ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების პრობლემის გადაწყვეტა სინერგეტიკის მეთოდებით

ვალიდა სესაძე, ვლადიმერ კეკენაძე, გელა ჭიკაძე, ნანა მაღლაკელიძე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია ჩაკეტილი ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების სინთეზი, კერძოდ ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების პრობლემის გადაწყვეტა სინერგეტიკული მეთოდების გამოყენებით. ნაჩვენებია, რომ ამ ამოცანის გადაწყვეტისას დამოუკიდებელ პრობლემას წარმოადგენს შესაბამისი ხარისხის კრიტერიუმის ფორმირება.

საკვანძო სიტყვები: ჩაკეტილი მართვის სისტემა. სინერგეტიკული მეთოდები. ოპტიმალური მართვა.

1. შესავალი

ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანა (ორაკ) თანამედროვე ეტაპზე წარმოადგენს ოპტიმალური მართვის სისტემების ძირითად ამოცანას, რომლის გადაწყვეტის თანამედროვე მეთოდები ეფუძნება თანამედროვე მართვის სინერგეტიკულ თეორიას.

განვიხილოთ ორაკ-ის პრობლემების გადაწყვეტის ახალ მიდგომა, რომელიც ეფუძნება ოპტიმალურ სისტემებში დისიპატიურობის ფიზიკურ თვისებას. ეს თვისება განეკუთვნება მართვის სინერგეტიკული თეორიის ერთ-ერთ საკვანძო საკითხს. დისიპატიური სისტემების თვისება შეიძლება განვიხილოთ როგორც ოპტიმალური მართვის სინერგეტიკული თეორიის ერთი ნაწილი.

დინამიკური სისტემების თანამედროვე თეორიაში დისიპატიურ სისტემებს უკავია განსაკუთრებული ადგილი. უკანასკნელ პერიოდში განვითარდა ისეთი მეცნიერული მიმართულებები, რომლებიც დაკავშირებულია არაწრფივ დინამიკასთან, მაგალითად, სინერგეტიკა, სოლიტონიკა და კატასტროფების თეორია. აუცილებელია აღვნიშნოთ, რომ დისიპატიური სისტემები განეკუთვნება ყველაზე ნაკლებად შესწავლილ დინამიკური სისტემების კლასს. დისიპატიური სისტემები და ჩაკეტილი ოპტიმალური დისიპატიური სისტემები ასრულებს მნიშვნელოვან როლს როგორც დინამიკური სისტემების ზოგად თეორიაში და ისე მართვის სინერგეტიკულ თეორიაში [1,2].

დავუშვათ, რომ მართვის ობიექტი აღიწერება დიფერენციალური განტოლებით, რომელიც ჩაწერილია ვექტორულ-მატრიცული ფორმით [1]:

$$\dot{x} = (t) = f(x) + G(x)u \tag{1}$$

სადაც $x=(x_1,\dots,x_n)^T$, $u=(u_1,\dots,u_n)^T$-შესაბამისად ფაზური კორდინატების და მართვების ვექტორებია; $f(x,u)=(f_1(x,u), f_2(x,u),\dots f_n(x,u))^T$–ვექტორ-ფუნქცია; $G(x)=(g_{ij}(x))$-$n\times m$ განზომილების მატრიცაა.

მართვის ოპტიმალური სინთეზის ამოცანა ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სახით: მოიძებნოს მართვის კანონი $u=u(x)$, რომელსაც გადაჰყავს (1) ობიექტი ნებისმიერი საწყისი $x(0)=x_0$ მდგომარეობიდან, ფაზური სივრცის $x=0$ კორდინატთა სათავეში, უზრუნველყოფს ჩაკეტილი სისტემის ასიმპტოტიკური მდგრადობა და მინიმუმს ანიჭებს ფუნქციონალს

$$I = \int_0^\infty \Big(F_0\left(x\right) + \left\langle u, Du \right\rangle \Big) dt\,. \tag{2}$$

$F_0(x)$ არის x-ის მიმართ დადებითი ფუნქცია. $D=diag(d_{ii})$- განტოლების დიაგონალური მატრიცა, ხოლო $m\times m$; $\langle .,. \rangle$ - ვექტორების სკალარული წარმოებული.

ოპტიმალური მართვის სინთეზის ფორმულირებული ამოცანა წარმოადგენს ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ცნობილ ამოცანას, რომელშიც საოპტიმიზირებულ ფუნქციონალს გააჩნია ნახევრადგანსაზღვრული სახე. ამ შემთხვევაში სინთეზის ამოცანა დაიყვანება კერძოწარმობულებიანი წრფივი განტოლების ამოხსნამდე, რაც საშუალებას გვაძლევს ზოგიერთი კლასის არაწრფივი ობიექტების მართვის მოსაძებნად ავაგოთ სინთეზის რიცხვითი პროცედურები [4].

სინთეზირებული ჩაკეტილი ოპტიმალური მართვის სისტემა ზოგად შემთხვევაში თვითონ წარმოადგენს დინამიკურ სისტემას, რომლებიც აღიწერება წრფივი დიფერენციალურ ვექტორულ-მატრიცული განტოლებით.

$$\dot{x}(t) = \varphi(x)\,, \tag{3}$$

სადაც $\varphi(x) = f(x) + G(x)u(x)$; $u(x)$ – მართვის ოპტიმალური კანონების ვექტორია.

სინთეზირებული ლეტოვ-კალმანის ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების მეთოდი დისიპატიურია [4]. ე.ი. მისთვის სრულდება უტოლობა

$$div\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\Bigg|_{x\in\Omega} < 0, \tag{4}$$

ჩაკეტილი ოპტიმალური სისტემა (3), რომელიც აკმაყოფილებს (4) უტოლობას, ვუწოდებთ ჩაკეტილ ოპტიმალურ დისიპატიურ სისტემას. ასე, რომ დისიპატიური სისტემებისათვის დივერგენცია (4) ყოველთვის უარყოფითი სიდიდეა, რომელიც ახასიათებს ფაზური მოცულობის შეკუმშვის სიჩქარეს. ასეთ შემთხვევაში ყველა ტრაექტორიები აუცილებლად შეიკრიბება (მიიზიდება) რომელიღაც მიმზიდავი სიმრავლისკენ – ატრაქტორისკენ ფაზურ სივრცეში, ხოლო მისი განზომილებები ყოველთვის ნაკლებია საწყისი სისტემის განზომილებებთან შედარებით [2,3].

განვიხილოთ მაგალითი, რომლიც გვაძლევს საშუალებას შევაფასოთ მართვის ოპტიმალური დისიპატიური სისტემების სინთეზის მეთოდის ეფექტურობა ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების კლასიკურ მეთოდთან შედარებით. მოვახდინოთ ობიექტის, რომელიც აღიწერება დიფერენციალური განტოლებათა სისტემით

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \dot{x}_2(t) = u \tag{5}$$

მართვის ოპტიმალური კანონის სინთეზი. ხარისხის კრიტერიუმს აქვს შემდეგ სახე:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt \tag{6}$$

ჩავწეროთ ძირითადი ფუნქციონალური განტოლება შემდეგი სახით:

$$\min_u \left[x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + u\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + u^2) \right] = 0 \tag{7}$$

(7) განტოლებაში მინიმუმი u-ს მიმართ მიიღწევა მაშინ, როცა

$$u = -\frac{\partial u}{\partial x_2}\quad . \tag{8}$$

(5) სისტემა, (8) ჩაკეტილი მართვით შეიძლება ჩავწეროთ სახით:

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \dot{x}_2(t) = -\frac{\partial v}{\partial x_2}. \tag{9}$$

(9) სისტემის დისიპატიურობა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - c = 0. \tag{10}$$

(10) განტოლების ინტეგრირებით მივიღებთ

$$v = \frac{1}{2}cx_2^2 + q_1(x_1)x_2 + q_2(x_1). \tag{11}$$

(11) ჩავსვათ (9)-ში, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$x_2^2\frac{dq_1}{dx_1} + x_2\frac{dq_2}{dx_1} - \frac{1}{2}c^2x_2^2 - cx_2q_1 - \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = 0. \tag{14}$$

(14) განტოლების მიმართ გამოვიყენოთ კოორდინატული ჩანაცვლების შემდეგი სახის პროცედურა

$$x_2^2 : \frac{dq_1}{dx_1} - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2} = 0 \tag{15}$$

$$x_2^1 : \frac{dq_2}{dx_1} - cq_1 = 0 \tag{16}$$

$$x_2^0 : -\frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 = 0 \tag{17}$$

ამოვხსნათ (17) განტოლება q_1-ის მიმართ, მივიღებთ

$$q_1 = \pm x_1 \tag{18}$$

დავუშვათ $q_1=x_1$, მაშინ (15)-დან მივიღებთ განტოლებას $c^2=3$, რომლის ამონახსნიც $c = \pm\sqrt{3}$. დავუშვათ $c = \sqrt{3}$, მაშინ (16)-დან მივიღებთ

$$q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1^2 + r \tag{19}$$

სადაც r – ერთგვარი კონსტანტაა, q_1, q_2-ის ჩასმით (13)-ში მივიღებთ

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2^2 + x_1x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1^2 + r \tag{20}$$

სასაზღვრო პირობიდან მივიღებთ, როცა $r = 0$. მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2^2 + x_1x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1^2 \tag{21}$$

მართვის ოპტიმალურ კანონს ექნება სახე:

$$u = -\sqrt{3}x_2 - x_1 \tag{22}$$

მიღებული (22) მართვის კანონი ზუსტად ემთხვევა [3] ლეტოვის მიერ მიღებულ კანონს.

3. დასკვნა

ამგვარად ოპტიმალური დისიპატიური სისტემების მართვის სინთეზის მეთოდს გააჩნია უპირატესობა ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტუირების (ОРАЗ)–ის კლასიკურ მეთოდთან შედარებით. რასაკვირველია ეს მიდგომა მოითხოვს შემდგომ განვითარებას მართვის სისტემების სხვადასხვა კლასებთან მიმართებაში [3].

ლიტერატურა:

1. გუგუშვილი ა., ხუროძე რ., იმედაძე თ., გარგი დ. მართვის თეორია. არაწრფივი სისტემები მე-2 ნაწ., სტუ, თბილისი. 1999

2. გუგუშვილი ა., ხუროძე რ., იმედაძე თ., გარგი დ. მართვის თეორია. სინერგეტიკა. მე-3 ნაწ., სტუ, თბილისი. 2000

3. Колесников А.А. Синергетическая теория уавления. М.: Энергоатомиздат, 2003

4. Kalman R.E. Contributions to the Theory of Optimal Control // Bullet. soc.Mat.Mech.1960.Vol.5, №1.

SOLUTION OF A PROBLEM OF ANALITICAL DESIGNING OF AN OPTIMUM REGULATOR SYNERGETICS METHODS

Sesadze Valida, Kekenadze Vladimer, Chikadze Gela,
Maglakelidze Nana

Georgian Technical University

Summary

In article it is considered synthesis closed optimum dissipatives control systems namely the problem of analytical designing of optimum regulators is solved by use synergetics methods. It is shown that at decisions of this problems a considerable and independent problem is criterion formation of corresponding qualities.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА МЕТОДАМИ СИНЕРГЕТИКИ

Сесадзе В., Кекенадзе В., Чикадзе Г., Маглакелидзе Н.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Расмотрен синтез замкнутых оптимальных диссипативных систем управления, а именно, проблема аналитического конструирования оптимальных регуляторов решена исползованием синергетических методов. Показано, что при решенний этой задачи значительной и независимой проблемой является формирование критерия соответствующего качества.