დროითი რიგების ანალიზი ჰერსტის მაჩვენებლით

ქეთევან კოტრიკაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

დროითი რიგების შესაფასებლად ფართოდ გამოიყენება ჰერსტის მეთოდი. იგი შესაძლებელობას იძლევა მოხერხდეს შემთხვევითი დროითი რიგების ერთგვარი კლასიფიკაცია. შემთხვევითი დროითი რიგები მრავლადაა, როგორც ბუნებაში, ასევე ეკონომიკაში, ფიზიკაში, ქიმიაში, ბოლოგიაში და სხვა. ჰერსტის მაჩვენებელის მიხდვით შეიძლება განვსაზღვროთ, თუ როგორი სახის დროით რიგთან გვაქვს საქმე: პერსისტენტულთან, ანუ ტრენდის მიმართ მდგრად დროით რიგთან, თუ ანტიპერსისტენტულთან. ამგვარად, ჰერსტის მაჩვენებლი გარკვეული პროგნოზირების საშუალებას იძლევა.

საკვანძო სიტყვები: ჰერსტის მაჩვენებელი. პერსისტენტული. ანტიპერსისტენტული. დროითი რიგი. ფრაქტალი. სინერეგეტიკა. კორელაცია.

1. შესავალი

თანამედროვე მეცნიერებაში გაჩნდა ახალი მიმართულება ,,სინერგეტიკა''. სინერგეტიკული ანუ თვითორგანიზებადი სისტემების მაგალითები მრავლადაა ბუნებაში, ეკონომიკაში, ფიზიკაში, ბიოლოგიაში და სხვა. მეცნიერების ეს მიმართულება განიხილავს ისეთ მოვლენებს, როგორიცაა არაწრფივობა, არამდგრადობა, ბიფურკაცია და ქაოსი სხვადასხვა სახის სისტემებში [1]. სინერგეტიკული სისტემების კვლევისას, მნიშვნელოვანია დროითი რიგების კვლევა. კერძოდ, შეფასდეს დროითი რიგი იმისდამიხედვით, თუ რამდენად მდგრადია იგი ტრენდის მიმართ.

ინგლისელმა მეცნიერმა ჰ. ჰერსტმა გადაწყვიტა შეესწავლა ეს პრობლემა. მან შეიმუშავა ახალი სტრატეგია ჰერსტის მაჩვენებელი – H. ეს მაჩვენებელი ფართოდ გამოიყენება დროითი რიგების შესაფასებლად. კერძოდ, ჰერსტის მაჩვენებლის მიხედვით შეგვიძლია განვასხვავოთ შემთხვევითი და არაშემთხვევითი დროითი რიგები.

2. ძირითადი ნაწილი.

ჰერსტის მაჩვენებელი ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა სახის დროითი რიგების შესაფასებლად [2,3]. თავად ასეთი შეფასების მეთოდოლოგია შემუშავებული იქნა გასული საუკუნის 40-იან წლებში, ცნობილი ინგლისელი ჰიდროლოგის ჰ. ჰერსტის მიერ, რომელიც მუშაობდა ნილოსის კაშხალის მშენებლობაზე. იგი იკვლევდა წყლის დონის ცვლილებას რეზერვუარში. მთავარი ამოცანა ჰერსტისთვის მდგომარეობდა რეზერვუარში ოპტიმელური წყლის დონის შენარჩუნებაში. კერძოდ, რეზერვუარი არც უნდა გადავსებულიყო და არც დაცლილიყო. ყოველივე ეს კი დამოკიდებული იყო ნილოსიდან წყლის შენაკადებზე ანუ აბსოლუტურად შემთხვევით ეკზოგენურ (გარე) მოვლენაზე.

მოდელის კვლევისას ჰერსტმა შეიმუშავა ზოგადი კონცეფცია, რომლის თანახმადაც წყლის ნაკადების რაოდენობა მიჰყვება ე.წ. შემთხვევით გადახრებს. ეს ჩვეულებრივი წინაპირობაა ყველა დიდი სისტემისთვის, რომელთაც მაღალი თავისუფლების ხარისხი აქვს [2].

ჰერსტმა გადაწყვიტა შეესწავლა ეს პრობლემა და შემოიტანა ჰერსტის მაჩვენებელი – H. იგი შეიცავს შესასწავლ სისტემაზე მინიმალურ დაშვებებს და შესაძლებელს ხდის დროითი რიგების კლასიფიცირებას. ჰერსტის მაჩვენებლის მიხედვით შეგვიძლია განვასხვავოთ პერსისტენტული და ანტიპერსისტენტული დროითი რიგები.

ჰერსტმა აჩვენა, რომ უმეტესობა მოვლენებისა: მდინარეში წყლის ნაკადები, ნალექები, ტემპერატურა და სხვა ბუნებრივი მოვლენები მიჰყვება ე.წ. შემთხვევით გადახრებს. მოგვიანებით აღმოჩნდა, რომ ეკონომიკაში, მაგალითად, აქციათა, ვალუტის კურსები და სხვა, ასევე მისდევდა შემთხვევით გადახრებს და მათი შეფასებაც შესაძლებელი იყო ჰერსტის მაჩვენებელით.

დროთი რიგების კვლევისას, ზოგადად, გადახრების (ფლუქტუაციების) დიაპაზონი შეიცვლება იმისდამიხედვით, თუ რა დროის მანძილზე ხდება დაკვირვება. რაც უფრო დიდი დრო გავა, მით უფრო მეტი იქნება ე.წ. გაქანება. კერძოდ, იგი შეიცვლება $\sqrt{T}$-ს პირდაპირპროპორციულად (T დროა). მოცემული დროითი რიგების შესაფასებლად ჰერსტმა შემოიტანა განსხვავებული მიდგომა – R/S ანალიზი, სადაც R არის გაქანება ანუ განვლილი მანძილი, ხოლო $S-$ სტანდარტული გადახრა. ამ მეთოდს სხვანაირად ნორმირებული გაქანების მეთოდსაც უწოდებენ [?] .

არსებობს ჰერსტის მაჩვენებლის შემდეგი კლასიფიკაცია: 1) H=0,5; 2) $0 \le H$<0,5; 3) 0,5<H< 1.

თუ H=0.5, მაშინ გვაქვს შემთხვევითი დროითი რიგი, მოვლენები არის არაკორელაციური. აღსანიშნავია, რომ კორელაციასა და ჰერსტის მაჩვენებელს შორის არსებობს შემდეგი სახის დამოკიდებულება [?]:

$$C = 2^{2H-1} - 1, \qquad (1)$$

სადაც H - ჰერსტის მაჩვენებელია, C – კორელაცია. აქედან გამომდინარე, თუ H=0.5, მაშინ C=0. ანუ ამ შემთხვევაში დღევანდელობა ვერ ახდენს ზეგავლენას მომავალზე. როგორც წესი, სტატისტიკის თეორიაში არსებობს დაშვება, რომლის თანახმადაც ყველა ბუნებრივი მოვლენა მისდევს ნორმირებულ განაწილებას [?]. ჰერსტის აღმეჩენამ ეს თეორია უარყო. H=0,5 არ არის ნორმირებული განაწილება.

მეორე ვარიანტია $0 \le H$<0,5. დიაპაზონი შეესაბამება ანტიპერსისტენტულ დროით რიგს. ზოგადად, პერსისტენტული ნიშნავს ხანგრძლივად არსებულს, დიდი დროის მანძილზე მოქმედს. გასაგებია, რომ ანტიპერსისტენტული პერსისტენტულის საპირისპიროა. ანტიპერსისტენტული დროითი რიგის შემთხვევაში, თუ სისტემა წინა პერიოდში გვიჩვენებდა პარამეტრების ზრდის ტენდენციებს, მაშინ მომდევნო პერიოდში აუცილებლად იწყება პარამეტრების კლების ტენდეცია და პირიქით, თუ იყო პარამეტრების კლების ტენდენცია წინა პერიოდში, მას აუცილებლად მოჰყვება პარამეტრების ზრდის ტენდენცია. ასეთი ანტიპერსისტენტული დროითი რიგის მდგრადობა დამოკიდებულია იმაზე, თუ რამდენად ახლოსაა H 0-თან. თუ H ახლოსაა 0-თან, მაშინ C=-0,5 ანუ ამ შემთხვევაში გვაქვს

უარყოფითი კორელაცია. ასეთი დროითი რიგი გაცილებით ცვალებადია, ვიდრე სხვა შემთხვევითი დროითი რიგი, რადგან შედგება ხშირი რევერსებისგან ანუ ცვლილებებისგან (აღმასვლა-დაღმასვლა). როგორც წესი, ასეთი დროითი რიგები არც ეკონომიკაში, არც ფინანსებში, არც ბუნებაში თითქმის არ მოიძებნაბა.

თუ 0,5< H <1, მაშინ საქმე გვაქვს პერსისტენტულ დროით რიგთან ანუ გვაქვს ტრენდის მიმართ მდგრადი დროითი რიგი. (trend – ტენდენცია, საერთო მიმართულება). თუ დროითი რიგის პარამეტრები იზრდება წინა პერიოდში, მაშინ ის ამ ტენდენციებს შეინარჩუნებს გარკვეული პერიოდის განმავლობაში. პერსისტენტულობის ძალა ანუ ტრენდის მიმართ მდგრადობა უფრო იზრდება, რაც უფრო H უახლოვდება 1-ს ანუ კორელაცია ამ შემთხვევაში არის თითქმის 100%. თუ H =1 (1) ფორმულაში C =1. რაც ურფო ახლოსაა H 0,5-თან, მით უფრო ხმაურიანია დროითი რიგი და ტრენდი ნაკლებადაა გამოსახული.

პერსისტენტული დროითი რიგი, რომელიც განისაზღვრება ინტერვალით 0,5< H <1, წარმოადგენს ფრაქტალს, რადგანაც ის არის განზოგადებული ბროუნის მოძრაობაც. განზოგადებულ ბროუნის მოძრაობაში არსებობს კორელაცია მოვლენებს შორის, რომელიც მიმდინარეობს გარკვეულ დროით ინტერვალში. ამის შედეგად ალბათობა იმისა, რომ ორი მოვლენა შეიძლება იყოს ერთნაირი არის 50/50-ზე. ჰერსტის მაჩვენებელი აღწერს ისეთ ალბათობას, როდესაც ორი ერთმანეთის მიყოლებით მიმდინარე მოვლენა შეიძლება იყოს ერთნაირი. თუ H =0.6, მაშინ არსებობს დიდი ალბათობა იმისა, რომ თუ წინა პერიოდში იყო რაღაც პარამეტრების გარკვეული დადებითი მოძრაობა, მაშინ ასეთი მოძრაობა შენარჩუნდება გარკვეული დროის მანძილზე. ასეთი დროითი რიგის ფრაქტალური განზომილება მარყეობს 1-დან 2-მდე. პერსისტენტული დროითი რიგები გაცილებით საინტერესო კლასებს მიეკუთვნება, რადგანაც ასეთი დროითი რიგები აღმოჩენილია, როგორც ბუნებაში, ასევე დამახასიათებელია კაპიტალის ბაზრებისთვისაც.

ჰერსტის მაჩვენებელის გამოთვლა შესაძლებელია ვალუტის კურსისთვის. მაგალითად, „დოლარი-ლარის" კურსისათვის ჰერსტის მაჩვენებელის გამოთვლის თანმიმდევრობა შემდეგია:

დავუშვათ, შემთხვევითი სიდიდეების დაკვირვება ხდება დროის დისკრეტულ მომენტებში: $i = 1,2,3,...k$ და აქვს მნიშვნელობები: $e_1, e_2, e_3, ...e_k$. დაკვირვებათა ინტერვალი დავყოთ რამდენიმე ქვეინტერვალად და ყოველი მათგანისთვის გამოვთვალოთ შემდეგი პარამეტრები [2,3].

თუ დაკვირვებათა რიცხვი თითოეულ ინტერვალში არის N, მაშინ ასეთ ინტერვალთა რაოდენობა $n = k/N$. იგულისხმება ის რომ, N უნდა შეირჩეს ისე, რომ k/N თანაფარდობა იყოს ნატურალური.

ყოველი ინტერვალისთვის ვპოულობთ დაგროვილ გადახრებს:

$$X_{1,N} = \sum_{U=1}^{N} (e_U - M_k). \tag{2}$$

მაგალითისთვის შევარჩიოთ ვალუტის კურსი 300 დღისთვის. დაკვირვებათა ინტერვალი, იყოფა 30 დღიან ინტერვალად. ინტერვალთა რაოდენობა კი n=10, ხოლო N=30 დღე. თითოეული ინ-

ტერვალისთვის ვითვლით სწორედ X-ს (2) ფორმულით. ცხრილი 1-ში მოცემულია ვალუტის კურსის ერთი მცირე მონაკვეთი.

ცხრ.1

დოლარი/ლარის კურსი

თარიღი	$	დოლარი	ლარი	1 დოლ/ლარი
20.01.1997	USD	100	128,3	1,283
27.01.1997	USD	100	128,5	1,285
03.02.1997	USD	100	128,7	1,287
10.02.1997	USD	100	128,7	1,287
17.02.1997	USD	100	128,7	1,287

(2) ფორმულაში $M_k = \frac{\sum_1^k e_U}{k}$ არის e_U-ს საშუალო მნიშვნელობა, რომელიც მიიღება k დაკვირვებების დროს. გაქანების სიდიდე e_U შემთხვევითი სიდიდისთვის $2N$ დროითი ინტერვალისთვის:

$$R_{2N} = X_{\max 1} - X_{\min 1}, \tag{3}$$

სადაც მაგ: $X_{\max 1}$ არის მაქსიმალური მნიშვნელობა $X_{1,N}$ $X_{N+1,2N}$-ს შორის. $X_{\min 1}$ არის მინიმალური მნიშვნელობა $X_{1,N}$ და $X_{N+1,2N}$-ს შორის. გაქანება ინტერვალისთვის $3N$ მიიღება ისევ (3) ფორმულიდან, მხოლოდ ამ შემთხვევაში:

$$X_{\max 2} = \max \{ X_{1,N},\ X_{N+1,2N},\ X_{2N+1,3N} \},\ X_{\min 2} = \min\{ X_{1,N},\ X_{N+1,2N},\ X_{2N+1,3N} \}.$$

ანალოგიურად, ვპოულობთ გაქანებას ინტერვალებისთვის, რომელთა სიგრძეა *4N, 5N, . . . ,nN*.

ჰერსტის იმიტაციის მეთოდისათვის ვიყენებთ სტანდარტული გადახრის მცნებას, რომელიც გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$S_{2N} = \sqrt{\frac{\sum_1^{2N} (e_U - M_k)^2}{2N - 1}}, \tag{4}$$

არსებობს შემდეგი თანაფარდობა:

$$\frac{R}{S} = (a \cdot N_0)^H. \tag{5}$$

(5) ფორმულა არის ჰერსტის იმიტაციური მოდელის მახასიათებელი. R/S – ნორმირებული გაქანებაა. N_0 – დაკვირვებათა რიცხვია. $N_0 = i \cdot N$, სადაც $i = 2,3,\ldots,n$. a – კონსტანტაა, H – ჰერსტის მაჩვენებელია.

ჰერსტის მაჩვენებლის შესაფასებლად გავალოგარითმოთ (5) ფორმულის ორივე მხარე:

$$\lg(R/S) = H(\lg a + \lg N_0). \tag{6}$$

მიღებული ტოლობა არის წრფის განტოლება სიბრტყეში ($\lg N_0$; $\lg(R/S)$), რომლის დახრის კუთხე განისაზღვრება ჰერსტის მაჩვენებლით.

N_0-ის და R/S-ის ორი მნიშვნელობისთვის (6) განტოლების მიხედვით შესაძლებელია შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} H(\lg a + \lg N_{01}) = L_1 \\ H(\lg a + \lg N_{02}) = L_2 \end{cases} \quad . \tag{7}$$

(7) სისტემიდან გამოვითვალოთ a-ს და H-ის მნიშვნელობები:

$$a = 10^{\frac{L_1 \lg N_{02} - L_2 \lg N_{01}}{L_2 - L_1}} \quad (8) \quad \text{და} \quad H = \frac{L_2 - L_1}{\lg N_{02} - \lg N_{01}} \quad . (9)$$

გამოთვლების შედეგები მოცემულია ცხრილი 2-ში:

ცხრილი 2

		X max	X min	R	S	R/S	lg(R/S)	lgN0
X_{1-30}	-0,30162	-0,27412	-0,30162	0,0275	0,02828707	0,972176	-0,01226	1,778151
X_{31-60}	-0,27412	-0,16412	-0,30162	0,1375		4,860878	0,686715	1,954243
X_{61-90}	-0,16412	0,32398	-0,30162	0,6256	0,017870255	35,00789	1,544166	2,079181
X_{91-120}	0,32398	0,41588	-0,30162	0,7175		40,15052	1,603691	2,176091
$X_{121-150}$	0,41588	0,41588	-0,30162	0,7175	0,008745751	82,03984	1,914025	2,255273
$X_{151-180}$	-0,2927	0,89188	-0,30162	1,1935		136,4663	2,135025	2,322219
$X_{181-210}$	0,89188	1,16668	-0,30162	1,4683	0,017183551	85,44799	1,931702	2,380211
$X_{211-240}$	1,16668	1,26958	-0,30162	1,5712		91,43628	1,961119	2,431364
$X_{241-270}$	1,26958	1,30888	-0,30162	1,6105	0,025110197	64,13729	1,807111	2,477121
$X_{271-300}$	1,30888						a=0,016487;	H=0.026.

გამოთვლების შედეგად, H – ჰერსტის მაჩვენებელი მოთავსებულია შუალედში: $0 \le H < 0,5$ (H=0.026), რაც იმას ნიშნავს, რომ გამოკვლეული დროითი რიგის მოცემული ინტერვალი ანტიპერსისტენტულია.

3. დასკვნა

ჰერსტის მაჩვენებელი მოცემული კონკრეტული შემთხვევის შეესაბამება ანტიპერსისტენტულ დროით რიგს. წესით, უნდა მიგვეღო პერსისტენტული დროითი რიგი, ვინაიდან ვალუტის კურსის შემთხვევაში საქმე გვაქვს შეთხვევით გადახრებთან. H=0.026 - გამოთვლების ასეთი შედეგი, სავარაუდოდ, გამოწვეულია გამოსაკვლევი ინტერვალის სიმოკლით, მაშინ როცა ჰერსტმა თავისი კვლევებისას გამოიყენა, არა მარტო მის მიერ 40 წლის მანძილზე აღებული მონაცემები, არამედ მანამდე არსებული ინფორმაციაც ნილოსის ნაკადების შესახებ. ეს ინფორმაცია მოიცავდა ინტერვალს 622 ჩვ. წ. აღ.-დან 1469 წლამდე.

ლიტერატურა:

1. Занг В. Б. Синергетическая экономика, Москва, изд. Мир, 1999
2. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала, Москва, изд. Мир, 2000
3. Петерс Э. Фракталный анализ финансовых рынков, Москва, изд. Интернет-Трейдинг, 2004

THE ANALYSIS OF TIME SERIES USING THE HURST METHOD

Kotrikadze Ketevan

Georgian Technical University

Summary

In order to assess the time series, Hurst Method is widely applied. This method secures the opportunity for the classification of the random time series. There are many examples of random time series in nature: Economics, Physics, Chemistry, Biology, etc. Hurst index can be used to determine the type of time-series: persistent or steady trend; time-series or anti persistent, i.e. Hurst index enables a definite forecasting.

АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ПОМОЩЬЮ ПОКАЗАТЕЛЬЯ ХЁРСТА

Котрикадзе К.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Для оценки временных рядов широко используеться метод Хёрста. Данный метод даёт возможность классифицировать случайные временные ряды. Примеров случайных временных рядов множество как в природе, так и в Экономике, в Физике, в Химии, в Биологии и т.д. С помощью показателья Хёрста можно определить, какой временной ряд мы имеем: персистентный или трендоустойчивый временной ряд или антиперсистентный, т.е. показатель Хёрста даёт возможность некоьего прогнозирования.