

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛОРЕНЦА В СТРОИТЕЛЬНОМ БИЗНЕСЕ

Гоголадзе Владимир Рамазович

Россия, МИСИ

Резюме

В работе на основе концепции обыкновенных математических моделей, строится модель производственного процесса в строительном бизнесе. Построенная математическая модель при определённом выборе коэффициентов приводится к модели Лоренца. На основе программы MathCAD изучается динамика производственного процесса в строительном бизнесе и приводится экономическая интерпретация странного аттрактора Лоренца.

Ключевые слова: странный аттрактор. Лоренц. Строительный бизнес.

1. Построение математической модели

Скорость изменения объёма производства в строительном бизнесе пропорциональна разности, между доходом от реализации продукции строительного производства (продажа или сдача в аренду зданий и сооружений) и расходом производственного процесса (строительные материалы, зарплата, налоги . . .).

Если принять обозначения:

x - объём производства в денежном выражении;

y - объём реализованной продукции;

α - рыночная цена единичного объёма реализованной продукции;

β - приведённая себестоимость единичного объёма произведённой продукции в строительном бизнесе, тогда получаем уравнение:

$$\dot{x} = \alpha y - \beta x. \quad (1)$$

Скорость изменения объёма реализованной продукции в строительном бизнесе, пропорциональна разности между объёмом рыночного обеспечения произведённой продукции, объёмом насыщения рынка и объёмом обеспеченного спроса на ресурсы.

Если принять обозначения:

r - коэффициент рыночного спроса на заданный объём произведённой продукции;

γ - коэффициент насыщения рынка;

δ - коэффициент обеспеченности производства ресурсами;

z - необходимый объём ресурсов для производственного процесса в денежном выражении, тогда получаем уравнение

$$\dot{y} = rx - \gamma y - \delta xz. \quad (2)$$

Скорость изменения объёма ресурсов строительного производства, пропорциональна разности между объёмом притока ресурсов и объёмом потраченных в производственном процессе ресурсами.

Если принять обозначения:

b - коэффициент скорости расхода ресурсов в строительном бизнесе;

l - коэффициент ресурсообеспечённости строительного производства, получаем уравнение

$$\dot{z} = -bz + lxy. \quad (3)$$

Таким образом, получаем математическую модель функционирования строительного производства в виде:

$$\dot{x} = \alpha y - \beta x, \quad (4)$$

$$\dot{y} = rx - \gamma y - \delta xz, \quad (5)$$

$$\dot{z} = -bz + lxy. \quad (6)$$

2. Исследование модели

Легко заметить, что система (4),(5),(6) совпадает с моделью Лоренца при значениях коэффициентов

$$\alpha = \beta = 10; \quad r = 28; \quad \gamma = \delta = l = 1; \quad b = \frac{8}{3}.$$

В этом случае, на фазовой плоскости получаем странный аттрактор Лоренца, который как известно, представляет фрактальное множество. Аттрактор Лоренца соответствует возникновению хаоса в детерминированной системе. В этом случае, объёмы производства и дохода становятся неуправляемыми и система движется к разрушению. Поэтому, стараются обойти хаотические режимы работы строительного предприятия, с помощью подбора соответствующих значений определяющих параметров системы.

Система уравнений Лоренца имеет вид

$$\dot{x} = 10y - 10x,$$

$$\dot{y} = 28x - y - xz,$$

$$\dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy.$$

Если принять единичные начальные условия для определяющих параметров системы Лоренца, то легко найти решение на основе пакета MathCAD.

Системе уравнений Лоренца в MathCAD соответствует матричный оператор

$$D(t, Q) := \begin{pmatrix} 10 \cdot Q_1 - 10 \cdot Q_0 \\ -Q_1 - Q_0 \cdot Q_2 + 28 \cdot Q_0 \\ Q_0 \cdot Q_1 - \frac{8}{3} \cdot Q_2 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы уравнений Лоренца с единичными начальными условиями составляем программу:

$$\begin{aligned} L &:= \text{Rkadapt} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, 3000, D \right] \\ t &:= L^{(0)} \quad X := L^{(1)} \quad Y := L^{(2)} \quad Z := L^{(3)} \\ i &:= 0..3000 \end{aligned}$$

3. Решения системы уравнений Лоренца

Решения даются в виде графиков на рис.1-3.

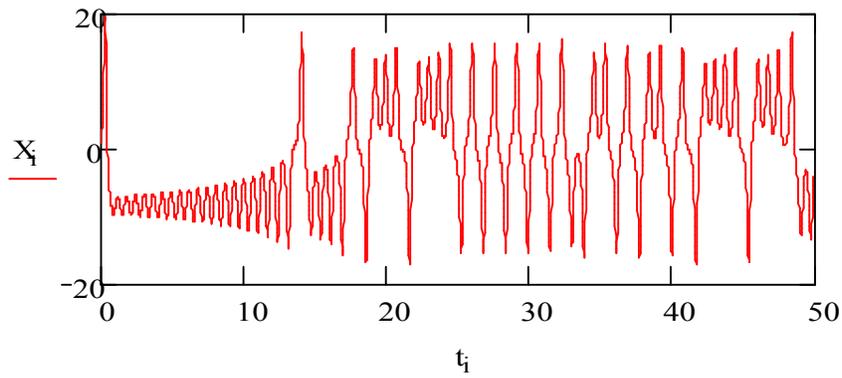


Рис.1. Зависимость объёма строительного производства от времени

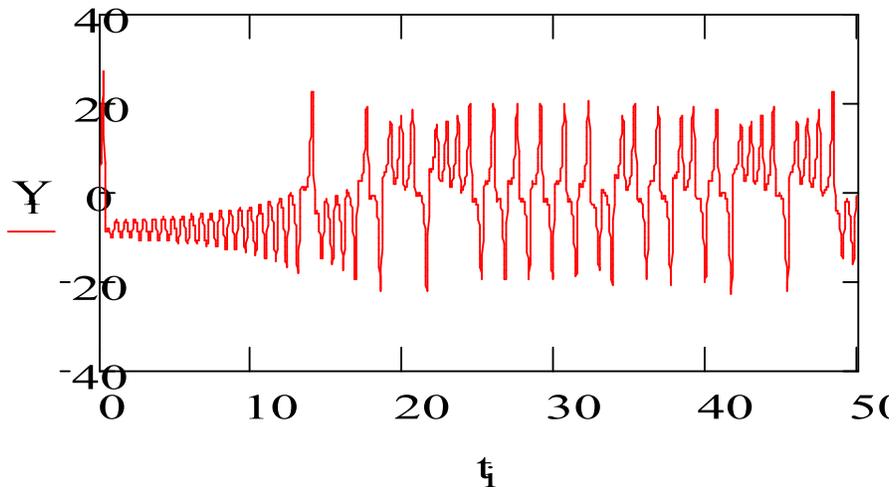


Рис.2. Зависимость объёма реализованной продукции от времени

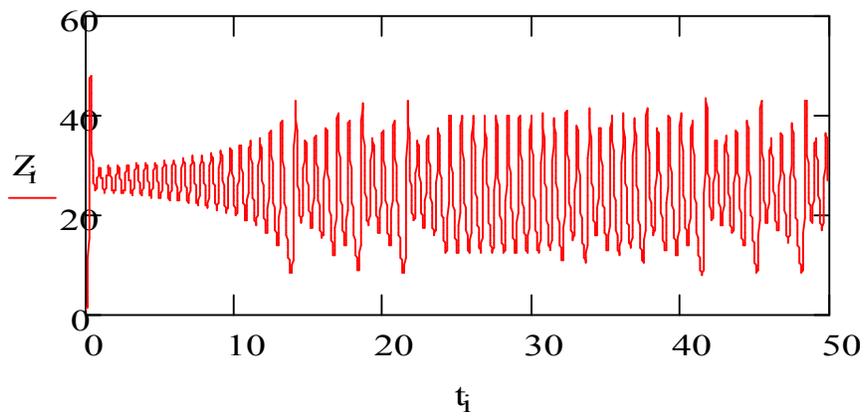
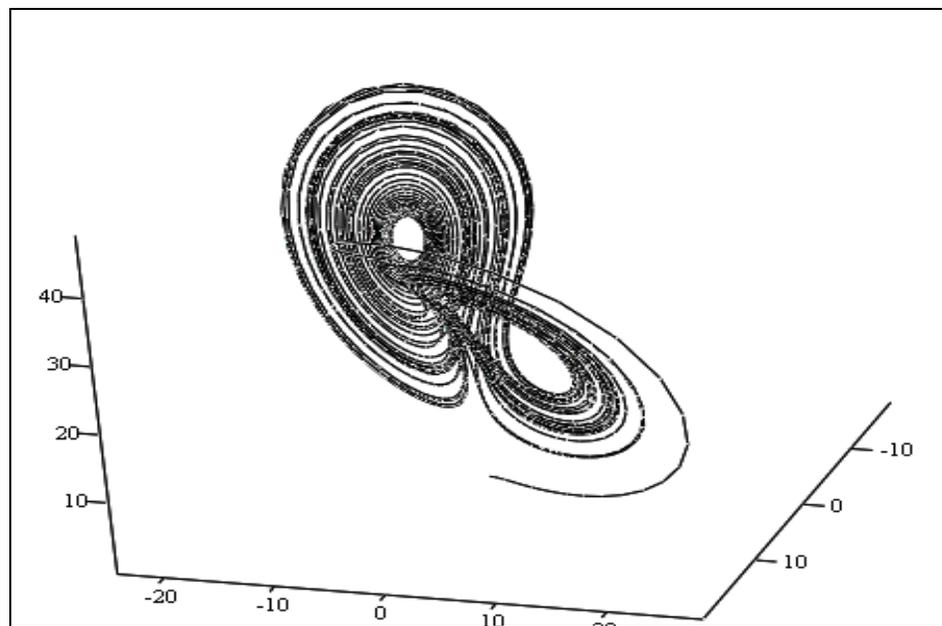


Рис.3. Зависимость объёма ресурсов от времени

4. Заключение

Отрицательные значения объёма производства, соответствуют накоплению нереализованной продукции, что ведёт к дополнительным затратам; а отрицательные значения объёма реализованной продукции – соответствуют случаю, когда спрос на продукцию строительной фирмы падает и наши расходы превалируют над доходами.

Построим картину данной динамической системы в фазовом пространстве:



(R, S, T)

Рис.4. Странный аттрактор Лоренца для динамической системы производства продукции в строительном бизнесе

Получаем картину странного аттрактора Лоренца, которая соответствует процессу перехода детерминированной системы в хаотический режим работы. В зависимости от значения параметра r , система меняет форму „крыльев бабочки“, что соответствует изменению рыночного спроса на продукцию производства.

Литература:

1. Обгадзе Т.А. Высшая математика для экономистов. Москва, ИГУМО, 2002
2. Обгадзе Т.А., Цвараидзе З.Н. Лабораторные работы по математическим моделям в экономике. ГГУ, Тбилиси, 2006
3. Колмогоров А.Н., Новиков С.П. Странные аттракторы. Математика, новое в зарубежной науке. Москва, 1981

4. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. Пер. с англ., Москва, 2002

5. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. Пер. с англ., Москва, 1986

MATHEMATICAL MODEL OF THE LORENTZ IN THE CONSTRUCTION BUSINESS

Gogoladze Vladimer R.

Moscow State University of Civil Engineering

Summary

In the paper, based on the concept of ordinary mathematical models based model of the production process in the construction business. The constructed mathematical model for a specific choice of coefficients is reduced to the Lorentz model. Based on the program MathCAD studied the dynamics of the production process in the construction business and is the economic interpretation of the Lorenz strange attractor.

ლორენცის მათემატიკური მოდელი სამშენებლო ბიზნესში

ვლადიმერ გოგოლაძე

მოსკოვის სახელმწიფო სამშენებლო ინსტიტუტი

რეზიუმე

ნაშრომში ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელირების კონცეფციის საფუძველზე იგება სამშენებლო ბიზნესში წარმოების მოდელი. აგებული მათემატიკური მოდელი, კოეფიციენტების გარკვეული წესით არჩევის შემთხვევაში, მიიყვანება ლორენცის მოდელამდე. MathCAD პროგრამის გამოყენებით შეისწავლება წარმოების პროცესის დინამიკა სამშენებლო ბიზნესში და ლორენცის ატრაქტორის ეკონომიკური ინტერპრეტაცია.