Transactions. Georgian Technical University. AUTOMATED CONTROL SYSTEMS - No 2(7), 2009

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ M/M/1/2+ И ВОПРОСЫ ЕЁ ОПТИМИЗАЦИИ

Какубава Р.(И.), Гулуа Д.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассмотрена резервированная техническая система с приоритетом замещения. Построена стохастическая модель системы M/M/1/3 с учётом длительности замещения отказавшего элемента системы. Получены численные значения параметров состояния систем M/M/1/(2,3,4,5) и вычислены их экономический критерии.

Ключевые слова: Приоритетная система очередей. Резервирование. Замещение. Всстановление. Экономическая эффективность.

1. Введение

В начале 90-х годов прошлого столетия шведские специалисты, по поручению Международного Союза Электросвязи (МСЭ), разработали рекомендацию E.862 «Надежностное планирование телекоммуникационных сетей». В указанной рекомендации, из двух возможных подходов к надежностному планированию – интуитивному и аналитическому, предпочтение вполне убедительно отдается – аналитическому [1]. Особое внимание уделяется аналитическим моделям сложных резервированных систем. Рекомендуется применение аналитических методов в класической теории резервирования, а также разработка новых методов, с учетом тех факторов, которые являются существенными для современных технических систем, в частности – телекоммуникационных. Одним из наиболее важных факторов такого типа является учет длительности замещения отказавших элементов в резервированных системах. Вместе с тем активность зарубежных ученных и специалистов в данном направлении пока не наблюдается.

Однако в последние годы, благодаря исследованиям, проведенным группой ученных Грузинского технического университета, изучение вопросов сложных многоэлементных резервированных систем, значительно продвинулось. В частности, построены и частично исследованы различные модели с учетом длительности замещения [2-5] .

Отметим, что построение и исследование моделей для определения вероятностных характеристик $p_{i,j}$ не представляет собой самостоятельного интереса. Эти результаты являются предпосылкой для решения практических задач, к примеру, методов определения параметров надёжности или экономической эффективности функционирования различных систем.

2.Основная часть

Рассмотрим техническую систему состоящую из m основных и n резервных элементов. Все элементы идентичны. Для нормального функционирования системы, необходимо поддерживать все m основные элементы в рабочем состоянии. Система продолжает функционировать и в случае сокращения количества основных элементов, но эффективность функционирования системы падает. В результате необходимо обратиться к резервному элементу и осуществить замещение вышедшего из строя основного элемента резервным. Интенсивность отказа основного элемента α, а резервного - β. Отказавший основной элемент заменяется работоспособным резервным элементом при первой же возможности. При этом интенсивность замещения равна λ. Если в системе нет необходимости осуществить замещение (все m основных элемента в рабочем состоянии) происходит восстановление отказавших элементов. Интенсивность восстановления элемента принимается равным μ.

Подчеркнем некоторые особенности описанной системы: 1) не предполагается мгновенное замещение отказавшего основного элемента резервным; 2) предполагается абсолютный приоритет замещения, т.е. при необходимости замещения всякое восстановление элемента прерывается и осуществляется замена основного резервным. При этом прерванное восстановление начинается заново.

Процесс функционирования системы опишем функциями p(i,j,t) - вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии $s_{i,j}$.

Рассмотрим подробнее случай, когда количество основных элементов системы m=2, а количество резервных элементов n=1. Придадим t малое приращение h и найдем вероятность p(i,j,t+h) того, что за время h система перейдет в состояние $s_{i,j}$. Используя формулу полной вероятности, запишем уравнения для вероятности p(i,j,t+h) (i=$\overline{0,2}$, j=$\overline{i,i+1}$):

$$p(0,0,t+h)=p(0,0,t)(1-2\alpha h)(1-\beta h)+p(0,1,t)\mu h(1-2\alpha h)$$

$$p(0,1,t+h)=p(0,1,t)(1-2\alpha h)(1-\mu h)+p(0,0,t)\beta h(1-2\alpha h)+p(1,1,t)\lambda h)(1-\alpha h)(1-\beta h)$$

$$p(1,1,t+h)=p(1,1,t)(1-\alpha h)(1-\beta h)(1-\alpha h)+p(0,0,t)2\alpha h(1-\beta h)+p(1,2,t)\mu h(1-\alpha h)$$

$$p(1,2,t+h)=p(1,2,t)(1-\alpha h)(1-\mu h)+p(0,1,t)2\alpha h(1-\mu h)+p(1,1,t)\beta h(1-\alpha h)(1-\lambda h)+p(2,2,t)\lambda h)(1-\beta h)$$

$$p(2,2,t+h)=p(2,2,t)(1-\beta h)(1-\lambda h)+p(1,1,t)\alpha h(1-\beta h)(1-\lambda h)+p(2,3,t)\mu h$$

$$p(2,3,t+h)=p(2,3,t)(1-\mu h)+p(2,2,t)\beta h(1-\lambda h)+p(1,2,t)\alpha h(1-\mu h)$$

Из этих уравнении, устремляя h к нулю, получаем систему дифференциальных уравнения:

$$\frac{d}{dt}p(0,0,t) = -p(0,0,t)(2\alpha+\beta)+p(0,1,t)\mu;$$

$$\frac{d}{dt}p(0,1,t) = -p(0,1,t)(2\alpha+\mu)+p(0,0,t)\beta+p(1,1,t)\lambda$$

$$\frac{d}{dt}p(1,1,t) = -p(1,1,t)(\alpha+\beta+\lambda)+p(0,0,t)2\alpha+p(1,2,t)\mu$$

$$\frac{d}{dt}p(1,2,t) = -p(1,2,t)(\alpha+\mu)+p(0,1,t)2\alpha+p(1,1,t)\beta+ +p(2,2,t)\lambda$$

$$\frac{d}{dt}p(2,2,t) = -p(2,2,t)(\beta+\lambda)+p(1,1,t)\alpha+p(2,3,t)\mu$$

$$\frac{d}{dt}p(2,3,t) = -p(2,3,t)\mu+p(2,2,t)\beta+p(1,2,t)\alpha$$

Рассмотрим вопрос финальных вероятностей, т.е. вероятностей $p_{i,j}=\lim\limits_{t\to\infty} p(i,j,t)$. Число состояний рассматриваемой системы конечно и из каждого состояния, за конечное число шагов возможен переход в любое другое состояние. Как известно, этого достаточно для существования финальных вероятностей. Так как при этом $\frac{d}{dt}p(i,j,t)=0$, для определения $p_{i,j}$ (финальных вероятностей, уже не зависящих от t) получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$(-2\alpha-\beta)\,p_{0,0}+\mu\,p_{0,1}=0$$

$$\beta\,p_{0,0}+(-2\alpha-\mu)\,p_{0,1}+\lambda\,p_{1,1}=0;$$

$$2\alpha\,p_{0,0}+(-\alpha-\beta-\lambda)\,p_{1,1}+\lambda\,p_{1,2}=0$$

$$2\alpha\,p_{0,1}+\beta p_{1,1}+(-\alpha-\mu)\,p_{1,2}+\lambda\,p_2=0$$

$$\alpha\,p_{1,1}+(-\beta-\lambda)\,p_{2,2}+\mu\,p_{2,3}=0$$

$$\alpha\,p_{1,2}+\beta\,p_{2,2}-\mu\,p_{2,3}=0$$

Как видим, получается однородная система. Для ее решения необходимо воспользоваться нормирующим условием $\sum\limits_{i=0}^{2}\sum\limits_{j=i}^{i+1}p_{i,j}=1$, после чего трудности ее решения носят чисто вычислительный характер.

Рассмотрим вопрос экономической эффективности системы. В качестве целевой функции введем показатель экономической эффективности:

$$F(m,n)=(r_1-c_1)E_1+(r_2-c_2)E_2$$

Здесь: r_1- доход в единицу времени от одного работоспособного (РС) основного элемента; r_2 - доход в единицу времени от одного РС резервного элемента; c_1- затраты в единицу времени на одного РС основного элемента; c_2 - затраты в единицу времени на одного РС резервного элемента; c_3 - затраты в единицу времени на одного неработоспособного (НРС) резервного элемента; c_4 - затраты в единицу времени на одного работающего органа восстановления (ОВ); c_5 - затраты в единицу времени на одного работающего органа замещения (ОЗ); c_6 - затраты в единицу времени на одного не работающего органа замещений и восстановлений (ОЗВ);

Обозначим $E_i = E_i(m,n)$, где E_1 – среднее количество РС основных элементов; E_2 – среднее количество РС резервных элементов; E_3 – среднее количество НРС резервных элементов; E_4 –среднее количество работающих ОВ; E_5 –среднее количество работающих ОЗ; E_6 – среднее количество не работающих ОЗВ. Для рассматриваемого случая (m=2, n=1), определяем:

$E_1 = p_{1,1}+p_{1,2}+2p_{0,0}+2p_{0,1}$; $\quad E_2 = p_{0,0}+p_{1,1}+p_{2,2}$

$E_3 = 3-(E_1+E_2)$; $\quad E_4 = p_{0,1}+p_{1,2}+p_{2,3}$

$E_5 = p_{1,1}+p_{2,2}$; $\quad E_6 = 1-(E_4+E_5)$

Учитывая полученные формулы, для значений параметров

$\alpha = 0.002$; $\beta = 0.001$; $\lambda = 2$; $\mu = 1$.

r1 = 5; r2 = 2; c1 = 1; c2 = 0.3; c3 = 0.01; c4 = 10; c5 = 2; c6 = 0.7.

получаем численные значения для вероятностей $p_{i,j}$, средных E_i и экономический показатель F(2,1):

$p_{0,0}$	$p_{0,1}$	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$p_{2,2}$	$p_{2,3}$
0.993011	0.004965	0.001996	2.58E-05	2.02E-06	5.37E-08

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
1.997974	0.995009	0.007017	0.004991	0.001998	0.993011

F(2,1) = 8.934328

Аналогично вышеприведённым рассуждениям построены модели и получены численные значения для вероятностей $p_{i,j}$, средных E_i и экономические показатели F(2,0), F(2,2), F(2,3) для значении n=0,2,3 соответственно. А именно имеем:

F(2,0)= 7.238851, F(2,2)= 8.923353262, F(2,3)= 12.3123125.

3. Заключение

Построена модель для конкретных технических систем. Системы подобраны таким образом, чтобы продемонстрировать возможность оптимизации количества резервных элементов для систем подобного рода. При этом, критерии оптимизации можно изменять в завысимости от конкретно решаемой практической задачи. Как было замечено выше, существует достаточный круг практических задач, о решении которых можно судить построив модель и получив параметры состояния системы.

Литература:

1. Recommendation E.862 (rev.1) Dependability of Telecommunication Networks. Geneva, 1992.
2. Khurodze R., Kakubava R. On dependability planning of technical systems: mathematical approach // Vestnik RAEN, No.3, 2003, p.44-48.
3. Khurodze R., Kakubava R., Svanidze N. Closed multi-channel queuing system with two types of service: model of multi-unit standby // Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, 168, No.2, 2003.
4. Khurodze R., Kakubava R., Gulua D. Priority queuing system for replacement and renewal // Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, 172, No.1, 2005.
5. Gulua D., Optimization of priority queuing replacement system by economical criterion // Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, 172, No.3, 2005.

M/M/1/2+ სისტემის აგება და მისი ოპტიმიზაციის საკითხი

რევაზ(ივერი) კაკუბავა, დავით გულუა
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია დარეზერვებული ტექნიკური სისტემა ჩანაცვლების პრიორიტეტით. აგებულია M/M/1/3 სისტემის სტოქასტური მოდელი, რომელიც ითვალისწინებს სისტემაში მტყუნებული ელემენტის ჩანაცვლების დროის ხანგრძლივობას. მიღებულია M/M/1/(2,3,4,5) სისტემის მდგომარეობის პარამეტრების რიცხვითი მნიშვნელობები და გამოთვლილია მათი ეკონომიკური მახასიათებელი.

CONSTRUCTION M/M/1/2+ SYSTEM AND A MATTER OF OPTIMIZATION.

Kakubava Revaz (Iveri), Gulua David
Georgian Technical University

Summary

The back-up technical system M/M/1/3 with a priority of replacement is considered here. The stochastic model of system considering the replacement duration of the expired system battery is developed. Numerical value of parameters and economic efficiency of the M/M/1/(2,3,4,5) systems is received.