О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ СПЛАЙНОВ К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Векуа Т.П.
Грузинский Технический Университет

Резюме

С целью решения численным методом уравнений типа Вольтерра первого и второго рода, а также интегральных уравнений с ядром, имеющим слабую особенность, в работе проведена интегрирование по частям и на каждом локальном интервале искомая функция аппроксимирована линейным сплайном; на базе такого подхода получена рекурентная формула для вычисления промежуточных значений искомого решения, без аппроксимации ядра интегрального уравнения.

Ключевые слова: Линейные сплайни. Интегральные уравнения. Рекурентная формула. Уравнения Абеля, Вольтерра.

1. Введение

Современное развитие науки и техники тесно связано с использованием вычислительных методов решения широких классов задач. При этом важным элементом построения расчетной схемы является учет принадлежности искомого решения к классу функций, достаточно точно описываемых кусочно-линейными сплаинами.

Целесообразность такого подхода определяется также тем, что при такой аппроксимации искомого решения появляется возможность непосредственного вычисления промежуточных значений искомой функции без аппроксимации ядра интегрального уравнения.

Предложенный нами подход решения интегральных уравнений типа Вольтерра можно, очевидно, применять и к построению приближенных решений уравнений типа Абеля, уравнений с ядром, зависящим от разности аргументов (уравнений типа свертки), при обратном преобразовании Лапласа и в других случаях. Для этого достаточно указать способы построения приближенных решений, легко реализуемых на компьютерах.

2. Основная часть

Описанная ситуация гласит к рассмотрению приближенных решений весьма часто встречающейся интегральных уравнений типа Вольтерра.

К числу таких уравнений относится, например, обобщенное интегральное уравнение типа Вольтерра с ядром, имеющим слабую особенность:

$$\beta \cdot U(t) + \int_0^t \frac{H(t;\tau)}{(t-\tau)^\alpha} U(\tau) d\tau = f(t), \tag{1}$$

где β и $0 < \alpha < 1 -$ заданные постоянные, $f(t) -$ известная функция, а $U(t) -$ искомая функция.

Будем предполагать, что уравнение (1) разрешимо (однозначно), в $(a \le t \le b,\ \tau < t)$, а информация об функции f задана двояко: или «дискретно» множеством значений функции $f_i = f(t_i)$, $i = 0,1,2,\cdots,n$, $t_i = i \cdot h$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, или «непрерывно» $\delta -$ приближением к f, т.е. элементом $\tilde{f}$; $\left\| f - \tilde{f} \right\| \le \delta$.

Из уравнения (1) при $\beta = 0$ и $H(t;\tau) \equiv 1$ получаем, обобщенное уравнение Абеля

$$\int_0^t \frac{U(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = f(t), \tag{2}$$

принадлежающее к классу уравнений Вольтерра первого рода. Выражение $(t-\tau)^{-\alpha}$ является ядром интегрального уравнения Абеля.

Если $f(t)-$непрерывно дифференцируемая функция то интегральное уравнение (2) имеет единственное непрерывное решение представленной формулой [1]:

$$U(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \tag{3}$$

или, что то же самое, формулой

$$U(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right]. \tag{4}$$

Из теории интегральных уравнений [1] известно, что при $\alpha \geq \frac{1}{2}$ квадрат $\frac{H(t;\tau)}{(t-\tau)^\alpha}$ ядра не является интегрируемым, но тем не менее уравнение (1) может быть решено. В самом деле последовательное интегрирование ядря в силу подстановки становится, не только квадратом интегрируемым, но даже агран125иченным. Сумма ряда из таких функций есть непрерывная целая функция. Ее также называют разрешающим ядром или резольвентой для данного ядра, посттроенные которого требует конечное число шагом, которое приводит к уравнению Вольтерра с ограниченным ядром и непрерывной правой частью, решив которое, получим решение исходного уравнения (1). Аналогичное преобразование применяется также к интегральным уравнениям первого рода, в частности к интегральному уравнению Абеля (2), которое приводит к решению (4). Описанный классически подход решения интегральных уравнений позволяет сделать вывод о сложности промежуточных вычислений: как для итерированных ядер, а также при композиции (свертывания) обеих частей уравнения с ядром данного инотегрального уравнения.

С целью решения численным методом интегрального уравнения (1) для любой точки $t_k = kh$; $k = 0,1,2,\cdots,n$; имеем

$$\beta \cdot U_k + \int_0^{t_k} \frac{H(t_k;\tau)}{(t_k-\tau)^\alpha} \cdot U(\tau) d\tau = f_k \ . \tag{5}$$

где

$$U_k = U(t_k), \qquad f_k = f(t_k).$$

(5) перепишем в следующем виде:

$$\beta \cdot U_k + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{H(t_k;\tau)}{(t_k-\tau)^\alpha} U(\tau) d\tau = f_k \ . \tag{6}$$

Для $\tau \in [t_{i-1};t_i]$, заменяя искомую функцию $U(\tau)$ линейным сплайном

$$U(\tau) \approx U_{i-1} + \frac{U_i - U_{i-1}}{h}(\tau - t_{i-1}), \qquad \text{а} \qquad U'(\tau) \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{h}. \tag{7}$$

И проведя интегрирование по частям для интеграла

$$I_{i-1}^{i} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{H(t_k;\tau)U(\tau)}{(t_k-\tau)^{\alpha}} d\tau \qquad (8)$$

получим

$$I_{i-1}^{i} = -\frac{(t_k-\tau)^{1-\alpha} H(t_k;\tau)U(\tau)}{1-\alpha}\Bigg|_{t_{i-1}}^{t_i} + \frac{1}{1-\alpha}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_k-\tau)^{1-\alpha}\left[H'_\tau(t_k;\tau)U(\tau)+H(t_k;\tau)U'(\tau)\right]d\tau$$

вводя обозначение

$$K(t;\tau) = H'_\tau(t;\tau)(t-\tau)^{1-\alpha} \quad \text{и} \quad G(t;\tau) = H(t;\tau)(t-\tau)^{1-\alpha}, \qquad (9)$$

(8), путем несложных вычислений принимает вид

$$I_{i-1}^{i} = \frac{1}{1-\alpha}\left[h\cdot K(t_k;t_{i-1}) + G(t_k;t_{i-1}) - G(t_k;t_i)\right]\cdot U_i. \qquad (10)$$

Полагая (10) в (6) получим

$$\left[\beta\cdot(1-\alpha) + hK(t_k;t_{k-1}) + G(t_k;t_{k-1})\right]\cdot U_k +$$
$$+\sum_{i=1}^{k-1}\left[h\cdot K(t_k;t_{i-1}) + G(t_k;t_{i-1}) - G(t_k;t_i)\right]U_i = (1-\alpha)\cdot f_k = F_k.$$

Окончательно имеем

$$U_k = \frac{F_k - \sum_{i=1}^{k-1}\left[hK(t_k;t_{i-1}) + G(t_k;t_{i-1}) - G(t_k;t_i)\right]U_i}{\gamma_k}, \qquad (11)$$

$$k = 2,3,\cdots,n$$

где,

$$\gamma_k = \beta(1-\alpha) + hK(t_k;t_{k-1}) + G(t_k;t_{k-1}), \qquad (12)$$

при этом $U_0 = f(t_0)$, $U_1 = \dfrac{F_1}{\gamma_1}$.

В силу уравнения (1), при $\beta = 0$, $H(t;\tau)\equiv 1$, имеем $K(t;\tau)\equiv 0$, $G(t;\tau) = (t-\tau)^{1-\alpha}$, а также из (12) $\gamma_k = h^{1-\alpha}$, согласно (11) получаем решение интегрального уравнения Абеля (2) в следующем виде:

$$V_k = \frac{F_k - \sum_{i=1}^{k-1}\left[G(t_k;t_{i-1}) - G(t_k;t_i)\right]V_i}{h^{1-\alpha}}, \qquad (13)$$

$$k = 2,3,\cdots,n, \quad V_0 = f(t_0), \quad V_1 = \frac{F_1}{h^{1-\alpha}}.$$

При $\alpha = 0$, решением уравнения (2) будет

$$V(t) = f'(t), \qquad (14)$$

в силу (13) получаем, что решением того же уравнения (2) является

$$V_k = \frac{f_k - f_{k-1}}{h}, \qquad (15)$$

а формула (4) полученная Абелем из за неограниченности интеграла не дает определенного решения при $\alpha\to 0$.

Когда $\alpha\to 1$, из формулы (4) и (13) получаем одно и тоже решение

$$U(t) \approx V(t) \approx (1-\alpha) f(t). \qquad (16)$$

При $\beta = 1$ и $\alpha = 0$, из (1) получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода, решение которого получается из формулы (11) в следующем виде [2; 3]

$$V_k = \frac{f_k - h \cdot \sum_{j=1}^{k-1} H(t_k; t_{j-1}) V_j}{\gamma_k}, \qquad V_0 = f(t_0), \qquad V_1 = \frac{f_1}{\gamma_1}. \qquad (17)$$

где $\gamma_k = \beta + hH(t_k; t_{k-1})$;

а при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, из (17) получаем решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода с ядром $H(t;\tau)$; [4]

$$\int_0^t H(t;\tau) V(\tau) d\tau = f(t). \qquad (18)$$

3. Численные результаты

В работе [5] доказана существование и единственность интерполирующих сплайнов для решения операторных уравнений первого рода. В нашем случае аппроксимация искомой функций линейным-сплайном дает возможность решения любого уравнения Волтеровского типа. Тем самым на основе [5] обосновывается предлагаемый нами подходов решения интегральных уравнений типа Вольтерра.

Приведем несколько примеров применения предложенного метода к численному решению интегральных уравнений.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Вольтерра второго рода (1). Случай: $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $H(t;\tau) = t + \tau$ и $f(t) = -\frac{t^2}{3}\cos 6t + \frac{13t}{12}\sin 6t - \frac{1}{54}\sin^2 3t$, тогда точное решение (1) есть $y(t) = t \sin 6t$ при этом $h = 0.001$, $0 \le t \le 2$. График функции $y(t)$ изображен на рис.1 сплошной линией, а результаты, полученные по формуле (17) изображена точками.

Пример 2. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода (1) ядром имеющим слабую особенность: $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $H(t,\tau) = t + \tau$, при $f(t) = t^2 - 2t + \frac{t^2\sqrt{t}(208t - 504)}{105}$, точным решением (1) является функция $y(t) = t^2 - 2t$.

График функции $y(t)$ изображен на рис.2 сплошной линией, а результаты, полученные по рекурентной формуле (11) изображены точками. При этом $h = 0.001$.

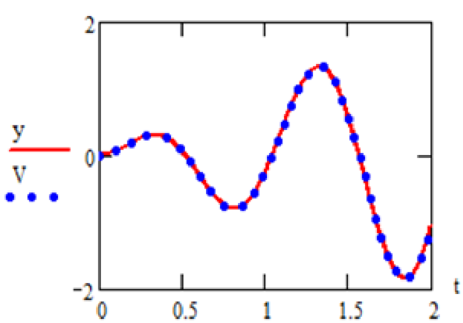

Рис. 1

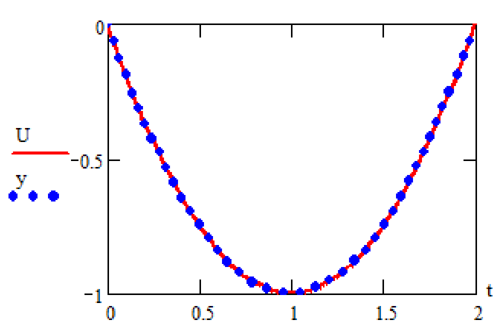

Рис. 2

Пример 3. При $\beta = 0$ и $H(t;\tau) \equiv 1$, решение уравнений Абеля (2), полученные по формулам (4) и (13) изображены на Рис.3, при этом $\alpha = 0.75, f(t) = \int_0^t \sin(4x)/x dx$,h=0.001

Для того же $f(t)$ и $\alpha = 0.3$ формула (4) не дает решения, так как результаты полученные по формуле (13) изображена на рис.4.

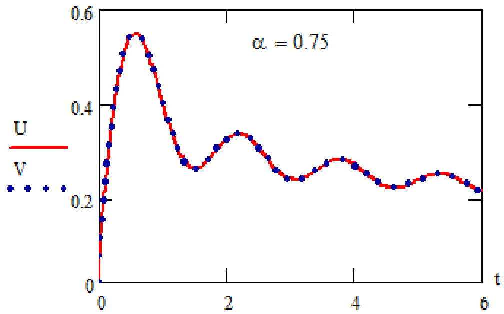

Рис. 3

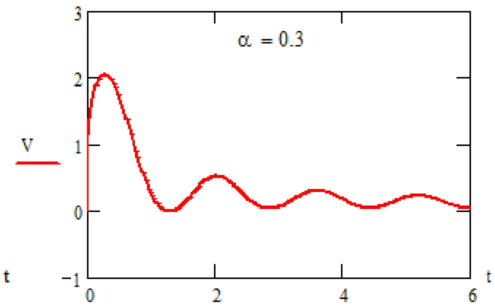

Рис. 4

4. Заключение

Предложенный подход решения интегральных уравнений дает возможность решения уравнений типа Вольтерра с ядром, имеющим слабую особенность, для любого $0 \le \alpha \le 1$. Можно отметить, что решение ряда естественно-научных задач, приводимых к решению уравнениям первого рода, обладают обычным свойствам корректно поставленных задач, т.е. устойчивостью метода их решения по отношению к малым возмущениям правой части $f(t)$. Это явление «саморегуляризации». Отмеченной чертой уравнений вида (2), для которых имеет место саморегуляризация, является наличие δ-образности его ядра. В этом случае, при выборе малого шага h аппроксимации приближенного решения интегральных уравнений становится возможным при применении линейных сплайнов, позволяющие отфильтровать решения паразитного вида и представляющие возможность рассмотреть вопросы о численном решении интегральных уравнений в предположениях, естественных для практических задач (формулы (11), (13) и (17)).

Литература:

1. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Москва, 1975
2. Векуа Т.П. Численный метод решения линейных обратных задач инженерной сейсмологии и теории сейсмостойкости // Реферативный сборник «Сейсмостойкое строительство, отечественный и зарубежный опыт», вып. 8. Москва, 1975, с. 37-41.
3. Векуа Т.П. Численный метод решения некоторых интегральных уравнений. Международный научный журнал «Проблемы механики», № 3(28), 2007, с. 85-89.
4. Векуа Т.П. О численном решении интегральных уравнении типа Вольтерра. Transactions, Georgian Technical University, Automated Control Systems, № 2(7). 2009, pp.244-247.

5. Морозов В.А. О некоторых применениях метода сплайнов к решению операторных уравнений первого рода // ДАН т. 229, № 2, 1976, с. 300-303.

ON NEW APPLICATIONS OF LINEAR SPLINES FOR SOLUTION OF INTEGRAL EQUATION

Vekua T.P.

Georgian Technical University

Summary

In the work with the purpose of solution by numerical methods of Volterra type equation of first and second order as well as integral equations with core, having weak singularities was carried out partially integration, on the each local interval the desired function is approximated by linear spine, on the basis of such approach is obtained recurrent formula for calculation of intermediate values of desired solution, without approximation of integral equation core.

ინტეგრალური განტოლების ამოხსნა წრფივი სპლაინ ფუნქციების გამოყენებით

თამაზ ვეკუა

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზუმე

განიხილება ვოლტერას ტიპის პირველი და მეორე გვარის და ასევე მცირე სინგულარობის მქონე ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის საკითხი. ამ მიზნით ინტეგრების შუალედი დაყოფილია ლოკალურ ინტერვალებად და ამ ინტერვალებში საძებნი ფუნქცია შეცვლილია წრფივი სპლაინ ფუნქციებით, რის საფუძველზეც მიღებულია რეკურენტული ფორმულები საძებნი ფუნქციის შუალედური მნიშვნელობების გამოსათვლელად.