ვოლტერას ტიპის ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის შესახებ

თამაზ ვეკუა
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ვოლტერას ტიპის ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის მიზნით ნაშრომში ყოველ ლოკალურ შუალედზე საძიებელი ფუნქცია შეცვლილია წრფის მონაკვეთით. ასეთი აპროქსიმაცია იძლევა საშუალებას გამოვთვალოთ საძიებელი ფუნცქციის შუალედური მნიშვნელობები რეკურსიული ფორმულებით ინტეგრალური გულის აპროქსიმაციის გარეშე.

საკვანძო სიტყვები: ინტეგრალური განტოლება. რეგულარიზაცია. თვითრეგულარიზაცია. აპროქსიმაცია. რეკურსიული ფორმულა.

1. შესავალი

განვიხილოთ ვოლტერას ტიპის შემდეგი ინტეგრალური განტოლება

$$\alpha \cdot V(t) + \int_0^t K2(t;\tau)V(\tau)d\tau = f(t), \tag{1}$$

სადაც ინტეგრალური გული K2(t;τ) წარმოადგენს ორჯერ ინტეგრებად ფუნქციას. იმ შემთხვევაში, როცა პარამეტრი $\alpha=1$, (1) განტოლება წარმოადგენს ვოლტერას მეორე გვარის განტოლებას, ხოლო, როცა $\alpha=0$, გვაქვს ვოლტერას პირველი გვარის შემდეგი ინტეგრალური განტოლება

$$\int_0^t K2(t;\tau)V(\tau)d\tau = f(t), \tag{2}$$

ცნობილია, რომ პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლების ამოხსნაზე ძირითადად დაიყვანება არაკორექტულად დასმული ამოცანების ამოხსნა ან პირობითად კორექტული ამოცანების ამოხსნა - რომელთაც არა აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ჩვენ შევეცადეთ ამ განტოლებებისათვის გვეპოვნა ამოხსნის ისეთი ალგორითმი, რომელიც ა. ტიხონოვის რეგულარიზაციის მეთოდისაგან განსხვავებით მოგვცემს რიცხვით ამოხსნებს, საკმარისად კარგი მიახლოებით. ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს თვითრეგულარიზაციას, რადგან ინტეგრალური განტოლების ამოხსნისას ჩვენ ვახდენთ, მხოლოდ საძიებელი ფუნქციის აპროქსიმაციას უბან-უბან წრფივი ფუნქციით ხოლო ინტეგრალურ გულს შეაქვს მთლიანი წვლილი ინტეგრალის მნიშვნელობაში.

2. ძირითადი ნაწილი

ინტეგრალური განტოლების ამონახსნს, ვეძებთ [0;T] სეგმენტზე, $h=\frac{T}{n}$, ბიჯით, t_i =i·h, i=0,1,…, n; n·h=T.

ცხადია, რომ როცა $t=t_i$ გვაქვს:

$$\alpha \cdot V(t_i) + \int_0^{t_i} K2(t_i;\tau)V(\tau)d\tau = f(t_i) \tag{3}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$V_i = V(t_i), \qquad f_i = f(t_i)$$

(3) ტოლობა ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\alpha \cdot V_i + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} K2(t_i;\tau)V(\tau)d\tau = f_i \tag{4}$$

ყოველ [tj; tj+1] j=0,1,…,n-1 ლოკალურ შუალედზე საძიებელი V(t) ფუნქცია შევცვალოთ (tj; Vj) და (tj+1; Vj+1) წერტილებზე გამავალი წრფის შემდეგი მონაკვეთით

$$V(\tau) = V_j + \frac{V_{j+1}-V_j}{h}(\tau - t_j), \quad \tau \in [t_j;t_{j+1}]$$

ნაწილობითი ინტეგრებით გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} K2(t_i,\tau)\cdot\left[v_j+\frac{V_{j+1}-V_j}{h}(\tau-t_j)\right]d\tau=$$

$$=\left[v_j+\frac{V_{j+1}-V_j}{h}(\tau-t_j)\right]\cdot K1(t_i,\tau)\int_{t_j}^{t_{j+1}} \quad -\frac{V_{j+1}-V_j}{h}\cdot\int_{t_j}^{t_{j+1}} K1(t_i,\tau)d\tau=$$

$$=V_{j+1}K1(t_i,t_{j+1})-V_jK1(t_i,t_j)-\frac{V_{j+1}-V_j}{h}\Big[K(t_i,t_{j+1})-K\left(t_i,t_j\right)\Big]$$

უკანასკნელი ტოლობის აჯამვითა და (4) - ტოლობაში შეტანით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}&\alpha V_i+\frac{1}{h}\big[hK1(t_i,t_i)+K(t_i,t_{i-1})-K(t_i,t_i)\big]V_i+\\&+\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{i-1}\Big[K(t_i,t_{j-1})-2K(t_i,t_{j+1})+K\left(t_i,t_{j+1}\right)\Big]V_j=f_i\end{aligned} \qquad (5)$$

სადაც

$K1(t,\tau)=\int K2(t,\tau)d\tau$ $\qquad$ $K(t,\tau)=\int K1(t,\tau)d\tau$

მე-(5)-ე ტოლობიდან, მივიღებთ:

$$V_i=\frac{ht_i}{j_i}-\frac{1}{j_i}\cdot\sum_{j=1}^{i-1}\Big[K(t_i,t_{j+1})-2K(t_i,t_j)+K(t_i,t_{j-1})\Big]V_j \qquad (6)$$

სადაც $j_i=\alpha h+hK1(t_i,t_i)+K(t_i,t_{i-1})-K(t_i,t_i)$ (7)

მაშინ, როცა α=1 მივიღებთ (1) - ვოლტერას მეორე გვარის ინტეგრალური განტოლების რიცხვით ამონახსნს, ხოლო α=0 შემთხვევაში მივიღებთ (2) - პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლების ამონახსნს.

მაშინ, როცა K2(t,τ) ფუნქციიდან ინტეგრალი არ გამოისახება ელემენტარული ფუნქციებით, შეიძლება (6) – (7) ასე გარდავქმნათ

$$\omega_i=\alpha h+h\left[K1(t_i,t_i)-\frac{K(t_i,t_i)-K(t_i,t_{i-1})}{h}\right]=\alpha h+h\big[K1(t_i,t_i)-K1(t_i,t_{i-1})\big]=$$

$$=\alpha h+h^2K2(t_i,t_{i-1})$$

შევნიშნოთ, რომ წარმოებულის აპროქსიმაცია მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მცირეა h - ბიჯი.

ე.ი. $\omega_i=h\cdot\gamma_i$ სადაც $\gamma_i=\alpha+hK2(t_i,t_{i-1})$

ამ შემხთვევაში მივიღებთ შემდეგ რეკურენტულ ფორმულას

$$V_i=\frac{f_i}{\gamma_i}-\frac{h}{\gamma_i}\sum_{\gamma=1}^{i-1}K2(t_i,t_j)V_j\text{ , i=2,3,,…,n} \qquad (8)$$

ამასთან

$$V_0=f(0),\qquad V_1=\frac{f_1}{\gamma_1}$$

თვალსაჩინოების მიზნით ამოვხსნათ შემდეგი ინტეგრალური განტოლებები:

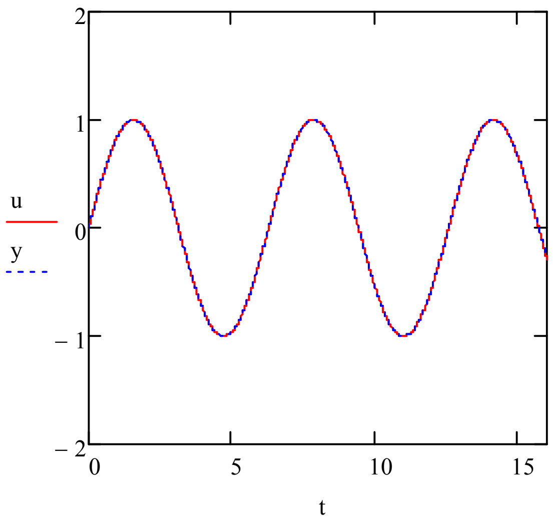
1. ამოვხსნათ ვოლტერას მეორე გვარის ინტეგრალური განტოლება

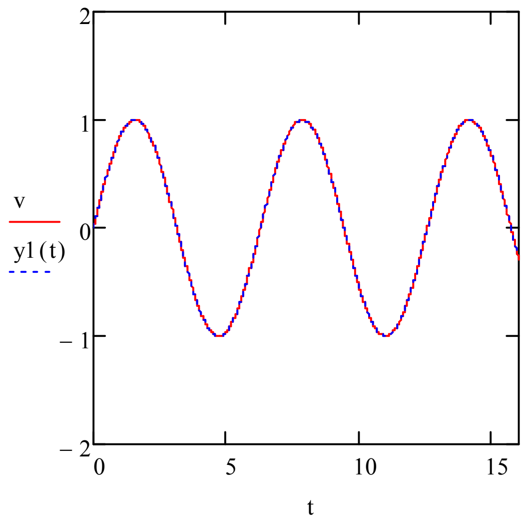
$$V(t)+\int_0^t\sin(t-\tau)d\tau=1.5\sin t-0{,}5t\cos t$$

ჯერ ამოვხსნათ (6) ფორმულით, შემდეგი მე (8)-ე ფორმულით და მიღებული შედეგები შევადაროთ ამ განტოლების ზუსტ y=sint ამოხსნას.

როცა h=0.01, α=1

ფორმულა (6) გვაძლევს $\qquad\qquad$ ფორმულა (8)-ით ვღებულობთ



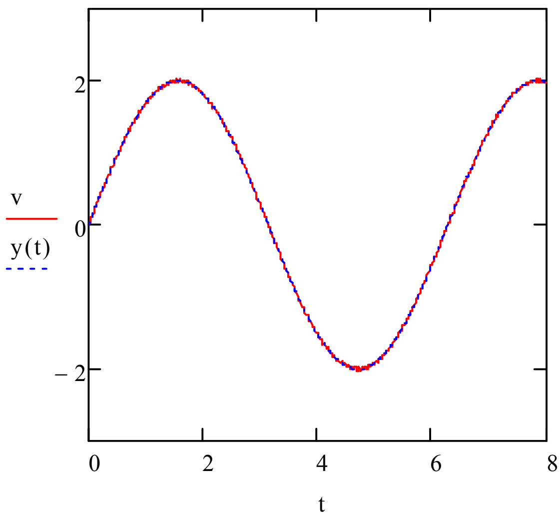


2. ამოვხსნათ ვოლტერას პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება:

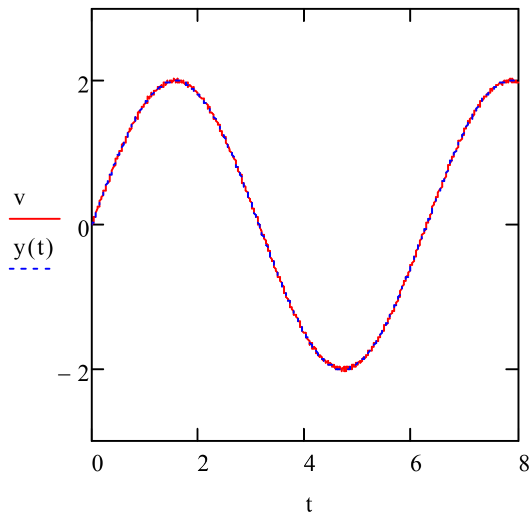
$$\int_0^t \sin(t-\tau)V(\tau) = \sin t - t\cos t:$$

ამ შემთხვევაში α=0 და (6) –(8) ფორმულებით მიღებული შედეგები შევადაროთ y=2sint ზუსტი ამონახსნს

(6)-ით



(8)-ით



ლიტერატურა:

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.. Методы решения некорректних задач. Москва; Главная редакция физико-математической литературы. Наука, 1979

2. Векуа Т.П. Численный метод решения некоторых интегральных уровнений. Проблемы механики международный научный журнал. №3(28), Тбилиси, 2007. Ст. 85-89.

ABOUT THE NUMERICAL SOLVING OF THE VOLTERRA TYPE INTEGRAL EQUATIONS

Vekua Tamaz
Georgian Technical University

Summary

For the purpose of numerical solution of Volterra type first end second gender equations of unknown function is approximated by straight segment in each local interval. On a base of this approach the recursion formula for computation of the intermediate values of desired solution are obtained, without the approximation of integral equation kernel.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛНЫХ УРАВНЕНИИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Векуа Т.
Грузинский Технический Университет

Резюме

С целю решения численным методом уравнении типа Вольтерра первого и втарого рода, на каждом локальном интервале искомая функция апроксимирована отрезком прямои. На базе такого подхода получена рекурсивная формула вычисления промежуточных значении рашения, без апроксимации ядра инегралъого урфвнения.