ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ С ОТРЫВОМ НА ВИБРИРУЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

Кипиани Т.Г.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Исследуется движение частицы с отрывом на вибрирующей плоскости с переменным углом вибрации. Методом итерации и методом Ньютона конкретную задачу можно довести до численного результата, а именно найти границы скольжения вверх и вниз до полета и после полета.

Ключевые слова: Ввибрирующая плоскость. Угол вибрации. Гармоническое колебание. Фазовый угол. Итерация.

1. Введение

В работе исследуется движение частицы с отрывом на вибрирующей плоскости с переменным углом вибрации. Методом итерации и Ньютона конкретную задачу можно довести до численного результата, а именно найти границы скольжения вверх и вниз до полета и после полета.

2. Основная часть

В статьях [I-2] исследовано движение материальной частицы на вибрирующей плоскости с переменным углом вибрации. Однако в ней рассматривается лишь случай базотрывного движения. Используя ту же схему движения и тот же гармонический закон изменения угла отклонения коромысел от положения равновесия в виде

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t \tag{1}$$

в системе коодинат x, a, y жестко связанной с вибрирующей плоскостью, получим уравнения движения частицы:

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + ml\varphi_0\omega^2 \sin \omega t \cos(\beta - \varphi) - \\ - ml\varphi_0^2\omega^2 \cos^2 \omega t \sin(\beta - \varphi) + T, \tag{2}$$

$$m\ddot{y} = -mg \cos \alpha + ml\varphi_0\omega^2 \sin \omega t \sin(\beta - \varphi) + \\ + ml\varphi_0^2\omega^2 \cos^2 \omega t \cos(\beta - \varphi) + N\,. \tag{3}$$

Условие отрыва частицы от вибрирующей плоскости будет иметь вид

$$\omega > \omega_{\max} = \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{a \sin(\beta - \varphi_0)}}\,. \tag{4}$$

Здесь m – масса частицы, $\omega -$циклическая частота колебаний, a – дуговая амплитуда, l – длина коромысел, T и N – величины касательной и нормальной реакции плоскости, $\beta -$начальный угол вибрации, $\alpha -$угол наклона плоскости в горизонту; $\varphi_0 = a/l -$угловая амплитуда, $\gamma -$угол наклона отверстии решеток к горизонту плоскости.

Поскольку функция

$$\frac{1}{mg} N(\nu - \omega t) = \cos\alpha - \frac{l\omega^2}{g}\left[\varphi \sin(\beta - \varphi) + (\varphi_0^2 - \varphi^2)\cos(\beta - \varphi)\right]$$

имеет минимум при $v = 90°$, то явление отрыва будет наблюдаться когда этот минимум отрицательный. Кроме того, функция $N(v)$ симметрична относительно $v = 90°$, поскольку

$$\sin(90° + \lambda) = \sin(90° - \lambda).$$

Отсюда ясно, что область возможного отрыва частицы от вибрирующей плоскости характеризуется границами

$$v^{*} \text{ и } v^{**} = 180 - v^{*}, \tag{5}$$

которые будут решениями уравнения

$$\cos\alpha - \frac{l\omega^2}{g}\left[\varphi\sin(\beta-\varphi) + (\varphi_0^2 - \varphi^2)\cos(\beta-\varphi)\right] = 0 .$$

Это уравнение записывается в виде

$$\varphi = f_1(\varphi), \tag{6}$$

где

$$f_1(\varphi) = \frac{1}{\sin\beta}\left[\frac{g\cos\alpha}{l\omega^2} + \varphi\sin\beta - \varphi\sin(\beta-\varphi) - (\varphi_0^2 - \varphi^2)\cos(\beta-\varphi)\right].$$

Решение уравнение (6) можно получить простым итерационным методом. Процесс итераций будет сходящимся, поскольку производная при малых φ

$$f_1'(\varphi) = \frac{1}{\sin\beta}\left[\sin\beta(1-\cos\varphi) + \cos\beta\sin\varphi + 3\varphi\cos(\beta-\varphi) - \right.$$

$$\left. - (\varphi_0^2 - \varphi^2)\sin(\beta-\varphi)\right] \approx \varphi ctg\beta ,$$

если $\beta \neq 0$.

Тогда последовательные приближения будут

$$\varphi_{n+1} = f_1(\varphi_n).$$

Процесс продолжается до тех пор, пока с требуемой точностью $\varphi_{n+1} = \varphi_n$.

Затем решается уравнение

$$\sin v = \frac{\varphi}{\varphi_0}$$

и находятся границы (5).

Заметим, что область возможного отрыва расположена вблизи от $v = 90°$. Следовательно, отрыв и полет частицы могут произойти только вверх по наклонной плоскости.

Дифференциальные уравнения полета частицы получаются из уравнений (2) и (3) при $T = N = 0$:

$$\ddot{x} = -g\sin\alpha + l\omega^2\left[\varphi\cos(\beta-\varphi) - (\varphi_0^2 - \varphi^2)\sin(\beta-\varphi)\right] + g\cos\gamma , \tag{7}$$

$$\ddot{y} = -g\cos\alpha + l\omega^2\left[\varphi\sin(\beta-\varphi) + (\varphi_0^2 - \varphi^2)\cos(\beta-\varphi)\right] + g\sin\gamma . \tag{8}$$

Начальные условия для уравнения (8) нулевые:

$$(y)_{v=v_{on}} = 0,\ (\dot{y})_{v=v_{pn}} = 0. \tag{9}$$

Начальные условия для уравнения (7) зависят от момента отрыва.

Если отрыв произошел из состояния относительного покоя, то начальные условия для уравнения (7):

$$(x)_{v=v_{on}} = 0,\ (\dot{x})_{v=v_{pn}} = 0. \tag{10}$$

Если отрыв частицы произошел из состояния относительного скольжения, то начальные условия для уравнения (7) находится интегрированием уравнения (2) при условии

$$T = Ntg\beta,$$

где угол трения $\rho < 0$ для возможного скольжения вверх и $\rho > 0$ для возможного скольжения вниз. В этом случае

$$x_{om} = x_c - \frac{g\sin(\alpha-\rho)}{2\omega^2\cos\rho}\left(v_{om} - v_c\right)^2 + \frac{a}{\cos\rho}\left(v_{om} - v_c\right)\cos v_c \cos(\beta+\rho-\varphi_c) +$$

$$+ \frac{l}{\cos\rho}\left[\sin(\beta+\beta-\varphi_{om}) - \sin(\beta+\rho-\varphi_c)\right], \tag{11}$$

$$\dot{x}_{om} = -\frac{g\sin(\alpha-\rho)}{\omega\cos\rho}\left(v_{om} - v_c\right) -$$

$$+ \frac{a\omega}{\cos\rho}[\cos v_{om}\cos(\beta+\rho-\varphi_{om}) - \cos(\beta+\rho-\varphi_c)], \tag{12}$$

где x_c и v_c – параметры конца скольжения.

Интегрирование уравнений (7) и (8) дает

$$\dot{x} = \dot{x}_{om} - \frac{g\sin\alpha}{\omega}(v - v_{om}) - a\omega\left[\cos v\cos(\beta-\varphi) - \cos v_{om}\cos(\beta-\varphi_{om})\right], \tag{13}$$

$$\dot{y} = -\frac{g\cos\alpha}{\omega}(v - v_{om}) - a\omega\left[\cos v\sin(\beta-\varphi) - \cos v_{om}\sin(\beta-\varphi_{om})\right], \tag{14}$$

$$x - x_{om} = \frac{1}{\omega}\dot{x}_{om}(v - v_{om}) - \frac{g\sin\alpha}{2\omega^2}(v - v_{om})^2 -$$

$$+ a(v - v_{om})\cos v_{om}\cos(\beta-\varphi_{om}) + l\left[\sin(\beta-\varphi) - \sin(\beta-\varphi_{om})\right],$$

$$y = -\frac{g\cos\alpha}{2\omega^2}(v - v_{om})^2 + (v - v_{om})\cos v_{om}\sin(\beta-\varphi_{om}) -$$

$$- l\left[\cos(\beta-\varphi) - \cos(\beta-\varphi_{om})\right]. \tag{15}$$

Прекращение полета частицы, т.е. момент контакта с вибрирующей плоскостью характеризуется фазовым углом *v*, при котором $y = 0$, т.е.

$$f_2(v) = -\frac{g\cos\alpha}{2\omega^2}(v - v_{om})^2 + a(v - v_{om})\cos v_{om}\sin(\beta-\varphi_{om}) -$$

$$- l\left[\cos(\beta-\varphi) - \cos(\beta-\varphi_{om})\right] = 0.$$

Это уравнение решается итерационной формулой Ньютона

$$v_{n+1} = v_n - \frac{f_2(v_n)}{f_2'(v_n)}.$$

За нулевое приближение можно взять $v = v_{om}^*$. Полученное решение v_n будет фазовым углом падения. Подставляя его значение в выражения (13)...(15), получаем соответственно проекции относительной скорости частицы в момент паления и перемещения частицы вдоль вибрирующей плоскости $x_n - x_{om}$ за время полета.

Если частица остановилась при таком фазовом угле, что дальнейшее его увеличение ведет к скольжению вверх (первая область возможного покое), по методике статьи [II], подставляя нужные значения параметров α, l, a, β, ω можно получить границы:

$v_B^* + 360_k^0$, $v_B^{**} + 360_k^0 -$ возможного скольжении вверх;

$v_N^* + 360_k^0$, $v_N^{**} + 360_k^0 -$ возможного скольжения вниз.

А по методике данной статьи

$v_{om}^* + 360_k^0$, $v_{om}^{**} + 360_k^0 -$ для областей возможного отрыва.

Ясно, что движение частицы начинается со скольжения с v_b^* и продолжается до v_{om}^*. Далее следует полет и т.д.

Литература:

1. Мегрелидзе Т.Я. Исследование скорости скольжения частицы чая на вибрирующей плоскости с переменным углом вибрации. Тезисы докладов межлународной конференции по динамике и прочности машин. Тбилиси: Институт механики машин. АН Грузии, 1999.

2. Кипиани Т.Г. Метод итерации и Ньютона в исследовании движения частицы на вибрирующей плоскости.

ნაწილაკის მოძრაობა მოწყვეტით მოვიბრირე სიბრტყეზე

თებრო ყიფიანი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია ნაწილაკის მოძრაობა ვიბრირებად სიბრტყეზე წყვეტით, ვიბრაციის ცვალებადი კუთხის შემთხვევაში. იტერაციის და ნიუტონის მეთოდების გამოყენებით კონკრეტული ამოცანა შესაძლებელია მოყვანილ იქნას რიცხობრივ შედეგამდე, ანუ მოიძებნოს ზევით და ქვევით სრიალის საზღვრები ფრენის დროს და ფრენის შემდეგ.

MOVEMENT OF PARTICLE WITH PREAKAGE ON VIBRATING PLANE

Kipiani Tebro
Georgian Technical University

Summary

In work is investigated movement of a particle with Breakage on a vibrating plane with a variable corner of vibration. A method of iteration and Newton's method, the specific target can be finished to numerical result, namely to find sliding borders upwards both down to flight and after flight.