოლებაში k-ს თანმიმდევრული ჩასმით.

ცნობილია, რომ ციფრული სისტემის აღწერის ერთ-ერთი გავრცელებული ფორმა Z-გარდასახვას ემყარება. ამიტომ შესაძლებელია G(K) ვექტორი მოცემული იყოს Z-ფორმითაც. ასეთ შემთხვევაში მდგომარეობის (2) განტოლების ამოსახსნელად შეიძლება ვისარგებლოთ Z-გარდასახვის მეთოდით. ამისათვის მდგომარეობის ვექტორი ჩავწეროთ Z-მარცხენა ძვრის ფორმაში:

$$Z\{X(K+1)\} = Z[X(Z)-X(0)] \quad (9)$$

მაშინ ციფრული სისტემის მდგომარეობის განტოლება Z-ფორმაში მიიღებს სახეს:

$$X(Z) = (ZI-A)^{-1}ZX(0) + [ZI-A]^{-1}Bg(Z) \quad (10)$$

ხოლო გამოსასვლელი ვექტორისათვის გვექნება:

$$Y(Z) = C^T(ZI-A)^{-1}ZX(0) + (C^T[ZI-A]^{-1}B+D)g(Z) \quad (11)$$

(7)-ე და (10)-ე გამოსახულებების შედარებით მივიღებთ:

$$A(K)=Z^{-1}\{[ZI-A]^{-1}Z\} \quad (12)$$

(10)-(12) გამოსახულებებში I – ერთეულოვანი მატრიცაა, ხოლო Z^{-1} არის Z-უკუგარდასახვის სიმბოლო.

ნულოვანი საწყისი პირობებისათვის, როცა X(0)=0, ციფრული სისტემის გადაცემის ფუნქცია Z-ფორმაში შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$W(Z) = \frac{y(Z)}{g(Z)} = C^T(ZI-A)^{-1}B+D \quad (13)$$

ხოლო სისტემის მახასიათებელი განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\det[ZI-A] = 0 \quad (14)$$

ამრიგად Z-პირდაპირი და უკუგარდასახვების გამოყენებითაც შესაძლებელია ციფრული სისტემის მდგომარეობის განტოლების ამოხსნა, რაც ასეთი სისტემების კვლევის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა.

ამ მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი, როდესაც წრფივი სისტემის უწყვეტი ნაწილის დინამიკა მოცემულია შემდეგი განტოლებებით:

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} g(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

ლაპლასის ოპერატორულ ფორმაში გვექნება:

$$[SI-A]^{-1} = \left[\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} S & -1 \\ 2 & S-3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{S^2+3S+2}\begin{bmatrix} S+3 & 1 \\ -2 & S \end{bmatrix} \quad (15)$$

საიდანაც უკუგარდასახვით ვღებულობთ:

$$\Phi(t) = L^{-1}[(SI-A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (16)$$

მაშინ (7)-ე გამოსახულების მარჯვენა მხარეში ინტეგრალის მნიშვნელობა დაკვანტვის T პერიოდსათვის შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\int_0^T \Phi(T-\tau)Bd\tau = \int_0^T \begin{vmatrix} e^{-(T-\tau)} - e^{-2(T-\tau)} \\ -e^{-(T-\tau)} + 2e^{-2(T-\tau)} \end{vmatrix} d\tau = \begin{vmatrix} 0{,}5 - e^{-T} + 0{,}5e^{-2T} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{vmatrix} \quad (17)$$

თუ (17)-ე მნიშვნელობას შევიტანთ მდგომარეობის (7)-ე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\begin{bmatrix} x_1[(K+1)T] \\ x_2[(K+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-T}-e^{-2T} & e^{-T}-e^{-2T} \\ -2e^{-T}+2e^{-2T} & -e^{-T}+2e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(KT) \\ x_2(KT) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0,5-e^{-T}+0,5e^{-2T} \\ e^{-T}-e^{-2T} \end{bmatrix} g(KT) \quad (18)$$

T=1 მნიშვნელობისათვის (18) განტოლება მიიღებს გამარტივებულ სახეს:

$$\begin{bmatrix} x_1[(K+1)T] \\ x_2[(K+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,23 \\ -0,47 & -0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{bmatrix} g(K) \quad (19)$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ასეთი მეთოდები წარმატებით რეალიზდება თანამედროვე კომპიუტერული პროგრამების გამოყენებით. ერთ-ერთი ასეთია პროგრამული პაკეტი MATLAB-ი Simulink ინსტრუმენტით.

3. დასკვნა

ციფრული მოქმედების სისტემების შესწავლის მიზნით მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ მდგომარეობის სივრცის მეთოდი. არსებობს მდგომარეობის განტოლებების ამოხსნის რამდენიმე ალტერნატიული მეთოდი, რომლებიც წარმატებით რეალიზდება თანამედროვე პროგრამული პაკეტების გამოყენებით.

ლიტერატურა:

1. იმედაძე თ., მჭედლიშვილი ნ. მართვის სისტემების ინჟინერია. სტუ, თბილისი, 2009
2. Дорф Р., Бипош Р. Современные системы управления, М., 2002
3. Изерман Р. Цифровые системы управления. М., «Мир», 1984
4. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. М., «Машиностроение», 1986.

METHOD OF STATE SPACE IN THE DIGITAL CONTROL SYSTEM

Narimanashvili Nodar, Narimanashvili David, Tsverava Vladimer

Georgian Technical University

Summary

Method of state space is used for the analysis of digital control systems. In the represented paper there are recommended methods to solve the equation of state of digital systems. These methods are easily realized by means of modern computer software.

МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЯ В ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Нариманашвили Н., Нариманашвили Д., Цверава В.

Грузинский Технический Университет

Резюме

С целью анализа цифровых систем управления применен метод пространства состояния. Рекомендованы методы решения уравнения состояния цифровых систем, которые хорошо реализуются с применением современных компьютерных программ.