რიგების ჩაკეტილი სისტემები ეკონომიკის ამოცანებში

რევაზ (ივერი) კაკუბავა[1], გიორგი მაკასარაშვილი[1], ლუიზა სიხარულიძე[2]
1-საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
2-ბათუმის საზღვაო აკადემია

რეზიუმე

ჩატარებულია ეკონომიკის ამოცანებში მენეჯმენტის მეცნიერებისა ზოგადად, და კერძოდ მისი ერთ ერთი ძირითადი მიმართულების – რიგების თეორიის პრაქტიკული გამოყენების შესაძლებლობათა ანალიზი. დაღუპვისა და გამრავლების სტოქასტური პროცესის მეთოდებით მიღებულია რიგების მრავალარხიანი ჩაკეტილი სისტემის ეფექტიანობის ძირითადი მახასიათებლები.

საკვანძო სიტყვები: მენეჯმენტის მეცნიერება (ოპერაციათა გამოკვლევა). რიგების თეორია. ჩაკეტილი სისტემა. დაღუპვისა და გამრავლების პროცესი.

1. შესავალი

პირველი მსოფლიო ომის დროს დიდი ბრიტანეთის შეიარაღებულ ძალებში იყო ცალკეული ნაყოფიერი მცდელობები გამოეყენებინათ მათემატიკური მეთოდები საომარი ოპერაციების ეფექტიანი წარმართვის მიზნით. მეორე მსოფლიო ომის დროს კი დიდი ბრიტანეთისა და აშშ-ს სამხედრო სპეციალისტები მათემატიკურ მეთოდებს უკვე ფართოდ იყენებდნენ.

სწორედ ამ ფაქტების გავლენით გასული საუკუნის 40-50 იან წლებში ჩამოყალიბდა მეცნიერების ახალი დარგი – ოპერაციათა გამოკვლევა. ამის შემდეგ 60-70 იან წლებში ოპერაციათა კვლევის მეთოდები მასობრივად იქნა გამოყენებული არა მარტო სამხედრო საქმეში, არამედ ადამიანის საქმიანობის თითქმის ყველა დარგში (ეკონომიკა, ბიზნესი, ფინანსები და სხვ.), განსაკუთრებით ორგანიზაციული სისტემების მართვის (მენეჯმენტი) ამოცანების გადასაწყვეტად. სწორედ ამიტომ გასული საუკუნის 80-90 იან წლებში გაჩნდა ოპერაციათა გამოკვლევის სინონიმი – მენეჯმენტის მეცნიერება. მას შემდეგ ტერმინები – ოპერაციათა გამოკვლევა და მენეჯმენტის მეცნიერება პარალელურად გამოიყენება.

ამავე დროს, სამხედრო ოპერაციებში მათემატიკური მეთოდების პირველ გამოყენებამდე, დანიელმა მათემატიკოსმა ა. ერლანგმა საფუძველი ჩაუყარა ალბათური მეთოდების გამოყენებას სატელეფონო სისტემებში, რომელიც შემდეგში ჩამოყალიბდა როგორც რიგების (მასობრივი მომსახურების) თეორია.

ეს თეორია მენეჯმენტის მეცნიერებაში (ოპერაციათა გამოკვლევა) ტრადიციულად ერთ-ერთ ძირითად მიმართულებად ითვლება. ამას ადასტურებს მისი მნიშვნელოვანი გამოყენებები სხვადასხვა დარგებში [1,2,5]. ამავე დროს, ბოლო ორი ათეული წლის განმავლობაში რიგების თეორიის გამოყენება კიდევ უფრო მრავალმხრივი გახდა. ეს გამოწვეულია მრავალი გარემოებით. მათ შორის არის მართვის ამოცანების გართულება თანამედროვე სისტემებში, კონკურენციის გაძლიერება თავისუფალი ეკონომიკის პირობებში, მართვის სტოქასტური ასპექტების უფრო სრულყოფილი გაცნობიერება და სხვ. [3,5].

აღნიშნული ტიპის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ასპექტია აგრეთვე რესურსების ეკონომია, რაც ნებისმიერი ფირმის მთავარი საზრუნავია: სახელდობრ, ცნობილია, რომ დიდი რესურსები იხარჯება საქონლისა და მომსახურების რეკლამაზე, რაც გულისხმობს ბრძოლას კლიენტის მოპოვებაზეც.

განვითარებული ქვეყნების ექსპერტთა შეფასებებით, ფირმის მიერ ახალი კლიენტის მოპოვებაზე იხარჯება 6-ჯერ მეტი რესურსი, ვიდრე არსებული კლიენტის შესანარჩუნებლად. ამასთან თუ კლიენტი უკმაყოფილო დატოვებს ფირმას, მაშინ მის დაბრუნებაზე იხარჯება 25-ჯერ მეტი რესურსი. მრავალ შემთხვევაში კლიენტების უკმაყოფილება გამოწვეულია არა მხოლოდ მათი არაკვალიფიცირებული მომსახურებით, არამედ დროში გაწელილი მომსახურებაზე ლოდინით და თვით მომსახურებაზე უარის თქმით, რის მიზეზიც შეიძლება იყოს მომსახურე ობიექტების სიმცირე, მომსახურების არარაციონალური ორგანიზება ან არასრულფასოვნება (მენეჯმენტი). ხშირ შემთხვევაში, რიგების თეორიის მეთოდებით შესაძლებელია ასეთი ხარვეზების აღმოფხვრა. ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ ერთ-ერთ ასეთ შემთხვევას.

1. ძირითადი ნაწილი

განვიხილოთ სისტემა, რომელიც შედგება n (≥ 1) მომსახურების არხისაგან და i ($> n$) განაცხადთა წყაროსაგან. ყოველი წყარო შეიძლება იმყოფებოდეს ორიდან მხოლოდ ერთ მდგომარეობაში: აქტიურში ან პასიურში. წყაროს მიერ უკანასკნელი განაცხადის მიწოდების მთელი დროის განმავლობაში, წყარო იმყოფება პასიურ მდგომარეობაში, რომელშიც მას არ შეუძლია შემდეგი განაცხადის გაგზავნა. როგორც კი მიწოდებული განაცხადი მომსახურებული იქნება, წყარო მაშინვე გადადის აქტიურ მდგომარეობაში, რომელშიც მას შეუძლია შემდეგი შეკვეთის გაგზავნა. ყოველი წყარო წარმოშობს განაცხადთა მარტივ ნაკადს λ ინტენსივობით. ყოველი არხი წარმოშობს მომსახურების მარტივ ნაკადს μ ინტენსივობით. რთული არ არის იმის გაგება, რომ წყაროების რიცხვი i რომ არ აღემატებოდეს არხების რიცხვს n, ეს მიგვიყვანდა არხების მნიშვნელოვანმოცდენამდე. ამიტომაც ვთვლით, რომ $i > n$.

დავნომროთ სისტემის მდგომარეობა პასიურ მდგომარეობაში მყოფი წყაროების რაოდენობის მიხედვით, ან რაც იგივეა, – განაცხადთა რაოდენობით, რომლებიც იმყოფება რს-ში (როგორც რიგში, ისე მომსახურებაში):

s_0 – ყველა i წყარო აქტიურ მდგომარეობაშია, ყველა n არხი თავისუფალია, რიგი არ არის;

s_1 – ერთი წყარო პასიურ მდგომარეობაშია, ერთი არხი დაკავებულია ამ წყაროს მიერ მოცემული განაცხადის მომსახურებით, დანარჩენი $i-1$ წყარო აქტიურ მდგომარეობაშია, $n-1$ არხი თავისუფალია, რიგი არ არის;

s_2 – ორი წყარო პასიურ მდგომარეობაშია, ორი არხი დაკავებულია, $i-2$ წყარო აქტიურ მდგომარეობაშია, $n-2$ არხი თავისუფალია, რიგი არ არის;

...

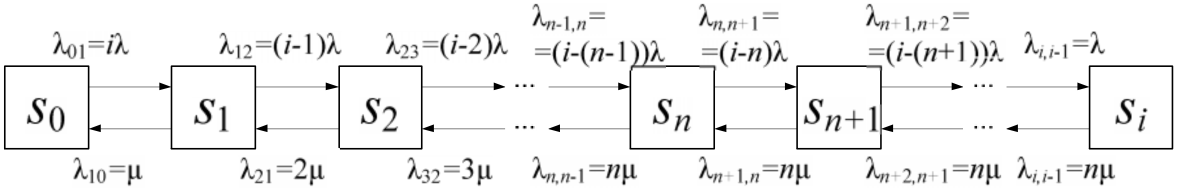
s_n – ყველა n წყარო პასიურ მდგომარეობაშია, ყველა n არხი დაკავებულია, $i-n$ წყარო აქტიურ მდგომარეობაშია, რიგი არ არის;

s_{n+1} – $n+1$ წყარო პასიურ მდგომარეობაშია, n არხი დაკავებულია, ერთი შეკვეთა რიგშია, $i-(n+1)$ წყარო აქტიურ მდგომარეობაშია;

...

s_i - ყველა i წყარო პასიურ მდგომარეობაშია, n არხი დაკავებულია, i − n შეკვეთა რიგშია.

განხილული რს-ს მდგომარეობის გრაფი ნაჩვენებია 1-ელ ნახაზზე.



ნახ.1

s_{k-1} მდგომარეობიდან s_k (k = 1,…,i) მდგომარეობაში სისტემას გადაიყვანს განაცხადთა ჯამური ნაკადი, რაც მიიღება აქტიურ მდგომარეობაში მყოფი ყველა წყაროების i − (k − 1) განაცხადთა ნაკადების შეკრებით; ამიტომ

$$\lambda_{k-1} = (i-(k-1))\,\lambda; \quad k = 1,\dots,i. \tag{1}$$

რს s_k მდგომარეობიდან s_{k-1}, k = n+1,…,i მდგომარეობაში გადადის მომსახურების ჯამური ნაკადის მოქმედებით, რომელიც მიიღება მომსახურების n ნაკადის აჯამვით ყოველ n დაკავებულ არხზე (მდგომარეობაში s_k, k = n+1,…,i) ინტენსივობით μ,

$$\lambda_{k,k-1} = n\mu; \quad k = n+1,\dots,i \tag{2}$$

სისტემას s_k მდგომარეობიდან s_{k-1}, $k = 1,\dots,n$ მდგომარეობაში გადადის მომსახურების ჯამური ნაკადის მოქმედებით, რომელიც მიიღება მომსახურების k ნაკადების აჯამვით, ყოველ k დაკავებულ არხზე s_k მდგომარეობაში, ინტენსივობით μ; ე.ი.

$$\lambda_{k,k-1} = k\mu; \quad k = 1,\dots,n. \tag{3}$$

როგორც გრაფიდან ჩანს, სისტემაში მიმდინარეობს დაღუპვისა და გამრავლების პროცესი.ეს პროცესი სრულყოფილად არის შესწავლილი და ჩვენ ვისარგებლებთ არსებული შედეგებით ჩვენი სისტემის ზღვრული ალბათობების საპოვნელად. მიიღება ასეთი გამოსახულებები:

$$p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{i!}{k!\,(i-k)!}\rho^k + \sum_{k=n+1}^{i} \frac{i!}{n^{k-n}\,n!\,(i-k)!}\rho^k \right)^{-1} =$$

$$= \left(i! \sum_{k!}^{n} \frac{\rho^k}{k!\,(i-k)!} + \frac{i!}{n!} \sum_{k=n+1}^{i} \frac{\rho^k}{n^{k}\,(i-k)!} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{i!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!\,(i-k)!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{i} \frac{\rho^k}{n^{k}(i-k)!} \right)^{-1}; \tag{4}$$

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{i!}{k!\,(i-k)!}\rho^k p_0, & k = 1,\dots,n; \\ \dfrac{i!}{n^{k-n}\,n!\,(i-k)!}\rho^k p_0 & k = n+1,\dots i \end{cases} \tag{5}$$

ვთქვათ, N არის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც წარმოადგენს მომსახურებაში მყოფი შეკვეთების რიცხვს, ან რაც იგივეა, დაკავებული არხების რიცხვი K. ცხადია, რომ ამ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს ექნება სახე

$N = K$	0	1	…	$n-1$	n
P	p_0	p_1	…	p_{n-1}	$p_n + p_{n+1} + \cdots + p_i$

განვსაზღვრავთ რა შეკვეთების საშუალო რიცხვს $\bar{N}$, რომელიც იმყოფება მომსახურების ქვეშ, როგორც შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინს $E[N]$, და თუ გამოვიყენოთ ნორმირების პირობას, ასევე (4) და (5)ფორმულებს, მივიღებთ:

$$\bar{N} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + \cdots + (n-1)p_{n-1} +$$

$$+n(p_n + p_{n+1} + \cdots + p_i) = \sum_{k=0}^{n-1} kp_k + n\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k\right) = n + \sum_{k=0}^{n-1} (k-n)p_k =$$

$$= n - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)p_k = n - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\frac{i!}{k!\,(i-k)!}\rho^k p_0 =$$

$$= n - i!\,p_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)}{k!\,(i-k)!}\rho^k. \quad (6)$$

ვინაიდან $\bar{K}$ არის დაკავებული არხების რიცხვი, ხოლო μ – ყოველი არხით მომსახურების ნაკადის ინტენსივობა, მაშინ რს-ს აბსოლუტური გამტარუნარიანობა გამოისახება ფორმულით

$$A = \bar{K}\mu \quad (7)$$

გამოსასვლელი ნაკადის ინტენსივობა $\nu = A = \bar{K}\mu$

ვინაიდან რს ში შემოსული ყოველი განაცხადი მომსახურებული იქნება, ამიტომ რს ს ფარდობითი გამტარუნარიანობა $\mathbf{Q} = 1$.

ასეთივე მსჯელობით ჩვენ ვიპოვით, რომ

$$\bar{\bar{\Lambda}} = (1 - \bar{N}_s)\lambda = A \quad (8)$$

სადაც $\bar{\bar{\Lambda}}$ – ჯამური შემავალი ნაკადის საშუალო ინტენსივობაა, რომელიც წარმოქმნილია აქტიური წყაროების საშუალო რიცხვით i -$\bar{N}_s$.$\bar{N}_s$– სისტემაში მყოფი განაცხადების საშუალო რიცხვია, ანუ პასიურ მდგომარეობაში მყოფი წყაროების საშუალო რიცხვი $\bar{N}_p$. მიღებულ შედეგებს მრავალი პრაქტიკული გამოყენება აქვს. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ (ცხრ.1) მაგალითი [2].

ცხრ.1

I	p_j	jp_j	(j-n)pj	$(n-j)p_j$
0	0,1548	0	-	0.4644
1	0,3090	0.3096	-	0.6192
2	0,2786	0.5572	-	0.2786
3	0,1486	0.4558	-	0
4	0,0693	0.2772	0.0693	-
5	0,0277	0.1385	0.0554	-
6	0,0087	0.0522	0.0261	-
7	0,0018	0.0126	0.0072	-
8	0,0004	0.0032	0.0020	-
9	0,0001	0.0009	0.0006	-
10	0	0	0	-
ჯამი	0,9996	1.7972	0.1606	1.3622

ათ ავტომატს ემსახურება სამი ოპერატორი. საშუალოდ ექვს საათში ხუთი ავტომატი მტყუნდება და ყოველი მათგანის აღდგენას ერთი ოპერატორი საშუალოდ ანდომებს ათ წუთს. იპოვეთ სისტემის მახასიათებლები თუ მტყუნებები ქმნიან უმარტივეს ნაკადს, ხოლო მათი აღდგენის დრო განაწილებულია ექსპონენტურად.

ამოხსნა: გვაქვს ჩაკეტილი ტიპის რს. n=3; i=10; λ=1.2 სთ$^{-1}$; μ=6 სთ$^{-1}$. $\rho=\lambda/\mu$=0,2.

სისტემის მდგომარეობათა ალბათობები გაანგარიშებული (3.3.25)-(3.3.27) ფორმულებით მოცემულია ცხრილში, საიდანაც ჩანს, რომ დროის 15% ოპერატორები თავისუფალია p_0=0.155. თუმცა ეს არ გამორიცხავს, რომ არ იქნება ისეთი სიტუაცია, როდესაც მტყუნებული ავტომატები იქნება აღდგენის მოლოდინის რეჟიმში. საშუალოდ აღდგენის მოლოდინში მყოფი ავტომატების რაოდენობა L=0,16 (ცხრილის მეოთხე სვეტის ჯამი),ხოლო მტყუნებული ავტომატების საშუალო რაოდენობა აღდგენის რეჟიმში, ან აღდგენის მოლოდინის რეჟიმში არის 1,79 ტოლია (ცხრილის მესამე სტრიქონი). ჩატარებული გათვლები გვიჩვენებენ, რომ სამი ოპერატორი სავსებით საკმარისია ათი ჩარხის მომსახურებისათვის.

1. დასკვნა

რიგების ჩაკეტილი სისტემის ანალიზური გამოკვლევა აწყდება ძირითად სირთულეებს იმის მიხედვით, თუ როგორია სისტემის საწყისი დროითი მახასიათებლები. იმ შემთხვევაში, როცა ეს მახასიათებლები ექსპონენტურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ ეფექტიანად გამოიყენება დაღუპვისა და გამრავლების სტოქასტური პროცესის მეთოდები. წარმოდგენილ სტატიაში სწორედ ეს შემთხვევაა განხილული. სხვა შემთხვევებში საჭირო ხდება ნახევრადმარკოვული პროცესების, ან მარკოვული აღდგენის პროცესების გამოყენება, რაც გაცილებით რთულ ამოცანას წარმოადგენს. ეს შემთხვევები მომავალი კვლევების საგანია.

ლიტერატურა:

1. არსენიშვილი გ. მასობრივი მომსახურების თეორია. თბილისი, თსუ, 1984

2. კუცია მ., ჭანია მ. მასობრივი მომსახურების თეორია ეკონომიკასა და ბიზნესში. თბილისი, უნივერსალი, 2011

3. Kakubava R.. Multi-Line Closed Queuing System for Two Maintenance Operations. Reliability & Risk Analysis: Theory & Applications. Vol.1, No.1, 2010

4. Kakubava R., SztrikJ.. Queuing Models with Two Types of Service: Applications for Dependability Planning of Complex Systems. VII International Conference. Proceedings. MMR 2011 - Mathematical Methods in Reliability. Theory. Methods. Applications. Beijing, 2011

5. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике. М.: Юнити, 2006.

CLOSED QUEUING SYSTEMS IN PROBLEMS OF ECONOMICS

Kakubava Revaz (Iveri), Makasarashvili Giorgi, Sikharulidze Luiza

Georgian Technical University

Summary

Analysis ofpossibilities for practical applications of managementsciencein general, andin particularoneof itsmainpart– queuing theory in economicobjectives is conducted. The effectiveness data ofmulti-line closed queuingsystemis obtained through birth-death stochasticprocess's methods.

ЗАКНУТЫЕ СИСТЕМЫ ОЧЕРЕДЕЙ В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИКИ

Какубава Р.(И.), Макасарашвили Г., Сихарулидзе Л.

Грузинский Технический Университет

Резюме

Проведен анализ возможностей практических применений научного менеджмента (исследования операций) в общем, и в частности одного из его основных направлений – теории очередей в экономических задачах. Методами стохастического процесса гибели и размножения получены основные характеристики эффективности замкнутой многоканальной системи очередей.