მართვადობის პრობლემა განაწილებულპარამეტრებიან სისტემებში

ნოდარ ნარიმანაშვილი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

დასმულია განაწილებულპარამეტრებიანი სისტემების მართვადობის ამოცანა. ფორმულირებულია ასეთი სისტემების მართვადობის აუცილებელი პირობები სისტემაზე მართვისა და შეშფოთების ერთდროული ადიტიური ზემოქმედებისა და ცვლადებს შორის წრფივი ინტეგრალური ოპერატორული კავშირების არსებობის პირობებში.

საკვანძო სიტყვები: განაწილებულპარამეტრებიანი მართვის სისტემები, მართვადობა, ინტეგრალური ოპერატორი.

1. შესავალი

მართვის თანამედროვე თეორიისა და პრაქტიკის მნიშვნელოვანი სექტორია განაწილებულ-პარამეტრებიანი ობიექტები და სისტემები. ტექნიკის ამ სფეროში მართვის ამოცანების გადაჭრის აქტუალურობა განპირობებულია იმ უდავო ფაქტით, რომ პროცესები სისიტემებში მიმდინარეობენ როგორც დროში, ასევე სივრცეში. შესაბამისად სივრცეში განაწილებული პროცესების მათემატიკური აღწერა და მართვის ამოცანის სრულყოფილი გადაწყვეტა უკავშირდება კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ, ინტეგროდიფერენციალურ განტოლებებს და მათთან დაკავშირებულ სასაზღვრო პირობებს. ეს გარემოება გარკვეულ მათემატიკურ და ტექნიკურ პრობლემებს ქმნის აღნიშნული კლასის ამოცანების მართვაში, თუმცა ამ სფეროში მიღებულია მნიშვნელოვანი შედეგები, როგორც კერძო შემთხვევებში, ასევე განაწილებულპარამეტრებიანი სისტემების მართვის ზოგად თეორიასა და პრაქტიკაში. [1; 2; 3]

უნდა აღვნიშნოთ, რომ თავმოყრილპარამეტრებიანი ანუ ერთ კოორდინატაზე დამოკიდებული მართვის სისტემების თეორია საკმარისი სიღრმითაა დამუშავებული, რაც იძლევა მნიშვნელოვან წინაპირობებს იმისათვის, რომ მოხდეს მიღებული ფუნდამენტური შედეგებისა და მეთოდების განაწილებულპარამეტრებიან სისტემებზე განზოგადება. ერთ-ერთ ასეთ მნიშვნელოვან საკითხად ითვლება სისტემის მართვადობის ამოცანა, რომელიც გულისხმობს სასრული მმართველი ზემოქმედებით სისტემის მოცემული საწყისი მდგომარეობიდან მოცემულ საბოლოო მდგომარეობაში გადაყვანის შესაძლებლობის გარკვევას დროის სასრულ შუალედში [4; 5].

2. ძირითადი ნაწილი

ნაშრომის მიზანია განაწილებულპარამეტრებიანი სისტემების მართვადობის ამოცანის დასმა და მისი გადაწყვეტის გზების მიმოხილვა. საფუძვლად აღებულია განაწილებულპარამეტრებიანი სისტემების ზოგადი თეორია, სტრუქტურული წარმოდგენის თეორია, აგრეთვე თავმოყრილპარამეტრებიანი სისტემებისათვის მიღებული შედეგები [2; 3; 4].

ჩავწეროთ განაწილებულპარამეტრებიანი მართვის სისტემების (გპმს) ძირითადი განტოლებები და ჩამოვაყალიბოთ მართვადობის პირობა.

ვთქვათ გპმს-ის მდგომარეობა მოცემულია $y_i(x_i,t)$ ფუნქციათა ნაკრებით, სადაც $t \geq 0$ არის დროითი კოორდინატა, ხოლო $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ სივრცული კორდინატებია, $x_i \in D, i = 1,2,\dots,n$. მაშინ სისტემის მდგომარეობის ვექტორი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$y(x,t) = \left(y_1(x_1,t), y_2(x_2,t), \dots, y_n(x_n,t)\right)^T; \tag{1}$$

სისტემაზე მოქმედი გარეგანი ზემოქმედების ვექტორი აგრეთვე დროითი და სივრცული პარამეტრების ფუნქციაა:

$$g(x,t) = \left(g_1(x_1,t), g_2(x_2,t), \dots, g_n(x_n,t)\right)^T; \qquad (2)$$

გპმს-ის დინამიკის ზოგადი ფუნქციონალური განტოლება შემდეგი სახისაა:

$$\Phi\left(y(x,t); g(x,t)\right) = 0, \qquad (3)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც Φ ფუნქციონალური ოპერატორი წრფივია. მაშინ ის უმეტეს შემთხვევაში წრფივი ინტეგრალური ოპერატორია და შემდეგი სახე აქვს [1; 2; 3]:

$$\Phi(x,t) = \int_0^t \int_D G(x,l,t,\tau) \cdot g(l,\tau)\, dl\, d\tau, \qquad (4)$$

ამ გამოსახულებაში $G\,(x,l,t,\tau)$ წარმოადგენს ინტეგრალური ოპერატორის ბირთვს და რეალურ გპმს-ში იგი გარდამავალი იმპულსური ფუნქციაა [1; 2; 3].

მართვის ობიექტის გარეგან ზემოქმედებაში შეიძლება გამოვყოთ მმართველი ზემოქმედება და შემაშფოთებელი ზემოქმედება. განვსაზღვროთ ობიექტის მართვა $U(x,t)$ ვექტორ-სვეტით:

$$U(x,t) = \left(U_1(\eta_1,t), U_2(\eta_2,t), \dots, U_\tau(\eta_\tau,t)\right)^T; \qquad (5)$$

სადაც $t \geq 0;\ \eta \in L,\ U(x,t) \in Q.$

შეშფოთებიოს ვექტორი ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$f(\xi,t) = (f_1(\xi_1,t), f_2(\xi_2,t), \dots, f_k(\xi_k,t)^T); \qquad (6)$$

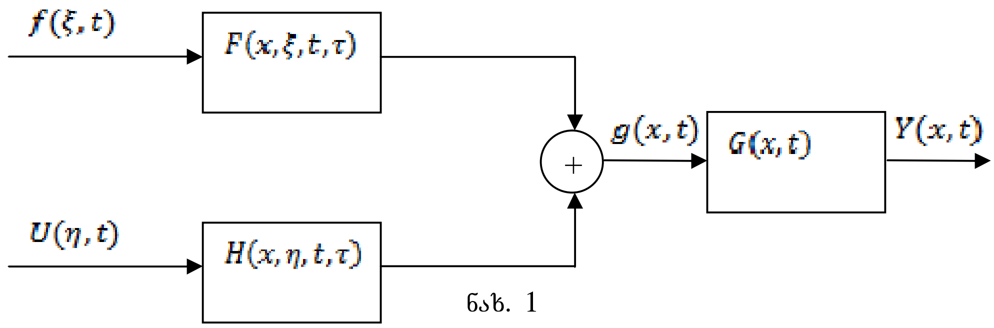
$f(\xi,t)$ შეშფოთება სისტემაზე შეიძლება მოქმედებს როგორც სასაზღვრო პირობების მეშვეობით, ასევე როგორც შემავალი გარეგანი ზემოქმედების ერთ-ერთი ადიტიური მდგენელი მმართველ ზემოქმედებასთან ერთად:

$$g(x,t) = U(x,t) + f(x,t). \qquad (7)$$

მაშინ გპმს-ს დინამიკის (4) განტოლების შესაბამისად, მივიღებთ შემდეგი სახის ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\Phi(x,t) = \int_0^t \int_L H(x,\eta,t,\tau) U(\eta,\tau)\, d\eta\, d\tau + \int_0^t \int_L F(x,\xi,t,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \qquad (8)$$

სადაც $H(x,\eta,t,\tau)$ და $F(x,\xi,t,\tau)$ წარმოადგენენ გპმს-ის გარდამავალ იმპულსურ ფუნქციებს შესაბამისად "$U \to y$" და "$F \to y$" არხებისათვის. სტრუქტურულად ასეთი გპმს შემდეგნაირად წარმოიდგინება [2].



ნახ. 1

ვთქვათ მოცემულ გპმს-სათვის არსებობს მდგომარეობათა E სიმრავლე, მართვის ფუნქციათა Q სიმრავლე და შემაშფოთებელ ზემოქმედებათა P სიმრავლე:

$$y(x) \in E; \quad U(\eta,t) \in Q; \quad f(\xi,t) \in P; \qquad (9)$$

მართვადობის აუცილებელი პირობა ასეთნაირად წარმოდგენილი გპმს-სათვის შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოყალიბდეს:

თუ ნებისმიერი $f(\xi,t) \in P$ ზემოქმედებისათვის მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი $U(\eta,t) \in Q$ მართვა, რომელიც სისტემას $T > 0$ სასრული დროის შუალედში გადაიყვანს $Y(x,T) \in E$

მდგომარეობაში, მაშინ სისტემა მართვადია თუ დასაშვებ სიმრავლეში არსებობს (8) ინტეგრალური განტოლების თუნდაც ერთი ამონახსნი.

მართვადობის საკითხის დეტალური კვლევა არაწრფივი ინტეგრალური ოპერატორის არსებობის შემთხვევაში, აგრეთვე არაადიტიური შემაშფოთებელი ზემოქმედებისთვის გაძნელებულია არაწრფივი კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისა და შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების მოძებნის სირთულის გამო. ასევე რთულია ზოგადი სახით ჩამოვაყალიბოთ ᲒᲛᲞᲡ-ს მართვადობის საკმარისი პირობები. მაგრამ მთელ რიგ პრაქტიკულად საინტერესო შემთხვევებში, მაგალითად როდესაც საქმე გვაქვს სითბოგადაცემის, დიფუზიურ, ტალღოვან, გაზოდინამიკურ და სხვა სახის განაწილებულპარამეტრებიან პროცესებთან, კვლევის გამარტივების მიზნით შესაძლებელია ვისარგებლოთ მდგომარეობის ფუნქციისა და გარდამავალი იმპულსური ფუნქციების წარმოდგენებით მწკრივების სახით დამოუკიდებელ ფუნქციათა რომელიღაც $\alpha_j(x)$ ფუნქციათა კლასში:

$$\left.\begin{aligned} Y(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j \alpha_j(x) \\ F(x,\xi,t,\tau) &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) F_j^*(\xi,t,\tau) \\ H(x,\eta,t,\tau) &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) H^*(\eta,t,\tau) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

უმრავლეს შემთხვევაში $\alpha_j(x)$ ფუნქციათა სისტემა მათემატიკური ფიზიკის შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანის საკუთრივ ფუნქციათა კლასია.

3. დასკვნა

ამრიგად განაწილებულპარამეტრებიანი სისტემების მართვადობის პრობლემა უშუალოდ უკავშირდება ამ სისტემის დინამიკის განტოლების არატრივიალური ამონახსნის მოძებნის პრობლემას ამ სისტემაზე დადებულ შეზღუდვათა კლასში.

ლიტერატურა:

1. Тихонов А.Н; Самарский А.А. Уравнения математической физики, М; Наука, 1977
2. Бутковский А.Г. Структурнаия теория распредепенных систем; М; наука, 1987
3. Нариманашвили Н.И. Идентификация нелинейных объектов с распределенными параметрами; Дисс. на соиск.уч.степени кандидата технических наук, Тбилиси, 1989
4. Дорф Р.; Бишон Р. Современные системы управления М, 2002
5. იმედაძე თ; მჭედლიშვილი ნ; მართვის სისტემების ინჟინერია, ტექნიკური უნივერსიტეტი, თბილისი, 2009

PROBLEM OF CONTROLLABILITY IN DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

Nodar Narimanashvili
Georgian Technical University

Summary

The represented article deals with the problem of control of distributed parameter systems. The necessary conditions of controllability of such systems are formulated when there are linear, integral, operator relationships between changes of system and simultaneous additive influences of control and agitation of system.

ПРОБЛЕМА УПРАВЛЯЕМОСТИ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Нариманашвили Н.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Поставлена задача управляемости систем с распределенными параметрами. Сформулированы необходимые условия управляемости таких систем в случае одновременном воздействии управления и возмущений, при существовании линеийных операторов связи между переменными системы.