საკონკურსო ამოცანის გადაწყვეტა ბუნების წინააღმდეგ თამაშის მოდელის ანალიზით

გურამ ბელთაძე, ნოდარ ჯიბლაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ჩამოყალიბებულია საკონკურსო ამოცანა ზოგადი სახით, რომელიც წარმოდგენილია ბუნების წინააღმდეგ მატრიცული თამაშის მოდელის სახით. მოდელის ანალიზისათვის პირველად გამოყენებულია გადაწყვეტილების მიმღები პირის - აქტიური A მოთამაშის ოპტიმალურობის მაქსიმინის პრინციპი შერეული სტრატეგიებით. აღნიშნული პრინციპით ვპოულობთ თამაშის ოპტიმალურ ამონახსნს, რომელიც ყოველთვის არსებობს. ოპტიმალური ამონახსნის დახმარებით გამოითვლება კონკურსის მონაწილე $S=\{a_1,\dots,a_m\}$ კანდიდატთა მოსალოდნელი საშუალო შეფასებები $u(a_i)$, $i=1,\dots,m$ და მათი საშუალებით განისაზღვრება მოსალოდნელი საშუალო შეფასების კრიტერიუმი $a_i \succcurlyeq a_k \Leftrightarrow u(a_i) \geq u(a_k)$. კრიტერიუმის გამოყენებით ვახდენთ კანდიდატთა რანჟირებას. გაანალიზებულია კრიტერიუმის შინაარსი და ნაჩვენებია მისი გამოყენების შესაძლებლობები და მოსალოდნელი განსაკუთრებული შემთხვევები.

საკვანძო სიტყვები: საკონკურსო ამოცანა, კანდიდატი, რანჟირება, მატრიცული თამაში, მოთამაშე, სარგებლიანობა, კრიტერიუმი, საშუალო შეფასება.

1. შესავალი

საკონკურსო ამოცანა ზოგადი სახით ასე დაისმის: მოცემულია კანდიდატთა (ალტერნატივების) სიმრავლე $S=\{a_1,\dots,a_m\}$ და მოითხოვება ამ სიმრავლეზე პრიორიტეტების დადგენა, ანუ საჭიროა მოვახდინოთ მოცემული სიმრავლის რანჟირება პრიორიტეტების კლების მიხედვით – უპირატესობიდან უარესობისაკენ. აღვნიშნოთ მკაცრი უპირატესობის მიმართება $\succ$-ით, არამკაცრი უპირატესობის მიმართება - $\succcurlyeq$ -ით, ტოლფასობის (ეკვივალენტობის) მიმართება - $\approx$-ით. მაგალითად, თუ a უპირატესია b-ზე, მაშინ დავწერთ $a \succ b$, თუ a არაა ნაკლებ უპირატესი b-ზე - $a \succcurlyeq b$, თუ a ტოლფასია b-ს, მაშინ - $a \approx b$. მაგალითად, ვთქვათ ოთხი კანდიდატისათვის $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ გვაქვს ტრანზიტული უპირატესობები: a_1 უპირატესია a_3-ზე, a_3 უპირატესია a_4-ზე და ამასთან a_4 ტოლფასია a_2-ის. ამ შემთხვევაში S სიმრავლის რანჟირება ასე ჩაიწერება - $a_1 \succ a_3 \succ a_4 \approx a_2$.

საკონკურსო ამოცანა ზოგადი სახით მრავალი კრიტერიუმის შემთხვევაში შესწავლილია იერარქიული ანალიზის მეთოდით, რომელიც მოითხოვს კანდიდატთა წყვილობით შედარებას ხარისხობრივი უპირატესობით და ამ უპირატესობას შემდეგ შევუსაბამებთ რაოდენობრივი შეფასების ზოგად სკალას [1]. ცხადია, ასეთი ამოცანის საჭიროება მისი პრაქტიკული ღირებულებითაა მეტად მნიშვნელოვანი, რომელიც მრავლად გვხვდება სხვადასხვა სფეროში, მათ შორის პროექტების შეფასებებში, სხვადასხვა თანამდებობებზე ასარჩევი კონკურსისათვის, სწავლებაში და სხვა, თუ კანდიდატთა შეფასებები წარმოებს კვალიფიციური ექსპერტის ან მათი ჯგუფის მიერ. შევნიშნოთ, რომ დასმული საკონკურსო ამოცანა საბოლოო და ყველასათვის მისაღები სახით ჯერ არაა გადაწყვეტილი. ძიება კი ამ მიმართულებით მუდმივად მიმდინარეობს.

დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად ჩვენი მიდგომა გულისხმობს ოპტიმალურობის გარკვეული პრინციპით სასრული ანტაგონისტური თამაშის – ბუნების წინააღმდეგ მატრიცული თამაშის მოდელის ანალიზით მიღებულ ოპტიმალურ გადაწყვეტილებას. ეს პრინციპი გამომდინარეობს თამაშთა თეორიის პრინციპებიდან და ქვემოთ ჩამოვაყალიბებთ მას.

თამაშთა თეორია ესაა კონფლიქტური სიტუაციების მათემატიკური თეორია [2]. ამ თეორიაში კონფლიქტურ სიტუაციად გაიგება ყოველი ისეთი სიტუაცია – მოვლენა, რომელში მონაწილე მხარეებიც ისწრაფვიან განსაზღვრული მიზნისაკენ და აქვთ რამდენიმე არჩევანის შესაძლებლობა. ამასთან თითოეული მხარის არჩევანი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა არჩევანს გააკეთებს მისი მოწინააღმდეგე და მაშასადამე, თითოეული მოთამაშისათვის მიზნის მიღწევის

ხარისხი დამოკიდებულია ყველა მონაწილის არჩევანზე. ვინაიდან კონფლიქტურ სიტუაციაში მონაწილეს – მოთამაშეს არა აქვს საკმარისი ინფორმაცია მოწინააღმდეგის ჩანაფიქრზე, ამიტომ თამაშთა თეორიის მეთოდებით გადაწყვეტილება მიიღება განუზღვრელობის პირობებში. თამაშთა თეორიის მიზანია კონფლიქტის მონაწილეთა ჭკვიანური ქცევისათვის რეკომენდაციების დამუშავება ანუ მოთამაშეთა ქცევის ოპტიმალური სტრატეგიების განსაზღვრა. თამაში არის რამდენიმე პირის (მხარის, მოთამაშის) კოლექტიური ქცევის მათემატიკური მოდელი. აქ იგულისხმება, რომ მოთამაშეთა ინტერესები განსხვავებულია, რაც წარმოშობს კონფლიქტს. კონფლიქტი არ გულისხმობს მხარეთა ანტაგონისტურ დაპირისპირებას, მაგრამ ყოველთვის დაკავშირებულია გარკვეული სახის უთანხმოებებთან. კონფლიქტური სიტუაცია იქნება ანტაგონისტური, თუ ერთი მხარის მოგების (სარგებლიანობის) გაზრდა რაიმე სიდიდით იწვევს მეორე მხარის მოგების შემცირებას იგივე სიდიდით და პირიქით. მაშასადამე, ანტაგონისტურ კონფლიქტში მოთამაშეთა მოგებების ჯამი ნულია. ინტერესთა ანტაგონიზმი წარმოშობს ანტაგონისტურ კონფლიქტს და ვღებულობთ ანტაგონისტურ თამაშს. ინტერესთა თანხვდენილობის შემთხვევაში თამაში დაიყვანება მოქმედებათა კოოპერაციაზე და ვღებულობთ ახალი კლასის თამაშს – კოოპერატიულ თამაშს. ამრიგად, თამაშთა თეორია სწავლობს გაურკვევლობის პირობებში კონფლიქტში მყოფ მხარეებს შორის რაციონალურ გადაწყვეტილებათა მიღების მათემატიკურ მეთოდებს, მოდელებს და მათი ანალიზის ხერხებს.

თამაშთა თეორიაში განასხვავებენ ორი ძირითადი სახის ანტაგონისტურ თამაშს: 1) თამაშს მოწინააღმდეგის წინააღმდეგ; 2) თამაშს ბუნების წინააღმდეგ. პირველი სახის თამაშებში საქმე გვაქვს მოწინააღმდეგის გააზრებულ რეაქციასთან. აქ მოწინააღმდეგე არსებითად ზღუდავს გადაწყვეტილების მიმღები პირისათვის მისაღები სასურველი შედეგების სიმრავლეს. მეორე სახის თამაშებში გვაქვს თამაში ანტაგონისტური და ამავე დროს გაურკვევლობის პირობებში, რომელშიც მხოლოდ ერთი მოთამაშეა გადაწყვეტილების მიმღები პირი (გმპ). იგი მიისწრაფვის თავისი სარგებლიანობის მაქსიმუმისაკენ და ამასთან არ იცის, თუ რას მოიმოქმედებს მისი მოწინააღმდეგე – ბუნება, რადგან იგი არაა აქტიური მოაზროვნე მოთამაშე, მაგრამ გმპ მას ასეთად თვლის. გმპ მიიჩნევს, რომ მოწინააღმდეგის მიზანია ხელი შეუშალოს მას, რათა მისაღები მოსალოდნელი სარგებლიანობა იყოს მინიმალური.

პირველი სახის თამაშების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი კლასია ორი მოთამაშის (ორი ჯგუფის) სასრული ანტაგონისტური თამაში, რომელსაც მატრიცული თამაში ეწოდება [2]. როგორც აღვნიშნეთ ასეთ თამაშში მოთამაშეთა მოგებების ჯამი ნულია და ამიტომ მატრიცული თამაში მოიცემა პირველი მოთამაშის სარგებლიანობების მატრიცით, რომელსაც ჩავწერთ $m \times n$ მატრიცის სახით

$$H = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & . & n \\ \hline 1 & u_{11} & u_{12} & . & u_{1n} \\ 2 & u_{21} & u_{22} & . & u_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ m & u_{m1} & u_{m2} & . & u_{mn} \end{array} . \qquad (1)$$

(1)–ს, ან კიდევ H-ს ვუწოდოთ აგრეთვე $m \times n$ მატრიცული თამაში. ამ თამაშში 1-ელი მოთამაშე ირჩევს სტრიქონს და მისი სტრატეგიებია $1,\ldots,m$ ანუ აქვს m რაოდენობის არჩევანის (გადაწყვეტილების) გაკეთების საშუალება, ხოლო მე-2 მოთამაშე ირჩევს სვეტს, მისი სტრატეგიებია $j = 1,\ldots,n$ და აქვს n არჩევანის გაკეთების საშუალება. თუ 1-ელი აირჩევს i-ს, მე-2 აირჩევს j-ს, მაშინ (i, j) სიტუაციაში 1-ელის სარგებლიანობაა u_{ij}. მოთამაშეთა ჩამოთვლილ სტრატეგიებს **წმინდა სტრატეგიები ეწოდება.** ამრიგად H მატრიცული თამაში მოიცემა 1-ელი მოთამაშის სარგებლიანობებით.

მატრიცული (1) თამაშის შემთხვევაში გადაწყვეტილების მიმღები პირი, ზოგიერთ შემთხვევაში თავის თავს აიგივებს 1-ელ მოთამაშესთან და ძირითად ყურადღებას აქცევს მხოლოდ თავისი ოპტიმალური სტრატეგიის პოვნას. მისი მოწინააღმდეგის, მე-2 მოთამაშის სტრატეგიები შეიძლება მას საერთოდ არ აინტერესებდეს. ზოგიერთ შემთხვევაში კი საჭიროა ორივე მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიების ცოდნა.

სტატიის ძირითად ნაწილში კონკურსის ამოცანა წარმოდგენილია ბუნების წინააღმდეგ თამაშის სახით, განსაზღვრულია ოპტიმალურობის კრიტერიუმი და მისი საშუალებით შესწავლილია თამაშის ანალიზის მეთოდები კანდიდატთა რანჟირებისათვის.

2. ძირითადი ნაწილი

კონკურსის ამოცანის გადასაწყვეტად გამოვიყენებთ მეორე სახის ანტაგონისტურ თამაშს, რომელსაც ვუწოდეთ თამაში ბუნების წინააღმდეგ. მატრიცული თამაშის (1) მოდელის ანალოგიურად შევადგინოთ ბუნების წინააღმდეგ თამაშის მოდელი [2,3].

ამისათვის ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ თუ გვინდა კანდიდატთა რანჟირება უპირატესობებით, ეს უნდა მოვახდინოთ რაიმე ნიშნის ან ნიშნების (კრიტერიუმების) გათვალისწინებით. ასეთი კრიტერიუმების როლში განვიხილოთ კრიტერიუმების სიმრავლე $K=\{k_1,\ldots,k_n\}$.

ექსპერტი ან ექსპერტთა ჯგუფი ახდენს თითოეული $a_i(i=1,\ldots,m)$ კანდიდატის შეფასებას $k_j(j=1,\ldots,n)$ კრიტერიუმით. ასეთი შეფასება შეიძლება იყოს რაოდენობრივი ან ხარისხობრივი. გამოყენების თვალსაზრისით უფრო მოსახერხებელია რაოდენობრივი შეფასება. ჩავთვალოთ, რომ ეს კრიტერიუმები თავიდან თანაბარმნიშვნელოვანია.

a_i კანდიდატის შეფასება k_j კრიტერიუმით აღვნიშნოთ u_{ij}-ით. $u_{ij}(i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n)$ რიცხვი გამოსახავს ექსპერტისათვის a_i კანდიდატის სარგებლიანობას (კმაყოფილების ზომას) k_j-ით. მოცემული კონკრეტული ამოცანისათვის კრიტერიუმთა მრავალსახეობების გათვალისწინებით, ბუნებრივია დავუშვათ, რომ თითოეულ k_j კრიტერიუმს უნდა გააჩნდეს რაოდენობრივ შეფასებათა საკუთარი სკალა, რომელიც აღვნიშნოთ $[\alpha_j,\beta_j],\, j=1,\ldots,n.$ ასეთი სკალების არსებობამ გადაწყვეტილების მიღებისას შესაძლოა მიგვიყვანოს გარკვეულ წინააღმდეგობამდე. ამის მიზეზს ქვემოთ მე-3 შენიშვნაში ავხსნით. ამიტომ ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ ყველა k_j კრიტერიუმს ექნება შეფასებათა ერთიანი სკალა - $u_{ij}\in[\alpha,\beta]$, $0\le\alpha<\beta;\, i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n$.

მიღებული აღნიშვნების პირობებში S კანდიდატთა შეფასებები K კრიტერიუმებით წარმოვადგინოთ შემდეგი სახის H მატრიცის (ცხრილის) საშუალებით:

$$H=\begin{array}{c|cccc} & k_1 & k_2 & . & k_n \\ \hline a_1 & u_{11} & u_{12} & . & u_{1n} \\ a_2 & u_{21} & u_{22} & . & u_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_m & u_{m1} & u_{m2} & . & u_{mn} \end{array}, \tag{2}$$

სადაც $u_{ij}\in[\alpha,\beta]$, $0\le\alpha<\beta;\, i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n$.

კანდიდატთა შეფასებების (2) ცხრილიდან გამომდინარე კანდიდატთა რანჟირების ამოცანა შესაძლოა უმარტივესად გადაწყდეს კანდიდატთა მიერ მიღებული ჯამური შეფასებების კლების შესაბამისად, მაგალითად, შემდეგი თანაფარდობით:

$$a_i \succcurlyeq a_k \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \ge \sum_{j=1}^{n} u_{kj}\,. \tag{3}$$

ასეთ შემთხვევაში საჭიროა შევნიშნოთ შემდეგი: სარგებლიანობის თეორიის თანახმად ექსპერტის მიერ კონკურსში მონაწილე კანდიდატის შეფასება წარმოებს სუბიექტური ფაქტორების გათვალისწინებით. ამიტომ არაა გამორიცხული რომელიმე კანდიდატის გამარჯვების მიზნით მისი შეფასებები აღმოჩნდეს არაობიექტური, რაშიც ვგულისხმობთ ხელოვნურად გაზრდილ შეფასებებს იმისათვის, რომ შესაბამისმა კანდიდატმა გაიმარჯვოს. ამიტომ კანდიდატთა რანჟირება (3) თანაფარდობით მიუღებელია. აქედან გამომდინარე, ჩვენი ძირითადი ინტერესი დასმული ამოცანის

გადასაწყვეტად გულისხმობს, რომ (2) ცხრილიდან კრიტერიუმის გამოყენების გარეშე შეუძლებელი იყოს კანდიდატთა რანჟირება.

ჩავთვალოთ, რომ კონკურსის ამოცანის შემთხვევაში მოდელი (2) შედგენილია ექსპერტთა E ჯგუფის დახმარებით შემდეგი წესით. კომპეტენტური C კომისიის მიერ წინასწარაა დადგენილი კრიტერიუმების სიმრავლე $K=\{k_1,...,k_n\}$. კანდიდატთა $S=\{a_1,...,a_m\}$ სიმრავლის თითოეულ a_i $(i=1,...,m)$ კანდიდატს ექსპერტი E აფასებს k_j $(j=1,...,n)$ კრიტერიუმით და ეს შეფასება აღვნიშნოთ u_{ij}-ით, სადაც $u_{ij}\in[\alpha,\beta]$, $0\le\alpha<\beta; i=1,...,m; j=1,...,n$.

ცხადია, რომ (1) და (2) მატრიცები ანალოგიური სტრუქტურებისაა. ამიტომ შეგვიძლია (2) მოდელს ანუ კანდიდატთა რანჟირების ამოცანას შევუსაბამოთ მატრიცული თამაში ბუნების წინააღმდეგ, რომელიც ასე თამაშდება: მეორე მოთამაშე C, რომლის ადგილზე წარმოვიდგენთ ბუნებას, აირჩევს დასახელებული k_j $(j=1,...,n)$ კრიტერიუმებიდან რომელიმეს ან მათ გარკვეულ ნარევს. ამ პროცესში ეს კრიტერიუმები თანაბარი მნიშვნელობისაა; 1-ელი მოთამაშე A ანუ გადაწყვეტილების მიმღები პირი (გმპ) მე-2 მოთამაშესთან - C-სთან დაპირისპირების შემთხვევაში ირჩევს კანდიდატთა გარკვეულ ნარევს პრიორიტეტულობის თვალსაზრისით, ისე, რომ მათგან უპირატესი კანდიდატის მოსალოდნელი სარგებლიანობა მეტი იყოს მასზე ნაკლებ პრიორიტეტული კანდიდატის მოსალოდნელ სარგებლიანობაზე. სინამდვილეში C მოთამაშე გარდა იმისა, რომ წინასწარ დაასახელებს კანდიდატთა შესაფასებლად საჭირო კრიტერიუმებს, სხვა როლი ამ ოპერაციაში მას არ ენიჭება. მისი კიდევ ერთი როლის გამოყენება შესაძლოა საჭირო გახდეს თამაშის ანალიზის – ამოხსნის შემდეგ. ასეთი საჭიროება იმაში გამოიხატება, რომ აუცილებლობის შემთხვევაში A მოთამაშემ C-საგან მოითხოვოს კრიტერიუმების რანჟირება მნიშვნელობის მიხედვით, ანუ C მოთამაშემ დაალაგოს კრიტერიუმები მისთვის უპირატესობის კლების მიხედვით.

თუ C იქნება თამაშში აქტიური, ანუ იგი კრიტერიუმს ან მათ ნარევს ირჩევს გააზრებულად ისე, რომ ხელი შეუშალოს A-ს მაქსიმალური სარგებლიანობის მიღებაში, მაშინ (2) თამაში იგივე ჩვეულებრივი (1) მატრიცული თამაშია.

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (1) წარმოადგენს ჩვეულებრივ მატრიცულ თამაშს და მოთამაშეებს ვთვლით ინტელექტუალებად, ხოლო (2) არის მატრიცული თამაში ბუნების წინააღმდეგ, სადაც პირველი ინტელექტუალი მოთამაშე A წარმოადგენს გმპ-ს, ხოლო მეორე მოთამაშე C - ბუნებას.

ყოველი კლასის ანტაგონისტურ თამაშში, იქნება იგი ინტელექტუალთა მატრიცული თამაში (1) თუ მატრიცული თამაში ბუნების წინააღმდეგ (2), ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღებით ვისწრაფვით რაიმე გარანტირებული სარგებლიანობის მიღებისათვის. ყოველივე ეს ხორციელდება ოპტიმალურობის კრიტერიუმის გამოყენებით. ოპტიმალურობის კრიტერიუმის არჩევას წინ უძღვის ოპტიმალურობის პრინციპის განსაზღვრა, რაც თავისთავად არაა მარტივი ამოცანა და იგი თამაშთა თეორიის დამოუკიდებელი შესწავლის საგანია.

(1) მატრიცულ თამაშში მაქსიმალური სარგებლიანობის მიღებისათვის ოპტიმალურობის პრინციპია მაქსიმინის (წონასწორული სიტუაციის) პრინციპი შერეულ სტრატეგიებში. თამაშთა თეორიის ძირითადი თეორემის თანახმად ეს პრინციპი ყოველთვის რეალიზებადია, ანუ ნებისმიერ მატრიცულ თამაშში მოთამაშეებს ყოველთვის აქვთ ოპტიმალური გადაწყვეტილებები შერეულ სტრატეგიებში. განვსაზღვროთ (1) მატრიცულ თამაშში 1-ელი მოთამაშის შერეული სტრატეგია.

განსაზღვრება 1. $m\times n$ მატრიცულ (1) თამაშში 1-ელი მოთამაშის **შერეული სტრატეგია** ეწოდება მის წმინდა სტრატეგიათა $\{1,...,m\}$ სიმრავლეზე ალბათურ $X=(x_1,...,x_m)$ განაწილებას, სადაც $x_i\ge 0(i=1,...,m)$ და $\sum_{i=1}^{m}x_i=1$. მაშასადამე, x_i არის 1-ელი მოთამაშის მიერ i-ური წმინდა სტრატეგიის არჩევის ალბათობა.

ანალოგიურად განისაზღვრება მეორე მოთამაშის შერეული სტრატეგია. მაშასადამე, მოთამაშის მიერ მატრიცულ თამაშში წმინდა სტრატეგია აირჩევა წინასწარ განსაზღვრული

ალბათობით. პირველი მოთამაშის ოპტიმალური გადაწყვეტილება (1) თამაშში $X^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ განისაზღვრება მაქსიმინური - $\max_X \min_j XH_{\cdot j} = u(H)$ ექსტრემუმის მიღწევით, სადაც $H_{\cdot j}$ არის H მატრიცის j-ური სვეტი. $u(H)$ სიდიდეს ეწოდება H თამაშში პირველი მოთამაშის **მოსალოდნელი სარგებლიანობა** ან თამაშის მნიშვნელობა X^* ოპტიმალურ ამონახსნში.

$u(H)$ სიდიდეს აქვს მათემატიკური ლოდინის ბუნება, რაც ნიშნავს, რომ თამაშის პარტიათა მიმდევრობაში იგი რეალიზდება როგორც სარგებლიანობათა საშუალო არითმეტიკული. ასევე, იგი ითვლება პირველი მოთამაშის გარანტირებულ სარგებლიანობად X^* -ის გამოყენებისას. ასეთი $X^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ განისაზღვრება სხვადასხვა მეთოდებით, რომელთა შორის დავასახელებთ გრაფიკულ, წრფივი დაპროგრამების და იტერაციულ მეთოდებს.

შერეული $X^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ სტრატეგიის გამოყენება (1) თამაშში ხორციელდება მაგალითად, ასე: თამაში მეორდება ბევრჯერ და ყოველ პარტიაში 1-ელი მოთამაშე ირჩევს განსხვავებულ წმინდა სტრატეგიებს x_i^* ფარდობითი სიხშირით. აქედან არ გამომდინარეობს, რომ X^* გამოიყენება მხოლოდ მასიურ მოვლენებში და არ გამოიყენება ერთჯერად მოვლენაში. თამაშთა თეორიაში მოთამაშის შერეული სტრატეგია წარმოადგენს მოქნილი ცვალებადი სტრატეგიის მოდელს, როცა მოწინააღმდეგე მხარე ვერ გამოიცნობს თუ რა წმინდა სტრატეგია აირჩევა მის მიერ მოცემულ პარტიაში.

შევნიშნოთ, რომ ისეთ კერძო შემთხვევაში, როცა ყველა ალბათობა, გარდა ერთი x_i ალბათობისა ნულია, მაშინ ეს ალბათობაა ერთი ანუ $x_1 = 1$ და ამ შემთხვევაში შერეული სტრატეგია $X = (x_1, \ldots, x_m)$ გადაიქცევა წმინდად. მაშასადამე, მოთამაშის წმინდა სტრატეგია წარმოადგენს **გადაგვარებულ შერეულ სტრატეგიას**. აღნიშნული განსაზღვრების თანახმად, პირველი მოთამაშის ნებისმიერი წმინდა სტრატეგია i იგივეა, რაც შერეული სტრატეგია $X = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, რომელშიც $x_i = 1$, ხოლო $x_j = 0$ თუ $j \neq i$. თუ ორივე მოთამაშეს აქვს ასეთი ოპტიმალური სტრატეგია შესაბამისად i^* და j^*, მაშინ წყვილი (i^*, j^*) მოცემულ მატრიცულ თამაშში ქმნის **უნაგირა წერტილს (წონასწორულ სიტუაციას) წმინდა სტრატეგიებში.** შესაბამისი $u_{i^* j^*}$ ელემენტი H მატრიცაში წარმოადგენს უმცირესს i^* სტრიქონში და უდიდესს j^* სვეტში.

ახლა გადავიდეთ ბუნების წინააღმდეგ (2) თამაშის შესწავლაზე შერეული სტრატეგიების გამოყენებით. ასეთ შემთხვევაში თამაშში გადაწყვეტილების მიმღები პირის ანუ A მოთამაშის მიერ **ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღებაში** იგულისხმება კანდიდატთა ოპტიმალური რანჟირება. A მოთამაშის მიერ (2) თამაშში წმინდა სტრატეგიების გამოყენებით ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღებაში იგულისხმება რომელიმე კანდიდატის არჩევა მაქსიმალური გარანტირებული სარგებლიანობით. ამისათვის გამოიყენება ოპტიმალურობის რამდენიმე კლასიკური კრიტერიუმი. იმ შემთხვევაში როცა გვეცოდინება მეორე მოთამაშის, C-ს ბუნებრივი მდგომარეობების ალბათობები, გამოიყენება სტატისტიკური გადაწყვეტილების მიღების კრიტერიუმები. თუ ასეთი ალბათობები ცნობილი არაა, მაშინ ფრთხილი A მოთამაშისათვის უმჯობესია ოპტიმალური გადაწყვეტილება განისაზღვროს ვალდის მაქსიმინური კრიტერიუმით - $\max_i \min_j u_{ij}$. ამ კრიტერიუმით ვპოულობთ ერთადერთს ან რამდენიმე ოპტიმალურ კანდიდატს ტოლი სარგებლიანობით.

ჩვენი ძირითადი ამოცანის გადასაწყვეტად ვალდის ან სხვა რომელიმე კლასიკური კრიტერიუმი არ გამოგვადგება, ვინაიდან ჩვენი მიზანია შევეხოთ ყველა კანდიდატს მისი პრიორიტეტულობის განსაზღვრისათვის. ამისათვის გამოვიყენებთ მაქსიმინის პრინციპს შერეული სტრატეგიებით (1) მატრიცული თამაშისათვის, ჩამოვაყალიბებთ ოპტიმალურობის ახალ კრიტერიუმს (2) ამოცანისათვის და ამ კრიტერიუმით განვსაზღვრავთ A **მოთამაშის ოპტიმალურ გადაწყვეტილებას - კანდიდატთა რანჟირების ოპტიმალურ გეგმას.**

წინასწარ (2) ამოცანის (ანუ ბუნების წინააღმდეგ) H თამაშის მოდელისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები და განსაზღვრებები:

$u(H) = \max_X \min_j XH_{\cdot j}$ - H **თამაშის მნიშვნელობა,** იგივე A მოთამაშის **გარანტირებული მოსალოდნელი სარგებლიანობა,** რომელიც შეესაბამება $X^* = (x_1^*, ..., x_m^*)$ -ს;

$X^* = (x_1^*, ..., x_m^*)$ - H **თამაშის ოპტიმალური ამონახსნი,** რომლისთვისაც მიიღწევა $u(H)$, ხოლო x_i^* არის a_i კანდიდატის არჩევის ალბათობა ანუ a_i **კანდიდატის წონა;**

$\Sigma(a_i) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}$ - a_i **კანდიდატის შეფასებათა ჯამი;**

$u(a_i) = x_i^* \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \equiv x_i^* \Sigma(a_i)$ - a_i **კანდიდატის მოსალოდნელი საშუალო შეფასება.**

ავხსნათ (2) თამაშის ოპტიმალური ამონახსნის, $X^* = (x_1^*, ..., x_m^*)$ -ის აზრი. X^*-ის ალბათური შინაარსიდან გამომდინარე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ თუ ამ პირობებში A მოთამაშე განიხილავს თამაშის პროცესს ბევრჯერ, მაშინ $a_i\ (i = 1, ..., m)$ კანდიდატის არჩევა მოუწევს $100x_i^*\%\quad (i = 1, ..., m)$ შემთხვევაში. ეს კიდევ აღნიშნავს, რომ თუ საარჩევნო კომისია შედგება რამდენიმე წევრისაგან და თითოეული წევრი მათგან აკეთებს დამოუკიდებლად სამართლიან არჩევანს, მაშინ a_i კანდიდატი აირჩევა $100x_i^*\%$ შემთხვევაში. როგორც ზემოთ (1) თამაშისათვის აღვნიშნეთ, X^*-ის გამოყენება (2) თამაშში შესაძლებელია კანდიდატთა ერთჯერადი არჩევისათვისაც.

ბუნების წინააღმდეგ (2) თამაშში A მოთამაშის მიერ ბუნების (C მოთამაშე) ჩათვლა მოწინააღმდეგე მხარედ ტოლფასია იმისა, რომ კანდიდატთა არჩევის ოპტიმალური გეგმა A-ს მიერ განხორციელდეს ყველაზე მეტად არასასურველი პირობების გათვალისწინებით. თუ C-ს მიერ არჩეული კრიტერიუმები აღმოჩნდება უფრო ხელის შემწყობი, რაშიც ვგულისხმობთ C-ს მიერ მაღალი შეფასებების შესაბამისი კრიტერიუმების არჩევას, მაშინ A-ს ოპტიმალური გეგმა მაღალი საშუალო შეფასებების მქონე კანდიდატების არჩევის შესაძლებლობას იძლევა. თუ C-ს მიერ არჩეული კრიტერიუმი აღმოჩნდება ყველაზე უარესი, ანუ C-ს მიერ აირჩევა ყველაზე დაბალი შეფასებების შესაბამისი კრიტერიუმი ან კრიტერიუმები, მაშინ A-ს ოპტიმალური გეგმა საშუალებას იძლევა ავირჩიოთ ისეთი კანდიდატი, რომლის მოსალოდნელი საშუალო შეფასება რაც შეიძლება მაღალი იქნება დაბალი საშუალო შეფასებების მქონე კანდიდატებთან შედარებით. სინამდვილეში კი, როგორც აღნიშნული გვაქვს, C მოთამაშეს არავითარი განზრახ ქმედების მიზანი არ გააჩნია, იგი გულგრილად აღიქვამს A-ს წარმატებებს და წარუმატებლობებს. ამის მიუხედავად ჩვენთვის მოხერხებულია ამოცანაში ასე ჩავთვალოთ.

განსაზღვრება 2. H თამაშში ისეთ a_i კანდიდატს, რომლის შესაბამისი წონა $x_i^* > 0$, ეწოდება **აქტიური კანდიდატი.** ხოლო ისეთ კანდიდატს, რომლის შესაბამისი წონა ნულია, ეწოდება **არააქტიური კანდიდატი.**

ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრებებიდან და აღნიშვნებიდან გამომდინარეობს, რომ (2) ამოცანაში აქტიური კანდიდატების $S_a \subseteq S$ მოსალოდნელი საშუალო შეფასებები თავმოყრილია A მოთამაშის გარანტირებული მოსალოდნელი $u(H)$ სარგებლიანობის გარშემო.

ამრიგად, მოცემულ თამაშში კანდიდატი ან აქტიურია, ან არააქტიური. განსაკუთრებული შემთხვევის გარდა, თითოეული აქტიური კანდიდატი უპირატესია ნებისმიერ არააქტიურ კანდიდატზე.

განსაზღვრება 3. კონკურსის (2) ამოცანაში, იგივე H თამაშში A მოთამაშის – გმპ-ის ოპტიმალური გადაწყვეტილება ეწოდება აქტიური და არააქტიური კანდიდატების რანჟირებას ერთადერთი სახით.

შენიშვნა 2. A მოთამაშე აქტიური კანდიდატების ტოლფასობის შემთხვევაში და არააქტიური კანდიდატების რანჟირებისათვის C მოთამაშისაგან მოითხოვს $k_1,\dots,k_n$ კრიტერიუმების რანჟირებას მნიშვნელობის მიხედვით. C-ს გადაწყვეტილების მიხედვით კანდიდატთა ვექტორული შეფასებების ლექსიკოგრაფიული შედარებით A მოთამაშე მოახდენს კანდიდატთა რანჟირებას. მაშასადამე, ჩვენ ამოცანაში ერთვება სტრატეგიული თამაშის მოდელი და ლექსიკოგრაფია [4,5,6,7].

მოსალოდნელი საშუალო შეფასების კრიტერიუმი

$u(a_i)\,, i=1,\dots,m$ **სიდიდეების კლებადობით დალაგების რიგი განსაზღვრავს შესაბამისი a_i კანდიდატების რიგს რანჟირებაში**

$$a_i \succcurlyeq a_k \Leftrightarrow u(a_i) \ge u(a_k)\,. \tag{4}$$

ამრიგად, მოსალოდნელი საშუალო შეფასების (4) კრიტერიუმის თანახმად, უნდა ვიპოვოთ (2) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი X^*, გამოვთვალოთ კანდიდატთა მოსალოდნელი საშუალო შეფასებები $u(a_i)\,, i=1,\dots,m$ და მათი კლებადობით დალაგება განსაზღვრავს შესაბამის კანდიდატთა ადგილს რანჟირებაში.

ქვემოთ ავხსნით ჩამოყალიბებული კრიტერიუმის შინაარსს, მისი გამოყენების შესაძლებლობებს და განსაკუთრებულ შემთხვევებს. მოვიყვანთ შესაბამის მაგალითებს.

როგორც აღვნიშნეთ, (4) კრიტერიუმის გამოყენება ეყრდნობა ოპტიმალური ამონახსნის, X^*-ის განსაზღვრას (2) თამაშში. ასეთი ამონახსნის პოვნისათვის გამოიყენება მატრიცული თამაშის სხვადასხვა თვისება. კერძოდ, პირველ რიგში ვამოწმებთ ხომ არაა მოცემულ თამაშში წმინდა სტრატეგიებით უნაგირა წერტილის შესაბამისი კანდიდატი. ასეთი კანდიდატის არსებობა A მოთამაშეს არ აძლევს გარანტიას ოპტიმალური გადაწყვეტილების არჩევაზე. მოცემული თამაშის მოდელის ანალიზში ძირითად სირთულეს წარმოადგენს ასეთი კანდიდატის არსებობა. ამ შემთხვევაში საჭირო ხდება H მატრიცის უმნიშვნელო კორექტირება იმგვარად, რომ გამოირიცხოს უნაგირა წერტილის შესაბამისი კანდიდატის არსებობა. ასეთივე კორექტირება შესაძლებელია დაგვჭირდეს ზოგიერთ სხვა შემთხვევაშიც.

(2) თამაშის ანალიზის სირთულე დამოკიდებულია აგრეთვე მის $m \times n$ განზომილებაზე – რაც მეტია განზომილება, მით რთულია მისი ანალიზი. ამიტომ მნიშვნელოვანია ამ განზომილების შემცირება. ეს კი შესაძლებელია შემდეგი გარემოების გამო: თუ რომელიმე კანდიდატის შეფასებები არ აღემატება (ნაკლებია ან ტოლია) სხვა კანდიდატის შესაბამის შეფასებებს, მაშინ ნაკლები შეფასებების მქონე კანდიდატს ეწოდება **დომინირებული,** ხოლო დიდ შეფასებებიან კანდიდატს – **დომინანტი.** დომინირებული კანდიდატის გამორიცხვით თამაშის ოპტიმალური ამონახსნი X^* არ შეიცვლება, რაც ნიშნავს, რომ დომინირებული კანდიდატის არჩევის ალბათობა X^*-ში ნულია. ასეთი კანდიდატების ჩათვლა ყველაზე ნაკლებ უპირატეს კანდიდატებად არ შეიძლება. ამის მიზეზი ისაა, რომ არც დომინანტი კანდიდატი შეიძლება იყოს ყველაზე უპირატესი სხვა კანდიდატებთან შედარებით. რაც შეეხება (2) თამაშში სვეტში დომინირებას, აქ დომინირებულია ის სვეტი, რომლის შეფასებები სხვა სვეტის შესაბამის ელემენტებზე მეტია. ასეთი სვეტების გამორიცხვა თამაშიდან არ შეიძლება და ამიტომ მოცემულ თამაშში სვეტებში დომინირება არაა დასაშვები - ვერ გამოვრიცხავთ კონკრეტული კრიტერიუმით მაქსიმალური შეფასებების მქონე კანდიდატს.

თამაშთა თეორიაში ერთ-ერთ სირთულეს წარმოადგენს H თამაშში, ჩვენ (2) ამოცანაში კანდიდატთა სარგებლიანობების შეფასებების განსაზღვრა მოთხოვნილი სიზუსტით. ამასთან ეს ამოცანა არ მოითხოვს ზედმიწევნით ზუსტი შეფასებების პოვნას, რადგან თამაშთა თეორიას შეუძლია მოგვცეს იგივე შედეგები იმ შემთხვევებშიც, რომლებშიც სარგებლიანობათა შეფასებების ზუსტი განსაზღვრა რთულია. კერძოდ, გვაქვს სარგებლიანობების შეფასებათა სუსტი ფორმა, რომელსაც ეწოდება დალაგება. იგი მდგომარეობს შემდეგში: სარგებლიანობები დავალაგოთ მათი შედარებითი მნიშვნელობების გათვალისწინებით და მეტ სარგებლიანობას მეტი შეფასება შევუსაბამოთ.

შენიშვნა 3. (2) თამაშში X^*-ის განსაზღვრაზე მოქმედებს H თამაშში დომინირებული სვეტების არსებობა, რომლებიც აღნიშნულის თანახმად არ გამოირიცხება. ასეთი დომინირებული სვეტის არსებობა უფრო მეტ შემთხვევაში შესაძლებელია მოხდეს H-ის შედგენისას იმ შემთხვევაში, როცა ყველა კრიტერიუმს აქვს შეფასების საკუთარი სკალა. ამიტომ ვგულისხმობთ, რომ H მატრიცაში ყველა k_j კრიტერიუმს აქვს შეფასებათა ერთიანი სკალა - $u_{ij} \in [\alpha, \beta]$, $0 \le \alpha < \beta; i = 1,...,m; j = 1,...,n$. შევნიშნოთ, რომ ყოველი (2) თამაშისათვის მისი მნიშვნელობა $u(H) \ge 0$. თუ H მატრიცის ელემენტებს გავზრდით ერთი და იგივე დადებითი v სიდიდით, მაშინ X^* არ შეიცვლება. შეიცვლება მხოლოდ თამაშის მნიშვნელობა $u(H)$ და იგი გახდება $u(H) + v > 0$. ამიტომ ჩავთვლით, რომ $u(H) > 0$.

ავხსნათ კონკურსის (2) ამოცანისათვის (4) კრიტერიუმის შინაარსი. აქ $X^* = (x_1^*,...,x_m^*)$-ის ოპტიმალურობა და თამაშის მნიშვნელობა $u(H)$ მიუთითებს, რომ რომ C მოთამაშის ნებისმიერი წმინდა $k_j (j = 1,...,n)$ სტრატეგიისათვის X^* უზრუნველყოფს A მოთამაშის ისეთ საშუალო სარგებლიანობას, რომელიც არ იქნება $u(H)$-ზე ნაკლები. ეს ნიშნავს, რომ სრულდება უტოლობები

$$\begin{cases} u_{11}x_1^* + ... + u_{m1}x_m^* \ge u(H) \\ \dots\dots\dots \\ u_{1n}x_1^* + ... + u_{mn}x_m^* \ge u(H) \end{cases} \tag{5}$$

ამ უტოლობების შეკრებით ვღებულობთ უტოლობას

$$x_1^*(u_{11} + ... + u_{1n}) + ... + x_m^*(u_{m1} + ... + u_{mn}) \ge nu(H).$$

ჩვენი აღნიშვნებიდან გამომდინარე ეს იგივეა რაც

$$u(a_1) + ... + u(a_m) \ge nu(H). \tag{6}$$

რადგან (2) თამაშის ელემენტები (შეფასებები) არაუარყოფითი რიცხვებია, ამიტომ $\forall i = 1,...,m$-სთვის $u(a_i) \ge 0$ სიდიდეები არაუარყოფითებია. (6)–ის თანახმად მათი ჯამი არ შეიძლება ნაკლები იყოს არაუარყოფით $nu(H)$ სიდიდეზე. ამავე დროს (6)–ის მარცხენა მხარეში სიდიდეთა ჯამი აწონილი საშუალოა, რომელშიც წონითი კოეფიციენტები A მოთამაშის მიერ კანდიდატთა არჩევის წონებია. ამიტომ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ამ ჯამში თითოეული დადებითი შესაკრები აქტიური კანდიდატის მოსალოდნელი საშუალო შეფასებაა ანუ აქტიური კანდიდატის ‘‘სიძლიერის’’ მაჩვენებელია.. ასეთი მნიშვნელობით სრული უფლება გვაქვს ჩავთვალოთ, რომ რაც უფრო ‘‘ძლიერია’’ კანდიდატი, მით უფრო უპირატესია იგი. ეს პირობაა გამოსახული (4) კრიტერიუმით. ამრიგად, A მოთამაშის ოპტიმალური გადაწყვეტილება კანდიდატთა რანჟირების თაობაზე დაფუძნებულია (4) კრიტერიუმის შესრულებაზე.

(2) ამოცანის ოპტიმალური $X^* = (x_1^*,...,x_m^*)$ ამონახსნის პოვნისათვის გამოვიყენოთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანა და მოვახდინოთ მისი პროგრამული რეალიზაცია Matlab - ის საშუალებით [8]:

function mat2linprog(A)

```
% A მატრიცით მოცემული თამაშის ამოხსნა წრფივი
% დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის საშუალებით
% წრფივი  დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა
a=0;
  if a<0
   a=min(min(A));
   A=A-a;
  end
A=-A';
s=size(A);
```

```
m=s(1);n=s(2);
f=ones(n,1);
b=-ones(m,1);
ib=zeros(n,1);
[z,fval]=linprog(f,A,b,[],[],ib);
v=1/fval+a
x0=(v*z)'
```

ბრძანებათა ფანჯარაში უნდა შევიტანოთ მხოლოდ H მატრიცის ელემენტები. ეს მატრიცა პროგრამაში აღნიშნულია A-თი. ამის შემდეგ m-ფაილ-ფუნქციას გამოვიძახებთ ბრძანებით:

>>mat2linprog(A).

მივიღებთ H თამაშის მნიშვნელობას v$=u(H)$ და ამონახსნს x0$\equiv X^* = (x_1^*,...,x_m^*)$. X^*-ის x_i^* $(i=1,...,m)$ სიდიდეებით გამოვთვლით კანდიდატთა მოსალოდნელ საშუალო შეფასებებს $u(a_i)\,(i=1,...,m)$ და (4) კრიტერიუმით მოვახდენთ კანდიდატთა რანჟირებას.

კონკრეტული საკონკურსო ამოცანების გადაწყვეტისათვის გავითვალისწინებთ ყველა ჩამოთვლილი შენიშვნების და მითითებების საჭიროებას. ამასთან აღვნიშნავთ, რომ ყოველი H თამაშის ოპტიმალურ X^* ამონახსნს მივუთითებთ გამოთვლების გარეშე მათი დიდი მოცულობის გამო. გამოთვლით მეთოდებს და ალგორითებს მკითხველი ადვილად გაეცნობა სახელმძღვანელოებში [2,8].

განვიხილოთ (2) თამაშის ანალიზთან დაკავშირებით ცალ-ცალკე შესაძლო შემთხვევები და შესაბამისი ამოცანები.

I შემთხვევა. თამაშში არ არსებობს დომინირებული, დომინანტი და უნაგირა წერტილის შესაბამისი კანდიდატები

პირველ რიგში განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როცა (2) თამაშში არაა არც დომინირებული კანდიდატი და არც უნაგირა წერტილის შესაბამისი კანდიდატი. განვიხილოთ ასეთი კლასის ამოცანები.

ამოცანა 1.1. მოცემულია H^1 თამაში $u_{ij}\in[0,10]$, $i=1,2; j=1,2$-სთვის; H^2 თამაში $u_{ij}\in[0,10]$, $i=1,2; j=1,2,3,4$-სთვის; H^3 და H^4 თამაშები $u_{ij}\in[0,6]$, $i=1,2,3; j=1,2,3$-სთვის; H^5 თამაში $u_{ij}\in[0,5]$, $i=1,2,3,4; j=1,2$-სთვის:

$$H^1 = \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline a_1 & 10 & 4 \\ a_2 & 2 & 6 \end{array}, \quad H^2 = \begin{array}{c|cccc} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ \hline a_1 & 3 & 0 & 7 & 9 \\ a_2 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{array}, \quad H^3 = \begin{array}{c|ccc} & k_1 & k_2 & k_3 \\ \hline a_1 & 3 & 4 & 1 \\ a_2 & 2 & 3 & 6 \\ a_3 & 5 & 0 & 3 \end{array}.$$

$$H^4 = \begin{array}{c|ccc} & k_1 & k_2 & k_3 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 2 \\ a_2 & 0 & 2 & 0 \\ a_3 & 2 & 0 & 0 \end{array}, \quad H^5 = \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline a_1 & 1 & 5 \\ a_2 & 4 & 2 \\ a_3 & 5 & 0 \\ a_4 & 3 & 4 \end{array}.$$

H^1 თამაში $X^*=(0{,}4;0{,}6)$ და კანდიდატთა მოსალოდნელი საშუალო შეფასებებია: $u(a_1)=x_1^*\cdot\Sigma(a_1)=0{,}4(10+4)=5{,}6$, $u(a_2)=x_2^*\cdot\Sigma(a_2)=0{,}6(2+6)=4{,}8$. (4) კრიტერიუმის თანახმად $u(a_1)>u(a_2)$ და ამიტომ $a_1\succ a_2$. მაშასადამე, უპირატესია პირველი კანდიდატი. თუ საკონკურსო იქნებოდა ერთი ადგილი, მაშინ უნდა აგვერჩია a_1. ორი ადგილის არსებობის შემთხვევაში ორივეს არჩევა შეიძლებოდა კონკურსის გარეშე, თუ მათი მონაცემები დააკმაყოფილებდა მოთხოვნილ პირობებს.

შევნიშნოთ, რომ H^1 თამაშის მნიშვნელობაა $u(H^1)=5{,}2$ და იგი მოთავსებულია $u(a_1)$ და $u(a_2)$ სიდიდეებს შორის - $4{,}8<5{,}2<5{,}6$. ამავე დროს, თამაშში უპირატესი

პირველი კანდიდატის შეფასებათა ჯამიც მეტია მეორე კანდიდატის შეფასებათა ჯამზე - $\Sigma(a_1) > \Sigma(a_2)$. ამ უკანასკნელი პირობის შესრულებიდან არ გამომდინარეობს a_1-ის უპირატესობა a_2-თან შედარებით. მოვიყვანოთ ამ ფაქტის შესაბამისი ამოცანა.

H^2 თამაშში $X^* = (0{,}1818;0{,}8182)$, $u(a_1) = 0{,}1818 \cdot 19 = 3{,}4542$, $u(a_2) = 0{,}8182 \cdot 14 = 11{,}454$. ამიტომ (4) კრიტერიუმის თანახმად $a_2 \succ a_1$. რაც შეეხება კანდიდატთა ჯამურ შეფასებებს, მათ შორის მეტობის მიმართება საწინააღმდეგოა - $\Sigma(a_1) > \Sigma(a_2)$. თამაშის მნიშვნელობაა $u(H^2) = 2{,}4545$ და (6) პირობა გვაძლევს $3{,}4542 + 11{,}454 > 4 \cdot 2{,}4549$ ანუ $14{,}9082 > 9{,}8119$.

H^3 თამაშის ოპტიმალური ამონახსნია $X^* = (0{,}5;0{,}33;0{,}1667)$ და მაშასადამე სამივე კანდიდატი აქტიურია, ხოლო თამაშის მნიშვნელობაა $u(H^3) = 3$. კანდიდატთა მოსალოდნელი საშუალო შეფასებებია $u(a_1) = 0{,}5 \cdot \Sigma(a_1) = 4$, $u(a_2) = 0{,}33 \cdot \Sigma(a_2) = 3{,}67$, $u(a_3) = 0{,}1667 \cdot \Sigma(a_3) = 1{,}33$. რადგან $u(a_1) > u(a_2) > u(a_3)$, ამიტომ $a_1 \succ a_2 \succ a_3$.

H^4-ში $X^* = (0{,}5873;0{,}2063;0{,}2063)$, $u(a_1) = 2{,}349$, $u(a_2) = 0{,}413$, $u(a_3) = 0{,}413$ და $a_1 \succ a_2 \approx a_3$.

H^5 თამაშის ოპტიმალური ამონახსნია $X^* = (0;0{,}18;0{,}07;0{,}74)$, ხოლო მნიშვნელობაა $u(H^6) = 3{,}33$. მაშასადამე, აქტიურებია მეორე, მესამე, მეოთხე კანდიდატები და $u(a_1) = 0$, $u(a_2) = 1{,}08$, $u(a_3) = 0{,}35$, $u(a_4) = 5{,}18$. ამრიგად, $a_4 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_1$.

შენიშვნა 1.1. მოცემული ამოცანის H^3 თამაშში a_1, a_2, a_3 კანდიდატებისათვის შენარჩუნებულია უპირატესობების რიგი შესაბამისად როგორც წონებისათვის - $0{,}5 > 0{,}33 > 0{,}13$ და მოსალოდნელი საშუალო შეფასებებისათვის - $4 > 3{,}67 > 1{,}33$, ისე რანჟირებაში - $a_1 \succ a_2 \succ a_3$. მაშასადამე, მეტი წონის მქონე კანდიდატი აღმოჩნდა უფრო უპირატესი. H^1 თამაშში ნაკლებწონიანი კანდიდატია უპირატესი. H^4 თამაშში თანაბარწონიანი აქტიური კანდიდატები აღმოჩნდა თანაბრად უპირატესი.

II შემთხვევა. კანდიდატი დომინირებულია და არ არსებობს უნაგირა წერტილის შესაბამისი კანდიდატები

ამოცანა 2.1. მოცემულია H^1 თამაში $u_{ij} \in [0,10]$, $i = 1,2,3; j = 1,2$ -სთვის; H^2 თამაში $u_{ij} \in [0,5]$, $i = 1,2,3; j = 1,2,3,4$ -სთვის:

$$H^1 = \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline a_1 & 1 & 4 \\ a_2 & 5 & 3 \\ a_3 & 2 & 6 \end{array}, \quad H^2 = \begin{array}{c|cccc} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ \hline a_1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ a_2 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ a_3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}, \quad H_1^2 = \begin{array}{c|cccc} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ \hline a_2 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ a_3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}.$$

მოცემულ თამაშებში არ არსებობს უნაგირა წერტილის შესაბამისი კანდიდატი – არც ერთი კანდიდატის უმცირესი შეფასება რომელიმე კრიტერიუმით არაა უდიდესი ამ კრიტერიუმით სხვა კანდიდატების შეფასებებზე.

H^1 თამაშში a_1 კანდიდატი დომინირებულია a_3-ის მიერ - $a_3 \succ a_1$. ამის გამო თამაშის ოპტიმალურ ამონახსნში a_1-ის წონა იქნება ნული. მართლაც, ოპტიმალური ამონახსნია $X^* = (0;0{,}67;0{,}33)$ და კანდიდატთა მოსალოდნელი საშუალო შეფასებებია შესაბამისად: $u(a_1) = 0 \cdot 5 = 0$, $u(a_2) = 0{,}67 \cdot 8 = 5{,}36$, $u(a_3) = 0{,}33 \cdot 8 = 2{,}64$. თამაშის მნიშვნელობაა $u(H) = 4$. აქედან ჩანს, რომ a_1-ის დომინანტი კანდიდატი a_3 არაა უპირატესი a_2-ზე -

$a_2 \succ a_3$. დომინირების საფუძველზე a_1 იქნებოდა ყველაზე უვარგისი და მას გამოვრიცხავდით თამაშიდან, თუ იგი იქნებოდა დომინირებული აგრეთვე a_2-ის მიერ, რასაც არ აქვს ადგილი. ამ შემთხვევაში კრიტერიუმით უნდა შევადაროთ ერთმანეთს a_1 და a_2 კანდიდატები. ამიტომ განვიხილოთ H_1^1 თამაში: $H_1^1 = \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline a_1 & 1 & 4 \\ a_2 & 5 & 3 \end{array}$. ამ თამაშში $X_1^* = (0{,}5;0{,}5)$, $u(a_1) = 2{,}5$, $u(a_2) = 4$ და $a_2 \succ a_1$. მიღებული შედეგებიდან $a_3 \succ a_1$, $a_2 \succ a_3$, $a_2 \succ a_1$ გამომდინარეობს, რომ $a_2 \succ a_3 \succ a_1$.

H^2 თამაშში a_1 კანდიდატი დომინირებს a_2-ს - $a_1 \succ a_2$, ე.ი. a_2 არააქტიურია. თამაშის ოპტიმალური $X^* = (0{,}67;0;0{,}33)$-დან გამომდინარე $u(a_1) = 6{,}7$, $u(a_2) = 0$, $u(a_3) = 2{,}64$ და $a_1 \succ a_3$. ამიტომ კანდიდატთა რანჟირებისათვის უნდა შევადაროთ a_2 და a_3, რისთვისაც ვიხილავთ H_1^2 თამაშს. აქ $X_1^* = (0{,}67;0{,}33)$, $u_1(a_2) = 4{,}69$, $u_1(a_3) = 2{,}64$ და $a_2 \succ a_3$. მაშასადამე, H^2 თამაში $a_1 \succ a_2$, $a_1 \succ a_3$, $a_2 \succ a_3$ და კანდიდატების რანჟირებას აქვს სახე $a_1 \succ a_2 \succ a_3$.

შენიშვნა 2.1. განხილული შემთხვევიდან გამომდინარე, თუ რომელიმე კანდიდატი დომინირებულია ყველა დანარჩენის მიერ, მაშინ იგი ყველაზე უვარგისია და გამოირიცხება თამაშის ანალიზიდან. თუ რომელიმე კანდიდატი დომინანტია ყველასათვის, მაშინ იგი ყველაზე უპირატესია და ასევე გამოირიცხება თამაშის ანალიზიდან. დომინირებული კანდიდატი შეიძლება აღმოჩნდეს რომელიმე კანდიდატზე უპირატესი.

III შემთხვევა. უნაგირა წერტილის შესაბამისი კანდიდატის არსებობა და სხვა განსაკუთრებულობანი

საკონკურსო ამოცანებში, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, უნაგირა წერტილის შესაბამისი კანდიდატის არსებობის შემთხვევაში გვაქვს გარკვეული სახის სირთულეები. ამიტომ უმჯობესია ამ სიტუაციის თავიდან აცილება, რაც ნიშნავს, რომ მისი არსებობის შემთხვევაში სასურველია მოვახდინოთ შეფასებათა კორექტირება. განვიხილოთ შესაბამისი ამოცანები.

ამოცანა 3.1. მოცემულია H^1 თამაში $u_{ij} \in [0,20]$, $i = 1,2; j = 1,2$-სთვის; H^2 თამაში $u_{ij} \in [0,10]$, $i = 1,2,3,4; j = 1,2$-სთვის; H^3 თამაში $u_{ij} \in [0,10]$, $i = 1,2,3; j = 1,2$-სთვის:

$$H^1 = \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline a_1 & 8 & 4^* \\ a_2 & 20 & 3 \end{array}. \quad H_1^1 = \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline a_1 & 8 & 3{,}5 \\ a_2 & 20 & 3{,}5 \end{array}. \quad H^2 = \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline a_1 & 0 & 5 \\ a_2 & 6 & 2 \\ a_3 & 10 & 5 \end{array}. \quad H_1^2 = \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline a_1 & 0 & 5 \\ a_2 & 6 & 2 \end{array}.$$

$$H^3 = \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline a_1 & 6 & 4 \\ a_2 & 7^* & 8 \\ a_3 & 1 & 10 \end{array}. \quad H_1^3 = \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline a_1 & 7^* & 8 \\ a_3 & 1 & 10 \end{array}.$$

H^1 თამაში a_1 უნაგირა წერტილის შესაბამისი კანდიდატია – მისი შეფასება k_2 კრიტერიუმით 4 მეტია იმავე კრიტერიუმით a_2 კანდიდატის შეფასებაზე – 3-ზე. ამ თამაშის ამონახსნია $X^* = (1;0)$, რაც გადაგვარებული შემთხვევაა. ჩვენი კრიტერიუმით ამოცანას უნდა ჰქონდეს ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში. ვალდის კრიტერიუმით a_1 ითვლება უკეთეს კანდიდატად. შეფასებებიდან ჩანს, რომ იგი აშკარად ცუდია - $a_2 \succ a_1$. (4) კრიტერიუმის მოთხოვნიდან

გამომდინარე, ასეთ შემთხვევაში უნდა მოვახდინოთ შეფასებათა სათანადო კორექტირება, რათა თავიდან ავიცილოთ უნაგირა წერტილის შესაბამისი კანდიდატის არსებობა. ავიღოთ მაგალითად H_1^1. ამ შემთხვევაში a_2 კანდიდატი დომინანტია და $a_2 \succ a_1$.

H^2 თამაშში a_3 კანდიდატი უნაგირა წერტილის შესაბამისია და ამავე დროს იგი დომინანტია ყველა სხვა კანდიდატისათვის. მაშასადამე ეს კანდიდატი ყველაზე უპირატესია და გამოვრიცხოთ იგი თამაშიდან. მივიღებთ H_1^2 თამაშს, რომლითაც უნდა გავარკვიოთ რომელი კანდიდატია უპირატესი. მისი ოპტიმალური ამონახსნია $X^* = (0,44;0,56)$ და კრიტერიუმის ძალით $u(a_1) = 2,2$, $u(a_2) = 4,48$. ამიტომ $a_2 \succ a_1$. მაშასადამე, H^2 თამაშში $a_3 \succ a_2 \succ a_1$.

H^3 თამაშში a_2 კანდიდატის შეფასებები შესაბამისად მეტია a_1 კანდიდატის შეფასებებზე, ამიტომ a_1 კანდიდატი დომინირებულია. დომინანტი a_2 კანდიდატი ამავე დროს უნაგირა წერტილის შესაბამისია თუ დომინირებულ a_1 კანდიდატს გამოვრიცხავთ, მიღებულ H_1^3 თამაშში ოპტიმალური შერეული სტრატეგია ისევ გადაგვარებული იქნება. მაშასადამე, H^3 თამაშში ოპტიმალური შერეული სტრატეგია გადაგვარებულია.

H^3 თამაშში a_2 კანდიდატი საუკეთესოა ვალდის კრიტერიუმით

$$7 = \max\{\min\{6,4\}, \min\{7,8\}, \min\{1,10\}\}$$

ამ კრიტერიუმით განსაზღვრული კანდიდატი, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, საზოგადოდ არ შეიძლება საუკეთესო კანდიდატად ჩაითვალოს. მაშასადამე, a_2 კანდიდატს ვერ ჩავთვლით საუკეთესო კანდიდატად. ასეთ შემთხვევაში უმჯობესია H^3 თამაშის კორექტირება, მაგალითად ერთ-ერთი სახით შემდეგიდან

$$H^3 = \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline a_1 & 7,1 & 4 \\ a_2 & 7 & 8 \\ a_3 & 1 & 10 \end{array} \text{ ან } H^3 = \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline a_1 & 6 & 4 \\ a_2 & 7 & 6,9 \\ a_3 & 1 & 10 \end{array},$$

რითაც თავიდან ავიცილებთ უნაგირა წერტილის შესაბამისი კანდიდატის არსებობას.

შენიშვნა 3.1. უნაგირა წერტილის შესაბამისი კანდიდატი ან დომინანტია ყველა კანდიდატისათვის, ან ყველაზე ცუდია, ან რანჟირების რიგში შიგნითაა. პირველ ორ შემთხვევაში შესაბამის კანდიდატებს გამოვრიცხავთ თამაშის ანალიზიდან, მესამე შემთხვევაში კი უნდა მოვახდინოთ შეფასებების კორექტირება.

ამოცანა 3.2. განვიხილოთ H თამაში $u_{ij} \in [0,5]$, $i = 1,2,3; j = 1,2,3,4$ -სთვის

$$H = \begin{array}{c|cccc} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ \hline a_1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ a_2 & 2 & 4 & 2^* & 5 \\ a_3 & 4 & 2 & 2^* & 5 \end{array}. \quad H_1 = \begin{array}{c|cccc} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ \hline a_1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ a_2 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ a_3 & 4 & 2 & 2,1 & 5 \end{array}.$$

აქ a_2 და a_3 კანდიდატები უნაგირა წერტილის შესაბამისია. შეფასებების კორექტირებით, რომლის შესაძლებლობის მრავალი ვარიანტი არსებობს, შეგვიძლია გამოვრიცხოთ თამაშში ასეთი კანდიდატის არსებობა. კერძოდ, გავზარდოთ a_3-ის შეფასება k_3 კრიტერიუმით მცირე სიდიდით, ვთქვათ $0,1$-ით, მივიღებთ H_1 თამაშს, რომელშიც უნაგირა წერტილის შესაბამისი კანდიდატი არ არსებობს და მაშასადამე მას ექნება ოპტიმალური ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში - $X^* = (0;0,05;0,95)$. რადგან $u(a_1) = 0$, $u(a_2) = 0,65$, $u(a_3) = 12,45$, ამიტომ $a_3 \succ a_2 \succ a_1$.

ამოცანა 3.3. მოცემულია H თამაში $u_{ij} \in [0,5]$, $i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4$ -სთვის

$$H = \begin{array}{c|cccc} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ \hline a_1 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ a_2 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ a_3 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ a_4 & 2 & 3 & 0 & 5 \end{array}.$$

ამ თამაშში ოპტიმალური ამონახსნია $X^* = (0;0,2;0,6;0,2)$ და თამაშის მნიშვნელობაა $u(H) = 2,4$. კანდიდატთა მოსალოდნელი საშუალო შეფასებებია $u(a_1) = 0$, $u(a_2) = 2$, $u(a_3) = 8,4$, $u(a_4) = 2$. ამრიგად, $a_3 \succ a_2 \approx a_4 \succ a_1$.

როგორც მოსალოდნელი იყო, დუბლირებული კანდიდატები a_2 და a_4 აღმოჩნდნენ ტოლფასი. თუ მაინც და მაინც მოითხოვება მათგან უფრო უპირატესის ამორჩევა, საჭიროა მათ შეფასებებში ექსპერტებმა დამატებით მოახდინონ უმნიშვნელო კორექტირება.

ამოცანა 3.4. მოცემულია H თამაში $u_{ij} \in [0,5]$, $i = 1,2,3; j = 1,2,3$ -სთვის

$$H = \begin{array}{c|ccc} & k_1 & k_2 & k_3 \\ \hline a_1 & 2 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 4 \\ a_3 & 0 & 4 & 0 \end{array}.$$

H თამაშის ოპტიმალური ამონახსნია $X^* = (0,5;0,25;0,25)$ და $u(H) = 1$ ჩვენი კრიტერიუმით $u(a_1) = 1$, $u(a_2) = 1$, $u(a_3) = 1$. მაშასადამე, სამივე კანდიდატი თანაბრად უპირატესია. მათი რანჟირება შესაძლებელია C მოთამაშის მიერ კრიტერიუმების შემოთავაზებული რანჟირების საფუძველზე. თუ მაგალითად, მისი წინადადებით $k_2 \succ k_1 \succ k_3$, მაშინ კანდიდატთა შეფასებების $(2,0,0)$, $(0,0,4)$ და $(0,4,0)$ ლექსიკოგრაფიული შედარებიდან ვღებულობთ, რომ k_2-ით უპირატესია a_3, k_1-ით უპირატესია a_1, ხოლო k_3-ით უპირატესია a_2. მაშასადამე, $a_3 \succ a_1 \succ a_2$.

შენიშვნა (ზოგადი). თამაშთა თეორია წარმოადგენს უნივერსალურ მათემატიკურ აპარატს, რომელიც სწავლობს სათამაშო სიტუაციებს და მათში საუკეთესო და სამართლიანი გადაწყვეტილებების მიღებას. ასეთი სიტუაციები გვხვდება ყველგან – ცოცხალ და არაცოცხალ გარემოში. ეს დარგი განკუთვნილია ნებისმიერი ადამიანისათვის, ყოველი ხელმძღვანელისათვის და მეცნიერისათვის, რადგან წარმოადგენს ინტელექტუალური სისტემების მართვის საფუძველს. ამიტომ იგი მუდმივად ვითარდება სხვადასხვა მიმართულებით. ვერ ვნახავთ მსოფლიოში ქვეყანას, რომლის უნივერსიტეტებში მისი მიმართულებები არ ისწავლებოდეს.

3. დასკვნა

ადრე შესწავლილი საკონკურსო ამოცანის ამოხსნის მეთოდი [1] მოითხოვდა კანდიდატების წყვილობით შედარებას ხარისხობრივი უპირატესობით და შემდეგ გადაგვყავდა იგი რაოდენობრივ მახასიათებლებში. წინამდებარე სტატიაში თამაშთა თეორიის განხილული მოდელით კანდიდატი პირდაპირ ფასდება კვალიფიციური ექსპერტის მიერ რაოდენობრივად წინასწარ მოცემული სკალის ფარგლებში. ამ მოდელის ანალიზი არ წარმოადგენს სირთულეს, მით უმეტეს, რომ აქ გამოიყენება წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა და მისი პროგრამული რეალიზაცია.

ლიტერატურა:

1. ბელთაძე გ. მრავალრიცხოვანი არჩევის ამოცანა მრავალკრიტერიუმიანი კანდიდატების შემთხვევაში. სტუ-ს შრ.კრ., № 4 (474), 2009, გვ.66-80

2. ბელთაძე გ., ჯიბლაძე ნ. გადაწყვეტილებათა მიღების თეორია. II-ნაწ.: მრავალ-კრიტერიუმიანი გადაწყვეტილებები, კონფლიქტები და თამაშები, კოლექტიური გადაწყვეტილებები. სახელმძღვ., სტუ, თბილისი, 2011.

3. ბელთაძე გ. რისკი და სარისკო გადაწყვეტილება ბუნების წინაღმდეგ თამაშში. სტუ-ს შრ.კრ., „მართვის ავტომატიზებული სისტემები" № 1(8), 2010, გვ. 21-29.

4. Beltadze G.N. Matrix game with the preference changing in time. Management research and practice. Academy of Economic Studies, Bucharest, Romania. Vol. 2, Issue 2, (2010), pp. 179-190.

5. Белтадзе Г.Н. Лексикографические матичные игры со случайными выборами критериев игры. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, შრომები, მართვის ავტომატიზებული სისტემები № 1(10), 2011, გვ. 71-74.

6. Beltadze G.N. Lexicographic non-cooperative game's mixed extension with criteria. International Journal of Systems and Software. Asian Research Publishing Network (ARPN) Publishers. Vol 1, № 8, November 2011, pp. 247-250.

7. G. N. Beltadze, J. A. Giorgobiani. About One Game-Theoretic Model of Collective Decision and its Application. International Journal of Information Technology and Computer Science(IJITCS). MECS (Modern Education and Computer Science) Publishers. Hong Kong, Volume 4, Number 3, April 2012, pp. 51-57.

8. ბელთაძე გ., ნაჭყებია მ., მჭედლიშვილი ნ. გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიისა და ოპერაციათა კვლევის ამოცანები. სახელმძღვანელო, სტუ, თბილისი, 2011, 258 გვ.

THE SOLUTION OF THE COMPETITIVE PROBLEM BY ANALYZING OF A GAME'S MODEL AGAINST THE NATURE

Beltadze Guram, Djibladze Nodar

Georgian Technical University

Summary

In the article there is considered the general competitive problem, represented as a matrix game model against the nature. In order to analyse the model there is used MaxiMin principal with mixed strategies for the active player A's optimality. By means of the above mentioned principle we find the optimal solution of a game, which always exists. With the help of the optimal solution the feasible average estimations $u(a_i)$, $i=1,...,m$ of the candidates $S=\{a_1,...,a_m\}$ are calculated, which are used to define the feasible criterion of average estimation $a_i \succcurlyeq a_k \Leftrightarrow u(a_i) \ge u(a_k)$. Using founded criterion we make ranking of the candidates. In the article there is explained the meaning of the criterion and represented possibilities of its usage in general and extreme cases.

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНОЙ ЗАДАЧИ АНАЛИЗОМ МОДЕЛИ ИГРЫ ПРОТИВ ПРИРОДЫ

Белтадзе Г.Н., Джибладзе Н.И.

Грузинский Технический Университет

Резюме

Сформулирована конкурсная задача в общем виде. Задача представлена в виде модели матричной игры против природы. Для анализа модели впервые применяется принцип максимина в смешанных стратегиях лица, принимающего решения - активного игрока A. Данным принципом находим оптимальное решение игры, которое всегда существует. С помощью оптимального решения вычисляются ожидаемые средние оценки $u(a_i)$, $i=1,...,m$ кандидатов $S=\{a_1,...,a_m\}$, участвующих в конкурсе. Данными оценками определяется критерии ранжирования кандидатов $a_i \succcurlyeq a_k \Leftrightarrow u(a_i) \ge u(a_k)$. Оптимальное решение игрока A подразумевает ранжировку кандидатов с применением данного критерия. Объясняются содержания критерии и конкретными задачами показываются возможности ее применения.