

## შრომის დანაწილების პრინციპის მათემატიკური ილუსტრაცია

დ. ჩახვაშვილი, ო. ტომარაძე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

### რეზიუმე

დადგენილია, რომ კლასიკური ეკონომიკური სკოლის ფუძემდებლის დროიდან დღემდე ეკონომიკური მეცნიერება მეთოდოლოგიურად შეიცვალა. ემპირიული და აღწერილობითი მეცნიერებიდან იგი დელუქციურ მეცნიერებად გადაიქცა. აქ ერთგვარი კანონიც კი ამოქმედდა. თავიდან ერთი მეცნიერი გარკვეული რაოდენობის ფაქტებს კრებს და სისტემაში მოჰყავს. შემდგომ, როდესაც მოვლენის სიღრმეში შეღწევა რთულდება, ძიებაში ერთვება კვლევის რთული ანალიტიკური და მათემატიკური არსენალი, რაც შრომის დანაწილების კიდევ ერთი მაგალითი და დიდი მიღწევაა.

**საკვანძო სიტყვები:** შრომის დანაწილება. მათემატიკური მოდელი. კომუნიკაცია.

### 1. შესავალი

ადამიანი, რომელიც ცდილობს შეისწავლოს თანამედროვე ეკონომიკა, ადრე თუ გვიან მიდის დასკვნამდე, რომ იგი მათემატიკის ერთე-ერთი განშტოების წინაშე დგას. მართლაც, ყველაფრის წინაპირობა მეტნაკლებად ნათელი დებულებაა (assumptions), რომლებიც თავისთავად სტატისტიკური მონაცემების შესწავლის ნაყოფია. შემდეგ საქმეში ერთვება მათემატიკის ისეთი მძლავრი განყოფილებები, როგორცაა ოპტიმალური მართვა, მათემატიკური სტატისტიკა და ეკონომეტრიკა. ყოველივე ამას აგვირგინებს დასკვნა (conclusions&implications), რომელიც ყოველთვის უფრო ზუსტი და დამაჯერებელია, ვიდრე ნებისმიერი სიტყვიერი მსჯელობა. ხოლო, პრაქტიკაში თუ რაიმე შეცდომით განხორციელდა, ეს ძირითადად საწყისი მონაცემების უზუსტობის შედეგია და მოდელის მოდიფიკაციის შემდეგ მისი გამოსწორება შესაძლებელია.

დავუშვათ, ჩვენი ამოცანაა ესეს დაწერა ეკონომიკური სწავლების ისტორიის შესახებ. ჩვენს წინაშე გადაიშლება ზღვა მასალა, რომლის ლომის წილს არამათემატიკური წიგნები, სტატიები, ტრაქტატები და მონოგრაფიები წარმოადგენენ. გასული საუკუნის კორიფეებისაკუთარ მოსაზრებებს ძირითადად ჰუმანიტარულ სტილში აყალიბებდნენ, რაც კონკრეტული საკითხის განხილვის დროს ისეთ ველს ქმნის, რომელზეც ორიენტაცია საკმაოდ რთულია.

განვიხილოთ ეკონომიკის აღიარებული კლასიკოსის ადამ სმიტის „გამოკვლევა ადამიანთა სიმდიდრის ბუნებისა და მიზეზების შესახებ“, კერძოდ, ამ წიგნის პირველი სამი თავი, რომელიც შრომის დანაწილებას ეძღვნება. დავსვათ კითხვა: რამდენად შესაძლებელია მათემატიკური ფორმულების ენაზე ავლწეროთ ყოველივე ის რაც მოცემულია ნაშრომის ამ თავებში?

ადამ სმიტის ხსენებული ტექსტის კითხვისას შევამჩნევთ, რომ: 1) წიგნი შეიცავს უამრავ პრაქტიკულ მაგალითს; 2) გამოყენებულია მონაცემები მეცნიერების სხვადასხვა დარგიდან, კერძოდ - ისტორიიდან, გეოგრაფიიდან, ბიოლოგიიდან და სხვ. 2) წიგნი საკმაოდ იოლად იკითხება, თითქმის ისე, როგორც მხატვრული ლიტერატურა. ნათელია, რომ მათემატიკური ტექსტი ვერ შეძლებს ასეთი პირობების დაკმაყოფილებას.

### 2. ეკონომიკური ზრდის ფაქტორები

ადამ სმიტი დამაჯერებლად აღნიშნავს, რომ წლიური პროდუქტის სიდიდე, რომელიც ქვეყნის ერთ სულ მოსახლეზე მოდის, დამოკიდებულია ორ პირობაზე: პირველია, მუშაკის კვალიფიკაცია, განსაკუთრებული საზრიანობა და უნარ-ჩვევები; მეორეა, იმ ადამიანთა თანაფარდობა, რომლებიც დაკავებულია რაიან სასარგებლო შრომით და რომლებიც არა. ავტორის

აზრით, ტერიტორიის, კლიმატის და ნიადაგის ნაყოფიერების მიუხედავად, ერის სიმდიდრე ყოველთვის იქნებადამოკიდებული ამ ორ ფაქტორზე.

ეკონომიკური მეცნიერების განვითარებამ და სხვადასხვა ქვეყნების პრაქტიკამ გარკვეული კორექტივები შეიტანა ამ მოსაზრებაში. სპარსეთის ყურის ქვეყნების გამოცდილებამ გვიჩვენა, რომ „განსაკუთრებული საზრიანობის და უნარ-ჩვევების“ გარეშე, შესაძლებელია ცხოვრების მაღალი დონის მიღწევა. ასევე გაიზარდა მომსახურების სფეროს მნიშვნელობა, რომელის წილმაც ზოგიერთი განვითარებული ქვეყნების მშპ-ში 60%-ს მიაღწია. აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ ეკონომიკური ზრდის ძირითადი ფაქტორი შრომის მწარმოებლურობის ზრდა არის, რაც მეცნიერულ-ტექნიკური პროგრესის შედეგია.

აღამ სმიტი შრომის განაწილების მნიშვნელობაზე საუბრობს, ამით იგი პლატონს ეხმინება, რომელიც იგივეს ამბობდა. მაგრამ სმიტის ორიგინალობა იმაში მდგომარეობს, რომ იგი მას განიხილავს, როგორც შრომის მწარმოებლურობის ზრდის ძირითად ფაქტორს. ამას დღესაც შეგვიძლია დავეთანხმოთ, მხოლოდ იმ დამატებით, რომ ჩვენ დროს ტექნიკურ პროგრესს არ უზრუნველყოფენ უბრალო მუშები, რომლებიც კონცენტრირებულები არიან 1-2 ელემენტარულ ოპერაციაზე, არამედ მეცნიერები და ინჟინრები, რომლებიც ხშირად ასევე ვიწრო სპეციალიზაციით გამოირჩევიან.

თუ ჩნდება აუცილებლობა ფორმულით გამოვსახოთ ის, თუ რაოდენ სასარგებლოა შრომის განაწილება, ვდგებით შემდეგ პოზიციაზე: განვიხილოთ ფუნქცია  $T(x)$ , ანუ დრო, რომელიც სჭირდება მუშაკს, რაიმე პროდუქტის შესაქმნელად, იმ შემთხვევაში თუ წარმოება ითხოვს სხვადასხვა  $x$  ელემენტარულ ოპერაციას. ნათელია, რომ დრო  $\Delta T$  ყოველი ახალი ოპერაციის დამატებასთან ერთად იზრდება. რადგან მუშაკს უჭირს ერთდროულად სხვადასხვა შინაარსის ოპერაციების შესრულება. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ფუნქცია  $T(x)$  – აშკარად ამოზნექილია, თანაც  $T(0) = 0$ . ასეთივე ფუნქციას წარმოადგენს  $T(x) = x^a$  მაშინ, როცა  $a > 1$  ან  $T(x) = x \ln x$ .

შრომის განაწილების პირობებში, პროდუქტის შესაქმნელად, რომელიც ითხოვს  $N$  ოპერაციას,  $K$  რაოდენობის მუშაკებისგან, ჯამური დრო, რომელიც მათ დასჭირდებათ,  $KT(N/K)$  ტოლია, ხოლო შრომის განაწილების გარეშე  $T(N)$ .

$$G'(K) = T(N/K) - (N/K)T(N/K)$$

ფუნქცია  $G(K) = KT(N/K)$ , როგორც ამას გამოთვლები გვიჩვენებს იკლებს შრომის განაწილების სასარგებლოდ (ნახ.1).

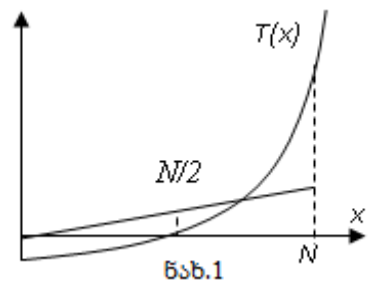
მართლაც, ლაგრანჟის თეორემის თანახმად  $T(N/K) = (N/K)T'(\xi)$ , სადაც  $\xi < N/K$ , და საწყისი ფუნქციის ზრდასთან ერთად  $T(x)$ ,

$$G'(K) = (N/K)(T'(\xi) - T'(N/K)) < 0$$

აქედან ვიღებთ, რომ რაც უფრო მეტია განაწილება, მით მეტია შრომის მწარმოებლურობა. მაგალითად, თუ  $T(x) = x^2$ , მაშინ  $KT(N/K) = T(N)/K$ , ანუ მწარმოებლურობა იზრდება  $K$ -ჯერ.

შრომის საერთაშორისო დანაწილების უპირატესობის მათემატიკური ილუსტრაცია დევიდ რიკარდოს ნაშრომებშია მოცემული, იგი საქვეყნოდ ცნობილია, ამიტომ მას ამ სტატიაში არ განვიხილავთ.

ჩვენი დროის ბევრ მეცნიერს გაუჩნდათ ლეგიტიმური კითხვა, მიუხედავად იმისა, რომ სმიტმა დიდი მნიშვნელობა მიანიჭა კომუნიკაციას, რატომაც არ გამოყოფი იგი დამოუკიდებელ

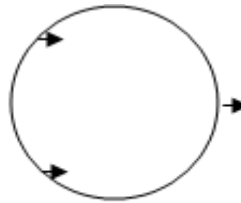


ფაქტორად, რომელიც შრომის მწარმოებლურობასთან ერთად ზრდის მატერიალურ კეთილდღეობას. ამის გასარკვევად განვიხილოთ შემდეგი მოდელი.

დავუშვათ გვაქვს წრიულად განლაგებული ინდივიდების კონტინიუმი. წრე კი გავიაზროთ, როგორც  $[-\pi, \pi]$  მონაკვეთი. ასევე დავუშვათ საქმიანობის გარკვეული  $x$  კონტინიუმიც. ამასთან  $a$  ინდივიდის  $G$  მწარმოებლურობა  $x$  საქმიანობის მიხედვით ერთი მწვერვალით აისახება  $x = a$ , ასე, რომ ყოველი ადამიანი „საკუთარ“ საქმეს უკეთესად აკეთებს, ვთქვათ

$$G = \cos(x - a) + 1$$

ახლა, დავუშვათ, რომ ბაზრის შეზღუდულობის გამო შესაძლებელია მხოლოდ  $k$  სახეობის საქმიანობა, მეტი სიმარტივისთვის,  $k$  წრეზე თანაბრად დაშორებული წერტილებად განვალაგოთ (ნახ.2),



ნახ.2

ნებისმიერმა თავისთვის უფრო მოსახერხებელი რომ აირჩიოს. განვსაზღვროთ  $G(k)$ , რომელიც  $k$ -ზე დამოკიდებულია. თუ  $k=1$ , მაშინ

$$G(1) = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(0 - a) + 1) da = 2\pi$$

ამასთან, როცა  $k > 1$

$$G(k) = k \int_{-\pi}^{\pi} (\cos a + 1) da = 2\pi + 2k \sin(\pi / k)$$

იოლი შესამჩნევია, რომ  $G(k)$  მონოტონურად იზრდება და ორმაგდება კიდევ:

$$G(\infty) = 2G(1) = 4\pi .$$

აქედან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ შრომის სხვადასხვა სახეობების მწარმოებლურობის შეზღუდულობის პირობებში კომუნიკაცია მატერიალური კეთილდღეობის ზრდის საშუალებას იძლევა, ოღონდ გარკვეულ ზღვრამდე, რასაც კომუნიკაცია ე. წ. დამხმარე ფაქტორამდე დაჰყავს. სახვაგვარად მწარმოებლურობის უსასრულო ზრდა ეკონომიკის უსასრულო ზრდას გამოიწვევდა.

ჩვენი მსჯელობის საწყის კითხვაზე კი ასეთი პასუხი შეგვიძლია გავცეთ. შრომის დანაწილების ადამ სმიტის თეორიის მათემატიკური ილუსტრაცია შესაძლებელია. მაგრამ საამისო მასალა არც ისეთი რთულია, ამიტომ ნაკლებად მოთხოვნადი. ხოლო სმიტისეული აღწერითი (მაგალითებით გაჯერებული) მეთოდი, დროითი კონტექსტის დათვალისწინებით, იდეალურად ერგებანა შრომის მიზანს და განუმეორებელ კოლორიტს ანიჭებს.

### 3. დასკვნა

კლასიკური ეკონომიკური სკოლის ფუძემდებლის დროიდან დღემდე ეკონომიკური მეცნიერება მეთოდოლოგიურად შეიცვალა. ემპირიული და აღწერილობითი მეცნიერებიდან იგი დელექციურ მეცნიერებად გადაიქცა. შესაძლებელია აქ ერთგვარი კანონიც კი მოქმედებს: თავიდან ერთი მეცნიერი გარკვეული რაოდენობის ფაქტებს კრებს და სისტემაში მოჰყავს. შემდგომ, როდესაც

მოვლენის სიღრმეში შეღწევა შეუიარაღებელი თვალით შეუძლებელი ხდება, ძიებაში ერთვება კვლევის რთული ანალიტიკური და მათემატიკური არსენალი, რაც თავისთავად შრომის განაწილების კიდევ ერთი მაგალითი და დიდი მიღწევა არის.

#### ლიტერატურა:

1. სმითი ა. გამოკვლევა ადამიანთა სიმდიდრის ბუნებისა და მიზეზების შესახებ. თბ., 1937
2. Тютл И. Жозеф Луи Лагранж. М., “Либроком”, Серия: Физико-математическое наследие. 2010.

### MATHEMATICAL ILLUSTRATION PRINCIPLE OF A DIVISION OF LABOUR

Chakhvashvili D., Tomaradze O.  
Georgian Technical University

#### Summary

It is known that since the days classical economics school has founded to the present day economics fundamentally changed. It has changed from empirical and descriptive science to deductive science, governed by the applicable laws. Initially, a scientist collects a certain number of facts and organize them. Further, when understanding of gathered facts became complicated, to the research complex scientific, analytical and mathematical arsenal is involved, and this is the great achievement of the proper labor division.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПРИНЦИПА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРУДА

Чахвашвили Д., Томарадзе О.  
Грузинский Технический Университет

#### Резюме

Известно, что со времен основателей классической экономической школы по сегодняшний день экономическая наука основательно изменилась. Она из эмпирической и описательной перевоплотилась в дедуктивную науку, подчиняющуюся соответствующим законам. Вначале один ученый собирает определенное количество фактов и систематизирует их. Далее, когда усложняется понимание глубин собранных фактов, к поиску подключается сложный научный аналитический и математический арсенал, что является большим достижением правильного распределения труда.