ხვევადი კოდების დეკოდირების მოდიფიცირებული სტეკ-ალგორითმი წაშლებით

თეიმურაზ მთვრალაშვილი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

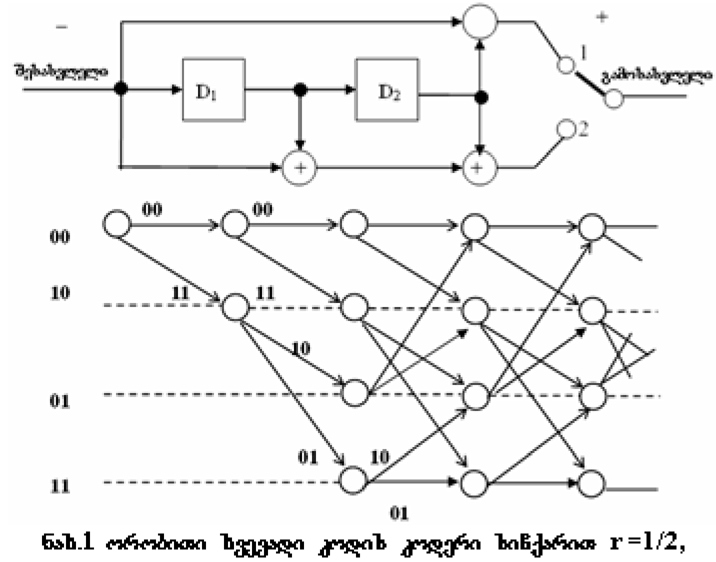
რეზიუმე

განხილულია ხვევადი კოდების მიმდევრობითი დეკოდირების მოდიფიცირებული სტეკ-ალგორითმი წაშლებით და მისთვის დამახასიათებელი თვისებები. ნაჩვენებია შეცდომისა და წაშლის ალბათობათა გაცვლითი თანაფარდობები. მიღებულია არასწორი დეკოდირების ალბათობის ზედა ზღვარი უმეხსიერებო სიმეტრიული არხებისათვის. დამტკიცებულია, რომ შემოთავაზებული ალგორითმის მეშვეობით შეიძლება შეცდომის ან წაშლის ალბათობის ექსპონენტის მაჩვენებლის რაიმე ფიქსირებული T სიდიდით შემცირებისას, გავზარდოთ შეცდომის ალბათობის ექსპონენტის მაჩვენებელი იმავე T სიდიდით. მიღებული შედეგის საფუძველზე დადგენილია, რომ ჩვეულებრივ სტეკ-ალგორითმთან შედარებით მოდიფიცირებული სტეკ-ალგორითმის მეშვეობით შეიძლება მივაღწიოთ შეცდომის ალბათობის ექსპონენტის მაჩვენებლის ორჯერად ზრდას გადაცემის ნებისმიერი სიჩქარისათვის (0-დან გამტარუნარიანობამდე), მაშინ როცა დეკოდირებაზე უარის ალბათობა რჩება იგივე სიდიდის.

საკვანძო სიტყვები: ხვევადი კოდი. სტეკ-ალგორითმი. დეკოდირება. შეცდომის და/ან წაშლის ალბათობა.

1. შესავალი

ცნობილია, რომ ხვევადი კოდების აღწერა შესაძლებელია გისოსისებური დიაგრამით (გისოსით). თუ q–ობითი ხვევადი კოდის სიჩქარეა $r=k/n$, ხოლო ν–კოდის მეხსიერება, მაშინ t ($t\geq\nu-1$) დროის მომენტში გისოსი შეიცავს $q^{k(\nu-1)}$ კვანძს. თითოეული მათგანი ცალსახად შეესაბამება მაკოდირებელი რეგისტრის მდგომარეობას. თითოეულ კვანძში შედის და მისგან გამოდის q^k შტო. ამასთან, თითოეულ შტოსთან შეპირისპირებულია n სიგრძის (სიმბოლოებისაგან შემდგარი) q-ობითი მიმდევრობა. კოდირება ნიშნავს გისოსზე რომელიმე გზის ამორჩევას, ხოლო დეკოდირება ნიშნავს იმ გზის განსაზღვრას, რომელიც ამორჩეული იყო კოდირების დროს. თუ დეკოდერი სწორად ახდენს მიღებული მიმდევრობის დეკოდირებას, მაშინ ჩავთვალოთ, რომ დეკოდერი ირჩევს სწორ გზას. წინააღმდეგ შემთხვევაში ის გადავა არასწორ გზაზე. ყველა არასწორი გზა ქმნის არასწორ გზათა სიმრავლეს, რომელიც აღვნიშნოთ S-ით. (არასწორ გზათა სიმრავლე S_t შედგება ყველა იმ არასწორი გზისგან, რომლებიც იწყება დროის t მომენტში). ორობითი ($q=2$) ხვევადი კოდის მაგალითი და მისი შესაბამისი გისოსი ნაჩვენებია 1-ელ ნახაზზე.



ნახ.1 ორობითი ხვევადი კოდის კოდერი სიჩქარით $r=1/2$, $k=1$, $q=2$, $n=2$, $\nu=2$ და მისი შესაბამისი გისოსი

ორობითი მიმდევრობა შტოზე წარმოიქმნება იმ სიმბოლოებით, რომლებიც ჩნდება კოდერის 1 და 2 გამოსასვლელებზე. ამ მაგალითში გისოსის შტოებზე მიმდევრობები ჩნდება დროში უცვლელი წრფივი სქემით (სქემა შედგება ამჯამავებისა და D_i დაყოვნების ელემენტებისაგან).

მოცემულ ნაშრომში განხილულია ხვევადი კოდების კლასი დროში ცვალებადი სქემით.

ცნობილია ხვევადი კოდების დეკოდირების რამდენიმე მეთოდი. ჩვენ განვიხილავთ ხვევადი კოდების მიმდევრობითი დეკოდირების მოდიფიცირებულ განზოგადებულ სტეკ-ალგორითმს [1-5] წაშლებით. თავდაპირველად მოკლედ მიმოვიხილოთ დეკოდირების ოპტიმალური სქემები წაშლებით. თეორიიდან ცნობილია [6], რომ ბლოკური კოდების დეკოდირებისას წაშლით ოპტიმალურია ისეთი კრიტერიუმი, როცა Z სიტყვის მიღებისას დეკოდირების შედეგად გაიცემა ისეთი Y_0 სიტყვა, რომლისთვისაც სრულდება პირობა:

$$\frac{p(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}_0)}{\sum_{v} p(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}_i)} \geq e^{NT} \tag{1}$$

სადაც N კოდური სიტყვის სიგრძეა, ხოლო T რაიმე ზღურბლი.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ალბათობის მნიშვნელობით მეორე ადგილზე მყოფი Y_1 სიტყვის ალბათობა $\mathrm{P(Z, Y_1)}$ ჩვეულებრივ უფრო მეტია, ვიდრე დანარჩენ სიტყვათა ალბათობები, გარდა ყველაზე მეტად ალბათური Y_0 სიტყვის ალბათობისა, მაშინ კრიტერიუმი – ისეთი Y_0 სიტყვის გაცემა, რომლისთვისაც

$$\frac{p(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}_0)}{p(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}_1)} \geq e^{NT} \tag{2}$$

წარმოადგენს სქემისათვის წაშლებით (1) ფორმულით მოცემული კრიტერიუმის კარგ აპროქსიმაციას და ეწოდება სუბოპტიმალური კრიტერიუმი [6].

შემდგომში შევიზღუდებით უმეხსიერებო q-ობითი სიმეტრიული არხის განხილვით. წარმოვადგინოთ (2) გამოსახულება შემდეგი ექვივალენტური ფორმით:

$$\begin{aligned} &\frac{p(\mathrm{Z}, Y_0)}{p(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}_1)} \geq e^{NT} \Rightarrow \frac{p(\mathrm{Z}/\mathrm{Y}_0)}{p(\mathrm{Z}/\mathrm{Y}_1)} \geq e^{NT} \Rightarrow \ln p(\mathrm{Z}/\mathrm{Y}_0) - \ln p(\mathrm{Z}/\mathrm{Y}_1) \geq NT \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \ln p(\mathrm{Z}_i/\mathrm{Y}_{0i}) - \sum_{i=1}^{N} \ln p(\mathrm{Z}_i/\mathrm{Y}_{1i}) = \Gamma_1(\mathrm{Y}_0) - \Gamma_1(\mathrm{Y}_1) \geq NT, \end{aligned} \tag{3}$$

სადაც $\Gamma_1(\mathrm{Y}_0) = \sum_{i=1}^{N} \ln p(\mathrm{Z}_i \;/\; \mathrm{Y}_{0i}),\;\; \Gamma_1(\mathrm{Y}_1) = \sum_{i=1}^{N} \ln p(\mathrm{Z}_i \;/\; \mathrm{Y}_{1i})$.

$\Gamma_1(\mathrm{Y}_0)$ და $\Gamma_1(\mathrm{Y}_1)$ განსაზღვრავს სიმბოლოების ჯამურ მეტრიკას, შესაბამისად პირველი ყველაზე უფრო მეტად ალბათური და პირველის შემდეგ მეორე - ყველაზე უფრო ალბათური კოდური სიტყვებისათვის. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ხვევად კოდებში კოდური სიტყვის სიგრძის ანალოგს წარმოადგენს კოდური შეზღუდვის სიგრძე – $\mathrm{N_A}= \nu n$, მაშინ (3)-ში N შეიძლება შევცვალოთ νn-ით. ამგვარად გვექნება:

$$\Gamma(\mathrm{Y}_0) - \Gamma(\mathrm{Y}_1) \geq n\nu T,$$

სადაც $\Gamma(\mathrm{Y}_0)$ და $\Gamma(\mathrm{Y}_1)$ ამ შემთხვევაში წარმოადგენს კოდურ გისოსზე ყველაზე მეტად ალბათური გზების ჯამურ მეტრიკებს.

განვსაზღვროთ ჯამური მეტრიკები. თითოეულ სიმბოლოსთან დავაკავშიროთ მეტრიკა $\ln P_{j\chi}$, სადაც $P_{j\chi}= P(j/\chi)$ არის შესასვლელი χ სიმბოლოს გამოსასვლელ j სიმბოლოში გადასვლის პირობითი ალბათობა. განვსაზღვროთ „მეტრიკა დანამატი" როგორც [3]

$$m_{j\chi} = \ln \frac{P_{j\chi}}{q_j} - r_0 \tag{4}$$

სადაც $q_j = \sum_{\chi} P_{\chi} P_{j\chi}$ არის ხვევადი კოდების ანსამბლის მიხედვით გამოსასვლელი j სიმბოლოს საშუალო ალბათობა, ხოლო r_0-ს უწოდებენ წანაცვლებას. ამგვარად, ჩვენი მიზანია (4) გამოსახულების საშუალებით გისოსზე მაქსიმალური ჯამური მეტრიკის მქონე გზის მოძებნა. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $r_0 \leq$ **c**, (**c** –არხის გამტარუნარიანობაა) შეიძლება განხილულ იქნას როგორც წანაცვლება. ამავე დროს, როგორც გამოკვლევები გვიჩვენებენ [3-4], r_0–ის ოპტიმალური ამორჩევა ახდენს დეკოდირების სიძნელის მინიმიზაციას ხვევადი კოდების მიმდევრობით დეკოდერებში.

2. მიმდევრობითი დეკოდირების მოდიფიცირებული ალგორითმი

ალგორითმი თითოეულ ბიჯზე ინახავს სტეკს, რომელიც შეიცავს $\mathrm{W=Y^{(w)}}$ არასრულ გზას. ეს გზები $\mathrm{Y^{(w)}}$ დალაგებულია თავთავიანთი ჯამური მეტრიკების მიხედვით.

დასაწყისი: $\mathrm{W=1, Y^{(1)}}$ არის გზა ნულოვანი სიგრძით (საწყისი კვანძი).

რეკურსია: სტეკში არსებული D საუკეთესო (მეტრიკის თვალსაზრისით) გზის თითოეული $\mathrm{M=q^k}$ გაგრძელებისათვის (გაფართოებისათვის) გამოვთვალოთ ჯამური მეტრიკები (აღვნიშნოთ, რომ D რიცხვი შეიძლება შეიცვალოს რეკურსიის თითოეულ ბიჯზე). თუ ნებისმიერი გზა, რომელიც მიღებულია გაფართოების შედეგად, ერწყმის სტეკში მყოფ გზას, მაშინ შემოწმდეს აჭარბებს თუ არა შერწყმის წერტილში ყველაზე უფრო მეტად ალბათური (სარწმუნო) გზის ჯამური მეტრიკა მეორე ყველაზე უფრო მეტად ალბათური გზის ჯამურ მეტრიკას $n\nu\mathrm{T}$ სიდიდით; თუ ეს არ ხდება, ყველაზე უფრო მეტად

სარწმუნო გზის მეორე ყველაზე სარწმუნო გზასთან განშლისა (დაშორების) და შერწმყის წერტილებში დავსვათ ერთნაირი ჭდეები (ნიშნები). გადავალაგოთ გზები თავთავიანთი ჯამური მეტრიკების შესაბამისად. თუ საუკეთესო გზა მდებარეობს ბოლო კვანძებზე, ალგორითმი დასრულებულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში ალგორითმის მუშაობა გრძელდება.

დასასრული: თუ ამორჩეული საუკეთესო გზა შეიცავს ერთნაირ ჭდეებს, მაშინ ასეთ ჭდეებს შორის მდებარე ყველა სიმბოლო წაიშლება. ამორჩეული კოდური მიმდევრობის შესაბამისი საინფორმაციო მიმდევრობა წაშლილი უბნებით მიეწოდება მიმღებს.

განვიხილოთ შემოთავაზებული ალგორითმის ზოგიერთი თვისება. დავუშვათ Y და $Y^{/}$ ორი გზა იშლება (გამოდის ერთი საერთო კვანძიდან) და ისევ ერთდება კოდურ გისოსზე. დავუშვათ, რომ მინიმალური ჯამური მეტრიკა Y გზაზე საერთო კვანძის შემდეგ აჭარბებს ჯამურ $\Gamma(Y^{/})$ მეტრიკას არანაკლებ nvT სიდიდით Y-ის $Y^{/}$-თან შერწყმის წერტილში. მაშინ ცხადია, რომ ალგორითმი-1 არასოდეს გააფართოებს $Y^{/}$-ს Y-თან შერწყმის შემდეგ და $Y^{/}$ ვერ შეძლებს დასვას თავისი ჭდე ალგორითმით ამორჩეულ გზაზე. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ $Y^{/}$ –ის შერწყმისას Y–თან სტეკში ყოველთვის მოიძებნება გზა, რომელსაც ექნება ჯამური მეტრიკა nvT სიდიდით უფრო მეტი, ვიდრე $\Gamma(Y^{/})$. ასეთი გზა შეიძლება იყოს Y–თან შერწყმული გზა, რომელსაც აქვს ჯამური მეტრიკა მეტი ვიდრე Y გზას, ან რომელიმე სხვა გზა, რომელსაც ასევე გააჩნია Y გზაზე მეტი ჯამური მეტრიკა.

აღვნიშნოთ y_t–ით სწორი გზა t მომენტისათვის და შესაბამისად $\Gamma(y_t)$ მისი ჯამური მეტრიკა t მომენტში, ხოლო $\gamma(t)$–ით სიღრმე სწორ გზაზე $\Gamma(y_t)$–დან ყველაზე მცირე ჯამურ მეტრიკამდე t მომენტის შემდეგ.

$$\gamma_t = \Gamma(Y_t) - \min_{\tau \geq t} \Gamma(Y_\tau)$$

დავუშვათ, რომ ალგორითმი 1-ის რეკურსიის თითოეულ ბიჯზე ჩვენ შესაძლებლობა გვაქვს განვსაზღვროთ ისეთი გასაგრძელებელი გზების D რიცხვი სტეკში, რომლებიც აუცილებლად შეიცავს სწორ გზას ან მასთან შერწყმულ არასწორ გზას, და ამ უკანასკნელს გააჩნია მეტი ჯამური მეტრიკა, ვიდრე სწორ გზას. ამგვარად დეკოდირების თითოეულ ბიჯზე ჩვენ აუცილებლად ვაგრძელებთ (ვაფართოვებთ) სწორ გზას ან უკიდურეს შემთხვევაში მასთან შერწყმულ არასწორ გზას.

3. შეცდომისა და წაშლის ალბათობების გაცვლითი თანაფარდობები

განვსაზღვროთ პროტოშეცდომა (t-მომენტისათვის) როგორც ხდომილება, რომლის დროსაც რაიმე $Y^{/}$ გზას S_t არასწორ გზათა ქვესიმრავლეში აქვს $\Gamma(Y^{/})$ ჯამური მეტრიკა სწორ გზასთან შერწყმის წერტილში და $\Gamma(Y^{/})$ აჭარბებს მინიმალურ ჯამურ მეტრიკას სწორ გზაზე t მომენტის შემდეგ nvT ან მეტი სიდიდით. ალგორითმი 1-დან ჩანს, რომ $Y^{/}$ არასოდეს განიხილება ჭდის გარეშე Y-თან შერწყმის შემდეგ თუ არ სრულდება პირობა

$$\Gamma(Y^{/}) \geq \min_{\tau \geq t} \Gamma(Y_\tau) + nvT \Rightarrow \Gamma(Y^{/}) \geq \Gamma(Y_t) - \gamma_t + nvT \tag{5}$$

და ამიტომ შეცდომა არ შეიძლება გაჩნდეს პროტოშეცდომის გარეშე (საწინააღმდეგო მტკიცება, რა თქმა უნდა არასწორია).

ანალოგიურად განვსაზღვროთ პროტოშეცდომა/წაშლა, როგორც ხდომილება რომლის დროსაც რაიმე $Y^{/}$ S_t -თვის სწორ გზასთან შერწყმის წერტილში ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$\min_{\tau \geq t} \Gamma(Y_\tau) \leq \Gamma(Y^{/}) + nvT \Rightarrow \Gamma(Y^{/}) \geq \Gamma(Y_t) - \gamma_\tau - nvT \tag{6}$$

წინა შემთხვევის ანალოგიურად შეცდომას ან წაშლას ადგილი არ ექნება პროტო-შეცდომის/წაშლის გარეშე.

აღნიშვნების გამარტივების მიზნით დავუშვათ, რომ $\Gamma(Y_t)$ მეტრიკა საწყის კვანძში ტოლი იყო ნულის და საწყისი დროც $t=0$. მაშინ (5) და (6) გამოსახულებებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\Gamma(Y^{/}) \geq -\gamma_0 + nvT \Rightarrow \Gamma(Y^{/}) + \gamma_0 - nvT \geq 0 \tag{7}$$

$$\Gamma(Y^{/}) \geq -\gamma_0 - nvT \Rightarrow \Gamma(Y^{/}) + \gamma_0 + nvT \geq 0 \tag{8}$$

უნდა აღინიშნოს, რომ (7) და (8) გამოსახულებები წარმოადგენს, შესაბამისად აუცილებელ, მაგრამ არასაკმარის პირობებს შეცდომის და შეცდომის ან წაშლის წარმოშობისათვის. მიუხედავად ამისა, მათი დახმარებით შესაძლებელია ამ ხდომილებათა ალბათობების ზედა საზღვრების პოვნა.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა. შეცდომას შეიძლება ადგილი ჰქონდეს, თუ

$$\Gamma(Y_\tau^{/}) + \gamma_0 - nvT \geq 0$$

სადაც Y'_{τ} -არის S_0 სიმრავლიდან რომელიმე შესაძლო არასწორი გზა, შერწყმული სწორ გზასთან. განვსაზღვროთ $C_{0\tau}$ ყველა იმ გზათა ქვესიმრავლე S_0 სიმრავლიდან, რომლებიც ერწყმის სწორ გზას τ დროის მომენტში. მაშინ შეცდომის (ξ ხდომილების) ალბათობა, იუდკინის საზღვრის მიხედვით [3,4], შეიძლება შეიზღუდოს ზემოდან შემდეგი გამოსახულებით:

$$p(\xi) \le e^{-\alpha n v T\rho} K e^{-nvE_c(r)} = K e^{-nv[E_c(r)+\alpha T\rho]} \tag{9}$$

$$p(\xi \cup X) \le e^{\alpha n v T\rho} K e^{-nvE_c(r)} = K e^{-nv[E_c(r)-\alpha T\rho]} \tag{10}$$

სადაც K კონსტანტა არ არის დამოკიდებული ν–ზე, ხოლო

$$\begin{cases} E_c(r) = E_0(\rho) \\ r = \dfrac{(1-\varepsilon^{/})E_0(\rho)}{\rho} \end{cases} \text{, სადაც} \quad 0 \le \rho \le 1 \qquad (r_c(1-\varepsilon^{/}) \le r \le \mathbf{c}(1-\varepsilon^{/})),$$

$$E_0(\rho) = -\ln \sum_j \left[\sum_{\chi} p_{\chi} p_{j\chi}^{\frac{1}{1-\rho}} \right]^{1+\rho}$$

$E_0(\rho)$ გალაგერის ფუნქციაა, $r_c=E_0(1)$ -გამოთვლითი სიჩქარე, $\mathbf{c}$ გამტარუნარიანობა, ხოლო $\varepsilon^{/}>0$.

ანალოგიური საზღვრების მისაღებად $0<r<r_c$ სიჩქარეების დიაპაზონში, საჭიროა ვიტერბი და ოდენვალდენის [7] მიერ შემოთავაზებული მეთოდის გამოყენება, სადაც დეკოდირება წარმოებს ვიტერბის ალგორითმით. ამ მეთოდით შესაძლებელია ხვევადი კოდების არასწორი დეკოდირების ალბათობის ექსპონენტის ზედა საზღვრის მიღება (საზღვრები ამოგდებებით), ვიტერბის ალგორითმისათვის შემდეგ ჯელინეკის [8] მიერ ეს მეთოდი განზოგადებული იქნა მიმდევრობითი დეკოდირების ალგორითმისათვისაც. შევნიშნოთ, რომ ჩვენ შემოვიფარგლებით უმეხსიერებო, სიმეტრიული არხებით, რადგანაც წრფივი კოდების (ხვევადი კოდები წრფივია) კოდური კომბინაციების გადაცემისას ასეთი არხებით, როგორც შეცდომის ალბათობა, ასევე შეცდომის ან წაშლის ალბათობა ერთიდაიგივეა ყველა გადაცემული მიმდევრობისათვის [4].

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ უმეხსიერებო სიმეტრიული არხებისათვის არსებობს ხვევადი კოდი, რომლისთვისაც შეცდომის ალბათობა და შეცდომის ან წაშლის ალბათობა შემოსაზღვრულია ზემოდან შემდეგი გამოსახულებებით:

$$p(\xi) \le K_1 e^{-nvE_c ex(r)} e^{-\alpha n v T} = K_1 e^{-nv[E_c ex(r)+\alpha T]} \tag{11}$$

$$p(\xi \cup X) \le K_1 e^{-nvE_c ex(r)} e^{\alpha n v T} = K_1 e^{-nv[E_c ex(r)+\alpha T]} \tag{12}$$

სადაც K_1–არის კონსტანტა, რომელიც დამოკიდებული არ არის ν–ზე,

$$\begin{cases} E_c ex(r) = E_x(\rho) \\ r = \dfrac{E_x(\rho)}{\rho(1+\varepsilon^{//})} \end{cases} \quad \rho \ge 1 \quad (0 < r \le \frac{r_c}{1+\varepsilon^{//}}), \quad \varepsilon^{//} > 0$$

ხოლო

$$E_x(\rho) = -\rho \ln \sum_y \sum_{y^{/}} q(\mathrm{Y}) q(\mathrm{Y}^{/}) \left[\sum \sqrt{p(\mathrm{Y}^* / \mathrm{Y}) p(\mathrm{Y}^* / \mathrm{Y}^{/})} \right]^{\frac{1}{\rho}}$$

არის გალაგერის ფუნქცია კოდების ანსამბლისათვის ამოგდებით. ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარე, მიღებული შედეგი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ თეორემის სახით:

თეორემა. მოდიფიცირებული სტეკ-ალგორითმით ხვევადი კოდების დეკოდირებისას შეცდომის ან წაშლის ალბათობის ექსპონენტის T სიდიდით შემცირებით შეიძლება მივაღწიოთ შეცდომის ალბათობის ექსპონენტის იმავე სიდიდით გაზრდას. წაშლებით დეკოდირების ამ თვისებას უწოდებენ შეცდომისა და წაშლის ალბათობების ეკვივალენტური გაცვლის თვისებას.

როგორც ცნობილია [3,4], სტეკ-ალგორითმით ხვევადი კოდების დეკოდირებისას ერთ-ერთი ძირითადი ალბათური მახასიათებელია ბუფერის გადავსების ალბათობა, რომლისთვისაც ზედა საზღვარი დაახლოებით ტოლია:

$$P\{\text{gisosSi L sigrZis StoTa stekis gadavseba}\} \approx \begin{cases} L(\Phi_{\max})^{-\rho}, r_c \le r \le \mathbf{c} \\ L(\Phi_{\max})^{-r} \mathbf{c}^{/r}, 0 < r \le r_c \end{cases} \tag{13}$$

სადაც ρ იგივე პარამეტრია, რაც (9) გამოსახულებაში, ხოლო $L(\Phi_{\max})$–შტოზე მაქსიმალურად დასაშვები ოპერაციების რიცხვი.

მეორე მხრივ, რადგანაც სტეკ-ალგორითმით ხვევადი კოდების დეკოდირებისას შეცდომის ალბათობა კოდური შეზღუდვის სიგრძის (ν) გაზრდით ექსპონენციალურად მცირდება, ხოლო დეკოდირების სიგრძე არაა დამოკიდებული ν–ზე [3,4], ამიტომ ν–ს გაზრდით ჩვენ შეგვიძლია შეცდომის ალბათობა ბუფერის გადავსების ალბათობასთან შედარებით გავხადოთ უმნიშვნელო და შედეგად შეცდომის ალბათობა შევცვალოთ ბუფერის გადავსების ალბათობით. მაგრამ, როგორც ნაჩვენებია [4]-ში ν–ს ძალიან დიდად გაზრდა პრაქტიკულად შეუძლებელია და ამავე დროს არასასურველიც. უფრო მეტიც, აქამდე ცნობილი კარგი ალგებრული კოდებისათვის (მაგ., იუსტესენის კოდები [9,10]) ν წარმოადგენს შეზღუდულ სიდიდეს. მაშასადამე ამ და სხვა ხვევადი კოდების სტეკ-ალგორითმით დეკოდირებისას ჩვენ ანგარიში უნდა გავუწიოთ როგორც ბუფერის გადავსებას, ასევე დეკოდირების ჩვეულებრივ შეცდომას.

რადგანაც ჩვენს მიერ შემოთავაზებულ ალგორითმში ბუფერის გადავსება იწვევს იგივე შედეგებს, რასაც წაშლა, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია შეცდომის ან წაშლის ალბათობა შემოვსაზღვროთ ზემოდან ბუფერის გადავსების ალბათობით და ვიპოვოთ ზღურბლის ისეთი ზედა საზღვარი, რომლისთვისაც ბუფერის გადავსების ალბათობა ჯერ კიდევ აჭარბებს შეცდომის ან წაშლის ალბათობას. ე.ი. თუ $P(\xi \cup X) < P$ {ბუფერის გადავსება}, მაშინ როგორც გამომდინარეობს (10) და (13) გამოსახულებებიდან

$$T < \frac{nvE_c(r) + \ln L - p\ln D}{nvp\alpha} = r \cdot \frac{1}{\alpha} + o(1) = T_1$$

თუ ამოვირჩევთ $T=T_1-\varepsilon_1$, სადაც $\varepsilon_1>0$, მაშინ შეცდომის ალბათობისათვის (9) გამოსახულებაში მივიღებთ:

$$p(\xi) \le Ke^{-nv\left[E_c(r)+\alpha(r\frac{1}{\alpha}-\varepsilon_1)\rho\right]} = Ke^{-nv\left[E_c(r)+E_c(r)(1-\varepsilon^{/})+\alpha\varepsilon_1\rho\right]}, \qquad r_c(1-\varepsilon^{/}) \le r \le c$$

ანალოგიურად, $0 < r \le \dfrac{r_c}{1+\varepsilon^{//}}$ სიჩქარეებისათვის თუ გამოვიყენებთ (12) და (13) გამოსახულებებს და გავითვალისწინებთ, რომ $r_c/r<\rho$ [4] მივიღებთ საზღვარს T–თვის:

$$T < \frac{nvE_c ex(r) + \ln L - \frac{r_c}{r}\ln D}{nv\alpha} = r \cdot \frac{1}{\alpha}\rho(1+o(1)) = T_2$$

თუ ამოვირჩევთ $T=T_2-\varepsilon_2$, სადაც $\varepsilon_2>0$, შეცდომის ალბათობისათვის (11) გამოსახულებიდან მივიღებთ:

$$p(\xi) \le K_1 e^{-nv\left[E_c ex(r)+\alpha(r\frac{1}{\alpha}\rho-\varepsilon_2)\right]} = K_1 e^{-nv\left[E_c ex(r)+\frac{E_c ex(r)}{1-\varepsilon^{//}}+\alpha\varepsilon_2\right]}$$

აქედან გამომდინარე, როცა $\varepsilon_1 \to \varepsilon_2 \to \varepsilon^{/} \to \varepsilon^{//} \to 0$, გადაცემის სიჩქარის $0<r<c$ ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, შეცდომის ექსპონენტა და მაჩვენებელი თითქმის ორჯერ იზრდება ვიდრე ჩვეულებრივი სტეკ-ალგორითმის გამოყენების დროს, მაშინ, როცა დეკოდირებაზე უარის თქმის შედეგად წაშლის ალბათობა (რაც დაკავშირებულია სტეკის გადავსებასთან) იგივე მნიშვნელობის რჩება.

და ბოლოს, გავიხსენოთ – ჩვენ პირობითად დავუშვით, რომ ალგორითმის ყოველ ბიჯზე სწორი ან მასთან შერწყმული არასწორი გზა აუცილებლად გაფართოვდება.

[3] ნაშრომის შედეგებიდან გამომდინარეობს: ალბათობა იმისა, რომ სწორი გზის (ან სწორ გზასთან შერწყმულ არასწორ გზას, რომელსაც აქვს უფრო დიდი მეტრიკა) მეტრიკა β სიდიდით ნაკლებია, ვიდრე სტეკის პირველ პოზიციაზე მოთავსებული გზის მეტრიკა - ექსპონენციალურად მცირდება β სიდიდის ზრდასთან ერთად. მაშასადამე, დეკოდირების თითოეულ ბიჯზე D–ს (გზათა რიცხვი, რომლებიც უნდა გაფართოვდეს) სათანადო არჩევით ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის არ იქნება სწორი გზა შეიძლება იქნეს უგულებელყოფილი $P(\xi)$–თან შედარებით. ამასთან გასათვალისწინებელია ის ფაქტი, რომ D–სიდიდის მნიშვნელოვნად გაზრდამ შეიძლება გამოიწვიოს დეკოდირების პროცედურის გართულება.

4. დასკვნა

ზემოთქმულიდან გამომდინარე ვფიქრობთ, რომ ჩვენს მიერ შემოთავაზებული ხვევადი კოდის დეკოდირების მოდიფიცირებული სტეკ-ალგორითმი ეფექტურად იმუშავებს კავშირგაბმულობის „კარგ“ არხებში. მაგალითისათვის, კოდირების კასკადურ სქემებში [11], როცა არხი წინასწარ გასუფთავებულია შიგა კოდებით, ხოლო გარე კოდების სახით გამოყენებულია ხვევადი კოდები.

ავტორი მადლობას უხდის პროფ. ს. შავგულიძეს საკითხის დასმის, ნაშრომის დეტალური გარჩევისა და სასარგებლო რჩევებისათვის.

ლიტერატურა:

1. Johanesson R., Zigangirov K.S. Fundamentals of Convolutional Coding. New York: IEEE Press, 1999
2. Jelinek F. A Fast Sequential Decoding Algorithm Using a stack. IBM J. of Res.and Developm., 1969, v.13, N6. pp.675-685
3. Forney G.D. Convolution Cods III. Sequential Decoding. Inform.and Control v25, №3,1974. pp.267-297
4. Bossert M. Channel Coding for Telecommunications. John Wiley and Sons, Ltd, 1999
5. Haccoun D. Ferguson M. Generelised Stack Algorithm for decoding Convolution Codes. IEEE Trans. Infor. Th. vol.IT-21, pp.638-651, Nov.1975
6. Форни Д. Экспоненциальные границы для ошибок в системах со стиранием, декодированием списков и решающей обратной связью. В кн. „Некоторые вопросы теории кодирования“. Москва, „Мир“ 1970. стр. 166-204
7. Viterbi A.J. , Oderualder J.P. Further Rezults on Optimal Decoding of Convolutional Codes. IEEE Transactions on Information Theory, IT-15, №6, pp. 732-734, Nov.1969
8. Jelinek F. Upper Bounols on Sequential Decoding Performense Parameters. Infirmation and Decision Theory Group, School of Electrical Engineering, Cornell Universiti, I thaca, №4.1974
9. Justesen J. New Convolutional Code Constructions and a Class of Asymptotically Good Time-vaying Cods. IEEE Transactions on Information Theory. v.19, N2, 1973. pp. 220-225
10. Justesen J. An Algebraic Construction of Rate 1/v Convolutional Codes. IEEE Transactions on Information Theory. v.IT-21, N5, 1973. pp. 577-580
11. Зяблов В., Юстесен Й., Томесек К, Шавгулидзе С. Границы расстояний каскадных кодов с единичной памятию. Проблемы передачи информации, Том 32, Вып.1, 1996, стр. 58-69.

THE MODIFIED STACK-ALGORITHM OF DECODING FOR CONVOLUTIONAL CODES WITH ERASURE

Mtvralashvili Teimuraz
Georgian Technical University

Summary

We consider the modified sequential decoding algorithm for convolution codes with erasures and show the properties of the new algorithm. The trade-off relations between error decoding and erasure decoding are obtained. The upper bound of incorrect decoding probability is obtained for discrete memoryless channels. It is proved that by means of the proposed algorithm it is possible to decrease error or erasure exponent by some variable T and at the same time to increase the error exponent by the same variable T. On the basis of obtained results we show, that it is possible for any rate of transmission (between 0 and channel capacity) to increase the error exponent twice while the probability of rejection of decoding remains the same value.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СТЕК-АЛГОРИТМ ДЕКОДИРОВАНИЯ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ СО СТИРАНИЯМИ

Мтвралашвили Т.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассматривается модифицированный стек-алгоритм последовательного декодирования сверточных кодов со стираниями и характеризующие свойства предложенного алгоритма. Показаны обменные соотношения вероятностей ошибки и стирания. Получена верхняя граница неправильного декодирования для симметричного канала без памяти. Доказано, что с помощью использования предложенного алгоритма можно за счет уменьшения показателя экспоненты вероятности ошибки или стирания на какую-то T фиксированную величину получить увеличение показателя экспоненты вероятности ошибки на ту же величину T. На основе полученного результата установлено, что с помощью модифицированного стек-алгоритма можно добится почти двухразового увеличения показателя экспоненты вероятности ошибки для всех скоростей передачи (от 0 до пропускной способности канала) по сравнению с показателем экспоненты вероятности ошибки при использовании обычного стек-алгоритма, тогда как вероятность отказа от декодирования остается той же величиной.