

**ეკონომიკური კრიზისებისა და ციკლების ფაზური ტრანსფორმების ანალიზი**

ნინო მჭედლიშვილი, ირმა დავითაშვილი, ლია ნონიკაშვილი  
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

**რეზიუმე**

განხილულია საქმიანი ციკლებისა და კრიზისების, კერძოდ ვოლტერა-ლოტკას მოდელი და მისი გამოკვლევის შედეგები. კომპიუტერზე MATLAB სისტემის საშუალებით განხორციელებულია მოდელირება და აგებულია ფაზური ტრანსფორმაციები. მიღებულია თვალსაჩინო „გაცოცხლებული“ გრაფიკული გამოსახულებები, რომლებიც ასახავს ქაოსურ სისტემებში მიმდინარე პროცესებს.

**საკვანძო სიტყვები:** ეკონომიკა. კრიზისი. ციკლების თეორია. ვოლტერა-ლოტკას მოდელი. MATLAB. ფაზური ტრანსფორმაცია.

**1. შესავალი**

მსოფლიო ეკონომიკურმა კრიზისმა თავის დროზე მეცნიერების ყურადღება მიიპყრო ეკონომიკური თეორიის მიმართ. ეკონომიკაში მუდმივად ყალიბდება და ვითარდება მთელი რიგი თეორიებისა. ერთ-ერთ მათგანია ციკლების თეორია. მიუხედავად იმისა რომ ეს თეორია ჯერ ისევ განვითარების პროცესშია, მას არა მარტო თეორიული, არამედ პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს.

ეკონომიკური თეორიის სახელმძღვანელოებში არის მხოლოდ იმ ციკლების აღწერა, რომელთაც ადგილი ქონდათ წარსულში, არსებობს ციკლების კლასიფიკაცია პერიოდების მიხედვით, მაგრამ არ არსებობს მათი გამოთვლის ზუსტი ფორმულები. არის მითითება იმაზე, რომ ციკლის გამოწვევა ხდება საბაზრო ეკონომიკის თავისებურებებით, როცა კერძო ინტერესები იწვევენ გლობალურ ზედმეტწარმოებას და შემდგომ კრიზისს. კრიზისი არის საქონლის საერთო მოცულობის შეუსაბამოა ფულის საერთო მოცულობასთან. გაუგებარია, როგორ ხდება მომავალში ამ შესაბამისობის აღდგენა, ანუ როგორ წარმოიქმნება ციკლი.

ლიტერატურაში გვხვდება ამ მათემატიკური თეორიის პირველი მიახლოებების აგების მცდელობები. მაგალითად, ამ მიზნისათვის ვოლტერა და ლოტკას განტოლებების, ან მათი მოდიფიკაციების, გამოყენების ფაქტები. ეს განტოლებები, თავის დროზე, აღმოჩნდნენ ძალიან საინტერესო „მტაცებლის და მსხვერპლის“ პოპულაციების აღწერისათვის. თუმცა მერე აღმოჩნდა, რომ ამ განტოლებების ამონახსნები ზუსტ ანგარიშს არ იძლევიან, არემედ გვაძლევენ ვერისტიულ იდეებს ამ პოპულაციების მართვისათვის პრაქტიკული გადაწყვეტილების მიღებისას.

“მტაცებელი-მსხვერპლი“-ს მოდელი შექმნილი იყო ბიოლოგიურ სისტემებისათვის, თუმცა მისი გამოყენება, გარკვეული კორექტირებით. შეიძლება ეკონომიკური, ეკოლოგიური, სოციალური და სხვა პრობლემატიკისათვის.

ვოლტერა-ლოტკას მოდელი ჩაიწერება სისტემით:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (a - bx_2)x_1 - cx_1^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = (-c + dx_1)x_2 - dx_2^2 \end{cases}, \quad (1)$$

საწყისი  $t = 0$  მომენტისათვის  $x_1$  და  $x_2$  მნიშვნელობები ცნობილია.

ამ ამოცანის ამოხსნისას სისტემა Matlab-ში  $a = \text{var}$  დროს, ვიღებთ სხვადასხვა ფაზურ ტრანსფორმაციებს.

ვოლტერა და ლოტკას განტოლებების გამოყენებას ეკონომიკაში აგრეთვე აქვთ მხოლოდ ვერისტიკული როლი, ისინი არ იძლევიან ზუსტ პროგნოზებს. მაგრამ მათი ეკონომიკური ახსნა-განმარტება საკმაოდ სასარგებლოა, ვინაიდან ეყრდნობა რა გამართივებულ აბსტრაქტულ ეკონომიკურ მოდელს, აჩვენებს ეკონომიკის განვითარების სწორედ ციკლურ არსის გარდაუვალობას.

განვიხილოთ ეს მოდელი. ვთქვათ, იწარმოება მხოლოდ ერთი სახის საქონელი, მაგალითად, პინკ-პონკის ბურთი. ვთქვათ, ერთი ბურთი ღირს 1 ლარი. სხვა არავითარი საქონელი ამ მოდელში არ განიხილება, ესე იგი იგულისხმება ერთი საქონლის ეკონომიკა. ვთქვათ, ყოველ დროის  $t$  მომენტში არის  $N(t)$  ბურთი, ხოლო ფული არის  $P(t)$ . “კარგ” ეკონომიკაში უნდა სრულდებოდეს  $N(t) = P(t)$ .

შევთანხმდეთ, რომ საქონელი ამ მოდელში ასრულებს “მსხვერპლის”, ხოლო ფული “მტაცებლის” როლს.

მივიღებთ “საქონელი - ფულის”-ს მოდელის განტოლებებს:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (p - qP)N \\ \frac{dP}{dt} = (-r + sN)P \end{cases}; \quad (2)$$

ავიღოთ, მაგალითისათვის,  $p = 4$ ;  $q = 2.5$ ;  $r = 2$ ,  $s = 1$ .

ავაგოთ სისტემის ფაზური პორტრეტი.

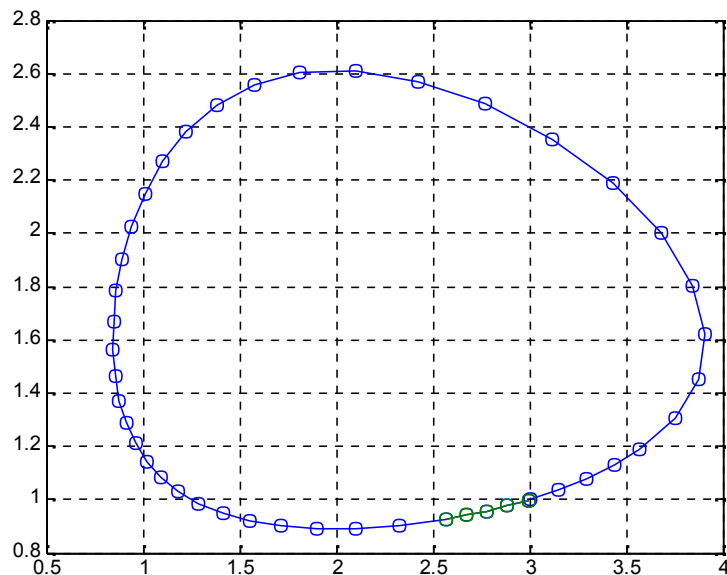
დავწეროთ პროგრამა Matlab-ში და განვიხილოთ შემთხვევა როცა  $\alpha = 0$ :

```
function f=VolterraLog(t,x)
    a=4;
    b=2.5;
    c=2;
    d=1;
    alpha=0;
    f(1) = (a-b*x(2)) * x(1) - alpha*x(1)^2;
    f(2) = (-c+d*x(1)) * x(2) - alpha*x(2)^2;
    f=f';
```

და შევიყვანოთ ბრძანების ფანჯრიდან:

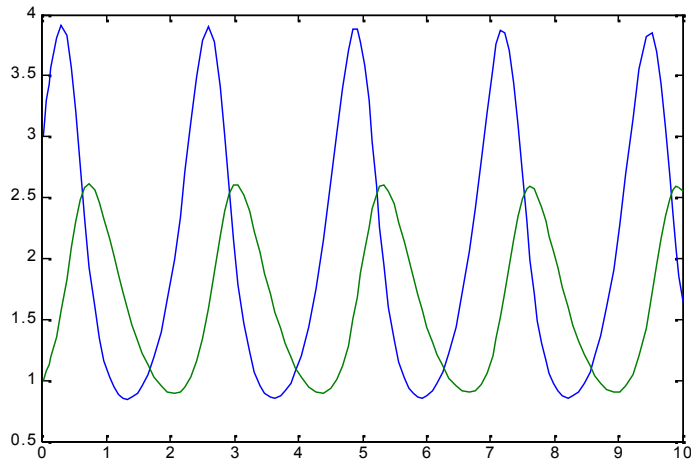
```
>> opt=odeset('OutputSel',[1 2], 'OutputFcn', 'odephas2');
>> [T,X]=ode45('VolterraLog', [0 2.3],[3 1],opt);
```

მივიღებთ ფაზურ პორტრეტს:



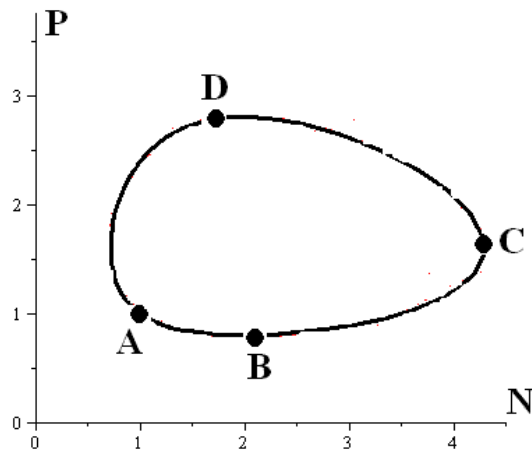
ნახ.1

როგორც ვხედავთ, ფაზური ტრაექტორია წარმოადგენს შეკრულ კონტურს, რაც მიუთითებს იმაზე, რომ სისტემაში არის რხევითი პროცესები. მართლაც, რომ ავავოთ დროითი მახასიათებლები, მივიღებთ:



ნახ.2

ჩავხაზოთ ფაზური ტრაექტორია სქემატურად:



ნახ.3

დავუშვათ, ღერძების მასშტაბი არის: 1000 ცალი საქონელი – OX-ღერძზე და 1000 ლარი OY-ღერძზე. დროის ერთეულად ავიღოთ 1000 საათი.

ფაზურ ტრაექტორიაზე ვარჩევთ დამახასიათებელ  $A, B, C, D$  წერტილებს. მათი მიღწევის დროის გამოთვლა შეიძლება ციკლის ოპერატორის საშუალებით.

დავუშვათ ეკონომიური პროცესი იწყება  $A$  წერტილში, სადაც წარმოებული საქონლის რაოდენობა (1000 ცალი) ემთხვევა ფულადი მასის მოცულობას (1000 ლარი). შემდეგ ფაზური წერტილი მოძრაობს მიღებულ ტრაექტორიაზე. საქონლის მოცულობა იზრდება, მაგრამ ნაციონალურმა ბანკმა, ფაზური ტრაექტორიის მიხედვით, არ უნდა დაბეჭდოს ამ ეტაპზე, ანუ  $B$  წერტილამდე, არასაკმარისი ფულადი კუპიურები. პირიქით უნდა გამოიყვანოს ფულის ნაწილი ბრუნვიდან. პროცესი მიდის ქვედა  $ABC$  შტოზე. საქონელი დასაწყისში,  $B$  წერტილამდე, იაფდება. ეს პუნქტი ( $B$  წერტილი) მიიღწევა 450 საათის შემდეგ. ამ მომენტში წარმოებულია 2299 ცალი, ხოლო ფულის მასა უნდა იყოს 818 ლარი. ფასი მიახლოებით არის 35.58 თეთრი. ამის შემდეგ, ბანკმა უნდა დაბეჭდოს ფული, წინააღმდეგ შემთხვევაში მოსახლეობა ვერ იყიდის

საქონელს. ამიტომ, B წერტილიდან დაწყებული ფასის ვარდნა ცოტა მცირდება. C წერტილში ბაზარი გაჯერებულია, წარმოებულია 4287 ცალი საქონელი. საქონლის წარმოების გაზრდას არა აქვს აზრი, ფული უნდა დაიბეჭდოს დამატებით 710 ლარის ოდენობით (ეს დასკვნა მოულოდნელია და უჩვეულო, თუმცა ბანკები ალბათ ასე იქცევიან). სულ ფულის მოცულობა დაიყვანება 1528 ლარამდე, ესე იგი ფასი უდრის 35.64 თეთრს. იწყება წარმოების ვარდნა და უმუშევრობის ზრდა, ფულის მოცულობა უნდა გაიზარდოს, რომ მოიცვას საქონლის მთელი მოცულობა, ფასები იწვევს ზევით. D წერტილამდე ბანკი აგრძელებს ფულის ბეჭვდას, დამატებითი გამოშვება შეადგენს 1274 ლარს. D წერტილში ფასი არის 1 ლარი და 48 თეთრი. მაგრამ, D წერტილიდან დაწყებული ბანკი წყვეტს ფულის გამოშვებას, ზედმეტი 890 ლარი იღება ბრუნვიდან, ფასები იწყებს შემცირებას, რაც კრიზისის დამთავრების უტყუარი ნიშანია. 2329 საათის, ანუ 97 დღის, გავლის შემდეგ ციკლი სრულდება.

განხილული მარტივი მოდელი აჩვენებს, რომ ზუსტი ფორმულების არ ქონის დროსაც შეიძლება კრიზისის მიახლოების და დაწყების ნიშნების, ისევე როგორც კრიზისის გარდაუვალი დამთავრების და ეკონომიკის ზრდის ნიშნების განსაზღვრა.

#### ლიტერატურა:

1. მართვის თეორია. სინერგეტიკა. წიგნი III. ა. გუგუშვილის და რ. ხუროძის რედაქციით. თ. იმედაძე, დ. გარგი, და სხვა თბილისი: სტუ-ს გამომცემლობა. 2000
2. იმედაძე თ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი.მართვის პრობლემათა თანამედროვე ანალიზი MATLAB-ის პროგრამული უზრუნველყოფით. სტუ, თბილისი, 2003
3. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Москва, Мир, 1999.
4. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. Научно-изд.центр “Регулярная и хаотическая динамика”, М., 2000
5. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB-5 и Scilab. Санкт-Петербург: Наука, 2001.

### CONSTRUCTION OF PHASE TRAJECTORIES ECONOMIC CRISES AND CYCLES

Mchedlishvili Nino, Davitashvili Irma, Nonikashvili Lia  
Georgian Technical University

#### Summary

Model of business cycles and crises Voltaire-Lotka considered. Their results are presented on a computer. Simulation is carried out using Matlab system and built the phase trajectories. A visual "recover" the graphics that reflect the current processes in chaotic systems.

### ПОСТРОЕНИЕ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ КРИЗИСОВ И ЦИКЛОВ

Мчедлишвили Н., Давиташвили И., Ноникашвили Л.  
Грузинский Технический Университет

#### Резюме

Рассмотрены модели деловых циклов и кризисов Вольтера–Лотки. Приведены результаты их исследований на компьютере. Проводилось моделирование с помощью системы Matlab и построены фазовые траекторий. Получены визуальные «оживленные» графические изображения, которые отражают текущие процессы в хаотических системах.