

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ПРЕПЯТСТВИЯ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Яшвили Л.З.

Грузинский Технический Университет

Резюме

В работе, строится математическая модель двумерного стационарного обтекания препятствий различной, сложной конфигурации, потоком вязкой несжимаемой жидкости. Набегающий поток моделируется эпюорой различного очертания. Приводятся результаты расчётов на основе пакета MathCAD.

Ключевые слова: вязкая жидкость, поток, сооружение.

1. Введение

При изучении задач, определения ветровой нагрузки на инженерные сооружения, важно, иметь представление о характере набегающего потока и возможных схемах обтекания. Для дозвукового потока ветра, как обычно, применяется модель вязкой несжимаемой жидкости Навье-Стокса[1-3]. В случае, турбулентного потока вводятся различные полуэмпирические поправки или используются определённые феноменологические уравнения основанные на определённых допущениях[4]. Мы будем пользоваться классическими уравнениями Навье-Стокса, а турбулентность потока, будем учитывать с помощью моделирования соответствующей эпюры скоростей набегающего потока. Эскиз обтекания здания потоком ветра изображён на рис.1

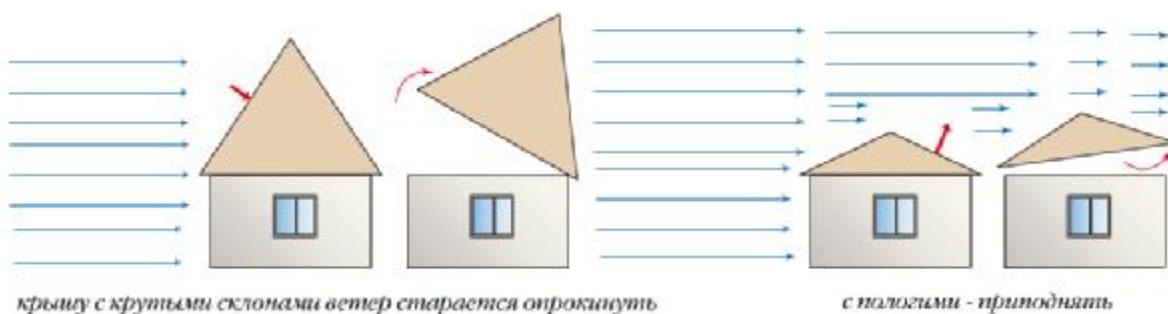
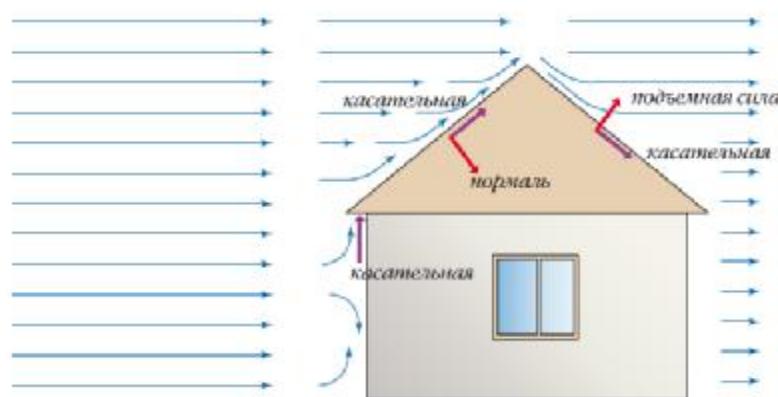


Рис. 1. Эскиз обтекания здания потоком ветра

В случае полуэмпирической теории, пользуются соответствующими нормами СНиП. Расчетное значение средней составляющей ветровой нагрузки w в зависимости от высоты z над поверхностью земли следует определять по формуле: $W_p = W \times k(z) \times c$, где W — расчетное значение ветрового давления, определяется по карте приложения в «Изменениях к СНиП 2.01.07-85»; k — коэффициент, учитывающий изменение ветрового давления для высоты z , определяется по таблице 1; c — аэродинамический коэффициент, учитывающий изменение направления давления нормальных сил в зависимости от того с какой стороны находится скат по отношению к ветру, с подветренной или наветренной стороны рис 2.

Коэффициент $k(z)$ для типов местности

Таблица 1

Высота z , м	A	Б	В
не более 5	0,75	0,5	0,4
10	1,0	0,65	0,4
20	1,25	0,85	0,55

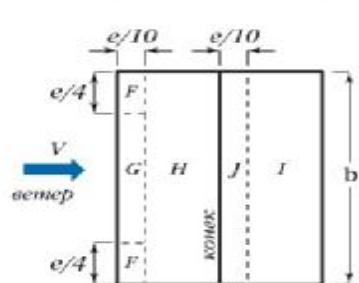
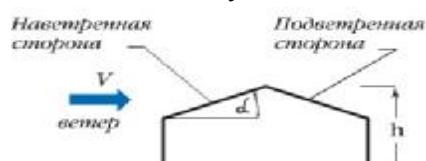
Типы местности:

А – открытые побережья морей, озер и водохранилищ, пустыни, степи, лесостепи, тундра;

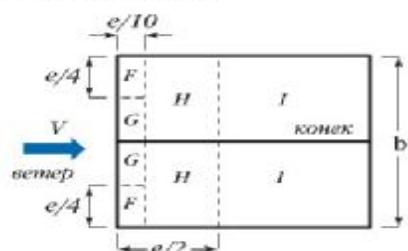
Б – городские территории, лесные массивы и другие местности, равномерно покрытые препятствиями высотой более 10 м;

В – городские районы с плотной застройкой зданиями высотой более 25 м

Соответствующие значения аэродинамических коэффициентов даются на рис. 2.



е выбирается по наименьшему значению из b или 2h



Коэффициенты (C) для двухскатных покрытий:

При ветре в скат крыши

Угол α	F	G	H	I	J
15°	-0,9	-0,8	-0,3	-0,4	-1,0
	0,2	0,2	0,2		
30°	-0,5	-0,5	-0,2	-0,4	-0,5
	0,7	0,7	0,4		
45°	0,7	0,7	0,6	-0,2	-0,3
60°	0,7	0,7	0,7	-0,2	-0,3
75°	0,8	0,8	0,8	-0,2	-0,3

При ветре во фронтон

Угол α	F	G	H	I
0°	-1,8	-1,3	-0,7	-0,5
15°	-1,3	-1,3	-0,6	-0,5
30°	-1,1	-1,4	-0,8	-0,5
45°	-1,1	-1,4	-0,9	-0,5
60°	-1,1	-1,2	-0,8	-0,5
75°	-1,1	-1,2	-0,8	-0,5

Рис.2. Значения полуэмпирических аэродинамических коэффициентов по СНиП

2. Математическое моделирование потока ветра

Поток ветра, можно рассматривать, как вязкую несжимаемую жидкость. Соответственно, динамические уравнения для потока ветра совпадают с уравнениями Навье – Стокса, а так как, в дозвуковом режиме обтекания, можно пренебречь сжимаемостью воздуха, будем пользоваться уравнениями неразрывности в форме соленоидального векторного поля. Тогда, легко можно построить математическую модель ветрового потока.

Пусть имеем область Ω -заполненную вязкой жидкостью с Липшицевой границей $\partial\Omega$. Уравнение Навье - Стокса запишем в виде :

$$-\frac{1}{Re}V_{j,ii} + V_i V_{j,i} + p_{,i} = f_j \cdot V_j \quad \text{в } \Omega , \quad Re := 300$$

(1)

$$V_{j,j} = 0 \quad \text{в } \Omega , \quad (2)$$

$$V_{j|t=0} = V_j^o \quad \text{в } \Omega , \quad (3)$$

$$V_{j|\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega . \quad (4)$$

где Re – число Рейнольдса.

3.Алгоритм численного решения и программа для задачи определения определяющих параметров потока ветра

Будем, для начала, рассматривать стационарное обтекание препятствия прямоугольной формы турбулентным потоком ветра, где турбулентность моделируется на основе выбора соответствующей эпюры скоростей набегающего потока

$$-\frac{1}{Re}V_{j,ii} + V_i V_{j,i} + P_{,j} = 0 , \quad (5)$$

$$V_{j,j} = 0 \quad \text{в } \Omega , \quad (6)$$

$$V_{j|\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega , \quad (7)$$

Кроме того, надо присоединить и кинематические условия о характере набегающе-го потока, с учётом вида эпюры скоростей набегающего потока. Рассмотрим схему расчёта рис.3.

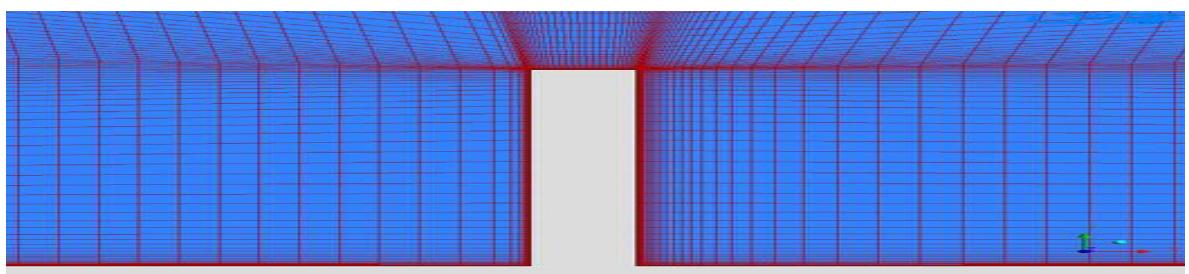


Рис.3. Расчёчная схема обтекания прямоугольника

Программа расчётов обтекания прямоугольника стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости на основе пакета *MathCAD* имеет вид:

$$\begin{aligned}
 X := & \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -0.8 \\ -0.6 \\ -0.4 \\ -0.2 \\ 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & Y := & \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.8 \\ 0.6 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} & \xi := & \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \\ 1.2 \\ 1.4 \\ 1.6 \\ 1.8 \\ 2 \\ 2.2 \\ 2.4 \\ 2.6 \\ 2.8 \\ 3 \\ 3.2 \end{pmatrix} \\
 & & & & & \text{Re} := 300 \\
 & & & & & n := 2 \\
 & & & & & m := 18 \\
 & & & & & k := 15
 \end{aligned}$$

$$u(x, y, a) := 1 + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n [a_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j+1}]$$

$$v(x, y, b) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n [b_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j+1}]$$

$$p(x, y, c) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (c_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j)$$

$$\text{IGR}(a, b) := \sum_{i=0}^m (u(x_i, Y_i, a)^2 + v(x_i, Y_i, b)^2)$$

$$\text{IKIN1}(a, b) := \sum_{i=0}^k [(u(-5, \xi_i, a) - 1)^2 + v(-5, \xi_i, b)^2]$$

$$Dux(x, y, a) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[(i+1) \cdot a_{i,j} \cdot (x+5)^i \cdot (4-y)^{j+1} \right]$$

$$Duy(x, y, a) := - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[(j+1) \cdot a_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^j \right]$$

$$Dvx(x, y, b) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[(i+1) \cdot b_{i,j} \cdot (x+5)^i \cdot (4-y)^{j+1} \right]$$

$$Dvy(x, y, b) := - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[(j+1) \cdot b_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^j \right]$$

$$Duxx(x, y, a) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \left[i \cdot (i+1) \cdot a_{i,j} \cdot (x+5)^{i-1} \cdot y^{j+1} \right]$$

$$Duyy(x, y, a) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n \left[(j+1) \cdot j \cdot a_{i,j} \cdot (x+5)^i \cdot (4-y)^{j-1} \right]$$

$$Dvxx(x, y, b) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \left[i \cdot (i+1) \cdot b_{i,j} \cdot (x+5)^{i-1} \cdot (4-y)^{j+1} \right]$$

$$Dvy(y, x, b) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n \left[(j+1) \cdot j \cdot b_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j-1} \right]$$

$$Dpx(x, y, c) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \left(i \cdot c_{i,j} \cdot x^{i-1} \cdot y^j \right)$$

$$Dpy(x, y, c) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n \left(j \cdot c_{i,j} \cdot x^i \cdot y^{j-1} \right)$$

$$UDIN0(a, b, c, x, y) := u(x, y, a) \cdot Dux(x, y, a) + v(x, y, b) \cdot Duy(x, y, a) + Dpx(x, y, c)$$

$$UDIN(a, b, c, x, y) := \left[UDIN0(a, b, c, x, y) - \frac{1}{Re} \cdot (Duxx(x, y, a) + Duyy(x, y, a)) \right]^2$$

$$VDIN0(a, b, c, x, y) := u(x, y, a) \cdot Dvx(x, y, b) + v(x, y, b) \cdot Dvy(x, y, b) + Dpy(x, y, c)$$

$$VDIN(a, b, c, x, y) := \left[VDIN0(a, b, c, x, y) - \frac{1}{Re} \cdot (Dvxx(x, y, b) + Dvy(y, x, b)) \right]^2$$

$$CONTN(a, b, x, y) := (Dux(x, y, a) + Dvy(x, y, b))^2$$

$$DYNAMIC01(a, b, c) := \int_{-5}^{-1} \int_0^{\xi_k} UDIN(a, b, c, x, y) dy dx + \int_{-1}^1 \int_1^{\xi_k} UDIN(a, b, c, x, y) dy dx$$

$$DYNAMIC1(a, b, c) := DYNAMIC01(a, b, c) + \int_1^{10} \int_0^{\xi_k} UDIN(a, b, c, x, y) dy dx$$

$$DYNAMIC02(a, b, c) := \int_{-5}^{-1} \int_0^{\xi_k} VDIN(a, b, c, x, y) dy dx + \int_{-1}^1 \int_1^{\xi_k} VDIN(a, b, c, x, y) dy dx$$

$$DYNAMIC2(a, b, c) := DYNAMIC02(a, b, c) + \int_1^{10} \int_0^{\xi_k} VDIN(a, b, c, x, y) dy dx$$

$$CONT0(a, b) := \int_{-5}^{-1} \int_0^{\xi_k} CONTN(a, b, x, y) dy dx + \int_{-1}^1 \int_1^{\xi_k} CONTN(a, b, x, y) dy dx$$

$$CONT(a, b) := CONT0(a, b) + \int_1^{10} \int_0^{\xi_k} CONTN(a, b, x, y) dy dx$$

$$f1(a, b, c) := 8 \cdot IGR(a, b) + IKIN1(a, b) + DYNAMIC1(a, b, c) + DYNAMIC2(a, b, c)$$

$$f(a, b, c) := f1(a, b, c) + CONT(a, b)$$

$$i := 0..n$$

$$j := 0..n$$

$$a_{i,j} := -0.1 + rnd(0.1)$$

$$b_{i,j} := -0.01 + rnd(0.02)$$

$$c_{i,j} := -0.1 + rnd(0.1)$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -0.039 & -0.093 & -0.035 \\ -0.09 & -0.077 & -0.008 \\ -0.034 & -0.051 & -0.05 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0.004 & 0.002 \\ -0.01 & -0.008 & 0.007 \\ 0.005 & -0.002 & 0.001 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -0.004 & -0.082 & -0.087 \\ -0.005 & -0.097 & -0.094 \\ -0.087 & -0.014 & -0.028 \end{pmatrix}$$

$$\text{Given } u(8, 3, a) > 0$$

$$\begin{array}{llll} u(-2, 3, a) > 0 & u(-1, 3, a) > 0 & u(1, 3, a) > 0 & u(3, 3, a) > 0 \\ u(-4, 3, a) > 0 & u(-3, 3, a) > 0 & u(2, 3, a) > 0 & u(4, 3, a) > 0 \end{array}$$

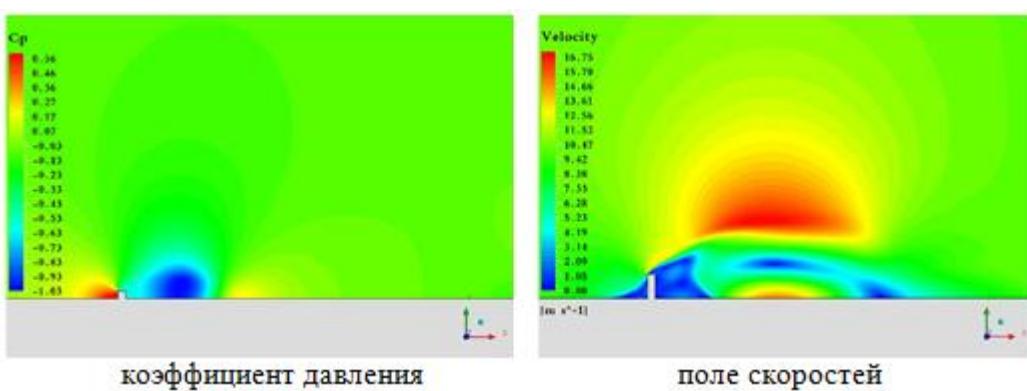
S := Minimize (f , a , b , c)

$$S = \begin{pmatrix} -0.009 & -0.04 & -0.008 \\ -0.02 & -0.015 & -0.004 \\ -0.004 & 0.007 & 0.001 \end{pmatrix}$$

$$a := -(s)_0 \quad b := s_1 \quad c := -s_2$$

$$u(x, y, a) := 1 + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[a_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j+1} \right]$$

$$v(x, y, b) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n [b_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j+1}] \quad p(x, y, c) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (c_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j)$$



Расчёт сооружений сложной формы, производится аналогично и изменяются, лишь, массивы данных границы X, Y.

Значения аэродинамических коэффициентов для различных сооружений, полученные на основе теоретических численных расчётов имеют вид рис.4.

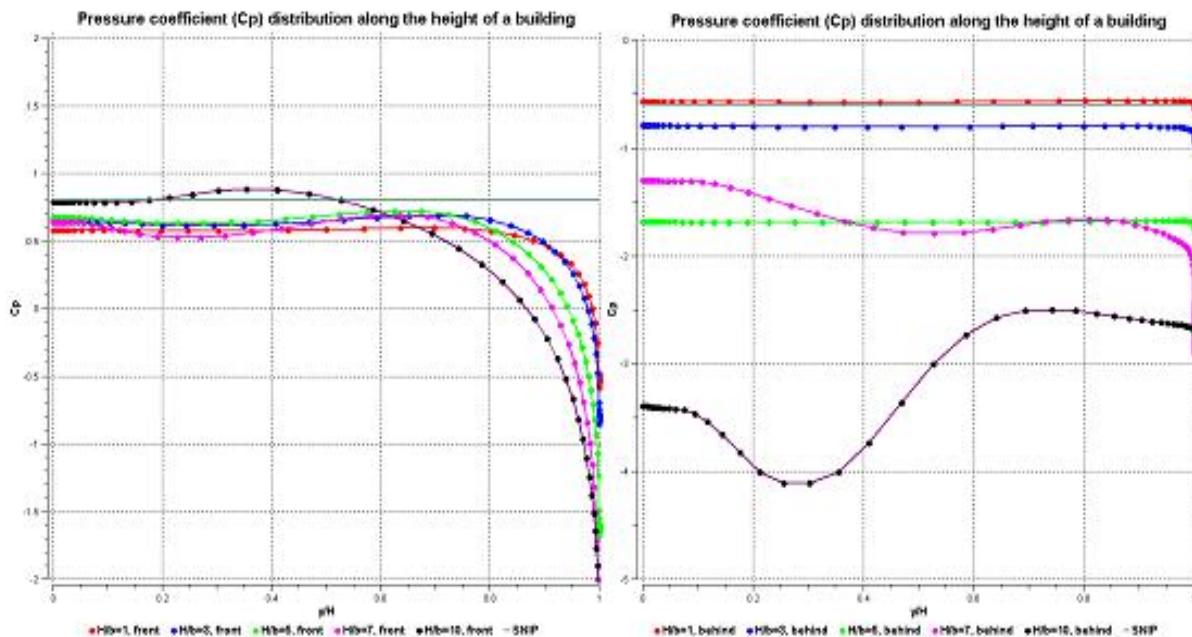


Рис.4. Значения аэродинамических коэффициентов для сооружений различной формы

На рис.4 представлены графики распределения коэффициентов давления Ср по высоте здания с наветренной стороны (передний фасад здания, слева) и с подветренной стороны (задняя стена здания, справа). Цветные кривые с точками соответствуют различной относительной высоте здания, темно-зеленые горизонтальные прямые – значения по СНиП 2.01.07-85, закладываемые в стандартный строительный расчет ветровых нагрузок.

Сравнения с результатами инженерных расчётов, по существующим международным нормам, показывает достаточно хорошее совпадение для одиночных зданий, но, при расчёте нагрузок на массив зданий, расхождение результатов расчётов, от соответствующих нормативных отличается внушительно, так, как нормативы не могут учесть реальную картину обтекания, а наши результаты более реально описывают возникающие нагрузки, что хорошо видно при сравнении с результатами натурных экспериментов.

3. Заключение

Как показывают проведенные расчеты (в двумерной постановке), аэродинамика зданий прямоугольной формы носит ярко выраженный отрывной характер, вниз по потоку от здания образуется обширная протяженная область рециркуляционного течения, превышающая по размерам высоту здания в несколько раз, и характеризующаяся малыми скоростями, возвратными токами, сильным разряжением и высоким уровнем турбулентной кинетической энергии. Причем с увеличением высоты здания структура этой застойной турбулентной зоны на подветренной стороне позади здания несколько меняет свою структуру и размеры, что оказывается на качественном и количественном поведении местных коэффициентов давления по высоте здания. Как видно, при высотах $H/b \leq 7$, СНиП 2.01.07-85 достаточно хорошо описывает значение ветровой нагрузки для наветренной стороны здания ($Cp=0.8$) на 80% высоты здания. Но при большей высоте здания $H/b \geq 10$, распределение коэффициентов Ср по

высоте приобретает более неравномерный характер и может превышать расчетное значение СрСниП=0.8. Что касается подветренной стороны (задний фасад здания), то здесь рекомендованное СНиП 2.01.07-85 значение коэффициента СрСниП=-0.6 (разрежение) согласуется с расчетным значением только для стандартных невысоких зданий ($H/b=1$). При $H/b=3$ отрицательная нагрузка возрастает уже до -0.8, т.е. на 30%, а при дальнейшем увеличении высоты здания до $H/b=10$ уровень отрицательной нагрузки может превышать номинальную в 3-5 раз. Эти сравнения показывают, что применение СНиП 2.01.07-85 к высотным зданиям приводит к неверным, заниженным значениям ветровых нагрузок, что может существенно нарушить эксплуатацию высотных зданий и привести к их разрушению вследствие превышения допустимых норм прочности.

Литература:

1. Обгадзе Т.А. Элементы математического моделирования. ГПИ, Тбилиси, 1989
2. Рвачёв В.А., Проценко В.С., Манько Г.П., Гончарюк И.В., Шевченко А.Н., Стоян Ю.Г. Теория R – функции и актуальные проблемы современной прикладной математики. Наукова думка, Киев, 1986
3. Обгадзе Т.А., Прокошев В.Г. Вычислительная физика. Владимирский Гос.Университет. Владимир, 1999
4. СНиП 2.06.04-82*. Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые и от судов). www.know-house.ru/gost/gost3_1.html

**რთული გეომეტრიული ფორმის ფინანდებობის გარსდენის
ეათვაზიკური მოდელირება პლანი უკუმში სითხით და
პილოდინამიკური დატვირთვების განსაზღვრა**
იაშვილი ლაშა
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
რეზიუმე

ნაშრომში, იგება სხვადასხვა გეომეტრიული ფორმის წინააღმდეგობის, ბლანტი, უცუმში სითხის სტაციონარული ნაკადით გარსდენის მათემატიკური მოდელი. გარსდენი სითხის ტურბულენტური ნაკადი მოდელირდება სხვადასხვა კონფიგურაციის სიჩქარეთა ეპიურით. მოცემულია ატპ პაკეტზე წარმოებული, შესაბამისი გათვლების შედეგები.

MATHEMATICAL MODELLING OF THE FLOW OF THE OBSTACLE OF THE DIFFICULT GEOMETRICAL CONFIGURATION BY VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID AND DEFINITION OF HYDRODYNAMIC LOADINGS

Lashvili Lasha

Georgian Technical University

Summary

In this paper, based on different geometric forms of resistance, viscous, fluid flow is covered stationary mathematical model. turbulent fluid flow in a variety of configurations is modeling by Epiruan speed, We get results of calculations on the basis of a MathCAD package.