ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელების ოპტიმიზაციის ზოგიერთი მეთოდის შესახებ

ნელი სესაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია რეალური ეკონომიკური პროცესების ოპტიმიზაციის რამდენიმე მეთოდი მათემატიკის თანამედროვე მიღწევათა გამოყენებით. კერძოდ განიხილება სტატიკური ოპტიმიზაციის მეთოდი, დინამიკური ოპტიმიზაციის მეთოდი და თამაშთა თეორია. ამ მეთოდების გამოყენება მნიშვნელოვანია ეკონომიკის გონივრული და სწორი მართვისათვის, რაც სამომავლოდ უზრუნველყოფს ქვეყნის ეკონომიკის შემდგომ განვითარებას.

საკვანძო სიტყვები: ოპტიმიზაცია. სტატიკური ოპტიმიზაცია. დინამიკური ოპტიმიზაცია. თამაშთა თეორია.

1. შესავალი

ეკონომიკურ-მათემატიკურმა მიმართულებამ თავისი წარმოშობის მომენტიდან დღემდე განიცადა სერიოზული განვითარება და სრულყოფა. დიდია ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების როლი ეკონომიკური თეორიის განვითარებაში. მსოფლიო კონკურენციის მაღალი დონე, წარმოების და მოხმარების სულ უფრო მზარდი მასშტაბები რესურსების შეზღუდულობის პირობებში აუცილებელს ხდის ეკონომიკის მართვის პრაქტიკაში გამოყენებულ იქნას მოწინავე მათემატიკური და ინსტრუმენტული მეთოდები.

ინფორმაციული ტექნოლოგიების განვითარების თანამედროვე დონე ახალ სიცოცხლეს აძლევს რეალური ეკონომიკური პროცესების მოდელირებას. ეს უკანასკნელი შესაძლებლობას იძლევა მიღებულ იქნას ხარისხობრივი მმართველობითი გადაწყვეტილებები მნიშვნელოვან ფაქტორთა რაოდენობის გათვალისწინებით, რაც საბოლოო ჯამში ზრდის ეკონომიკის კონკურენტუნარიანობას [1,2] .

აღნიშნული საკითხები დიდ მნიშვნელობას იძენს დღევანდელი საქართველოს ეკონომიკის განვითარების პირობებში. აუცილებელი ხდება ეკონომიკის გონივრული და სწორი მართვა, რამაც სამომავლოდ უნდა უზრუნველყოს ქვეყნის ეკონომიკის შემდგომი განვითარება.

მათემატიკის თანამედროვე მიღწევათა გამოყენება ეკონომიკურ კვლევასა და შესაბამისად პრაქტიკაში რამდენიმე მიმართულებით ხორციელდება, რომელთაგან ერთ-ერთი მნიშვნელოვანია ოპტიმიზაციის მეთოდები (ანუ უფრო ზუსტად ოპერაციათა კვლევა) ეკონომიკაში. ეს ის მეთოდებია, რომლებიც ძირითადად მუშავდება მათემატიკურ დაპროგრამებაში, თამაშთა თეორიაში და ა.შ. [3]. მათემატიკური ოპტიმიზაციის მეთოდი ისეთი პროცესია, რომლის დროსაც ხდება ყველაზე საუკეთესო გადაწყვეტილებების ძებნა ამა თუ იმ კრიტერიუმის მიხედვით.

მეურნეობის რაციონალური გაძღოლის მათემატიკური ამოცანა წარმოადგენს ყველა შესაძლებელი ვარიანტების სიმრავლიდან ისეთი ინსტრუმენტული სიდიდეების მნიშვნელობათა შერჩევის ამოცანას, რომლის დროსაც მიზნობრივი ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს.

2. ძირითადი ნაწილი

სტატიკური ოპტიმიზაციის მეთოდი. მეურნეობის რაციონალური გაძღოლის მათემატიკური ამოცანა გულისხმობს დროის განსაზღვრულ მომენტში შეზღუდული რესურსების განაწილებას. ამ ამოცანის მიზნობრივი მათემატიკური ფორმულირება შეიძლება შემდეგი სახით ჩამოვაყალიბოთ. საჭიროა ვიპოვოთ ცვლადების ის მნიშვნელობები, რომლის დროსაც მოცემული ფუნქცია მიაღწევს მაქსიმუმს და დააკმაყოფილებს შეზღუდვების სისტემას. ასეთი სახით წარმოდგენილ სტატიკურ ოპტიმიზაციის ამოცანას უწოდებენ მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანას, რომელიც მათემატიკურად შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

ვიპოვოთ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ცვლადები (ინსტრუმენტები) რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგი სახის განტოლებას:

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, ..x_n) \\ g_2(x_1, x_2, ..x_n) \\ . \\ . \\ . \\ g_n(x_1, x_2, ..x_n) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

მიზნობრივი ფუნქცია ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას შემდეგი შეზღუდვების პირობებში:

$$\max F(x), \text{ როცა } g(x) = b \qquad (1)$$

არაწრფივ დაპროგრამებაში შეზღუდვათა სისტემა შედგება ორი ტიპის პირობისაგან:

1) არაუარყოფითობის პირობა

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \; . \; . \; . \; x_n \geq 0$$

2) შეზღუდვები უტოლობათა სახით

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(x) = g_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \leq b_1 \\ g_2(x) = g_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \leq b_2 \\ . \\ . \\ g_n(x) = g_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \leq b_n \end{array} \right\} \qquad (2)$$

შეზღუდვები ვექტორული ფორმით ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$x \geq 0, \;\; g(x) \leq b \qquad (3)$$

ამ ჩანაწერში შეზღუდვების ფუნქციები ($g_1(x), g_2(x) \ldots g_n$) უწყვეტად დიფერენცირებადია, შეზღუდვათა მნიშვნელობები ($b_1, b_2, \ldots b_n$) ნამდვილი რიცხვებია, 0 – 0-ისაგან შემდგარი ვექტორ-სვეტია, x - არაუარყოფითი ვექტორია.

არაწრფივი დაპროგრამების მიზანია ცვლადთა ისეთი არაუარყოფითი მნიშვნელობების პოვნა, რომლებიც დააკმაყოფილებენ (2) პირობებს და შესაბამისად მიზნობრივი ფუნქცია მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ეკონომიკური ობიექტების მართვის პრაქტიკაში უფრო მეტად გავრცელებულია წრფივი მოდელები. წრფივ დაპროგრამებაში მიზნობრივი ფუნქცია წარმოდგენილია წრფივი ფორმით:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = cx \tag{4}$$

სადაც c მოცემული ვექტორ-სტრიქონია $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

აქაც გვაქვს ორი სახის შეზღუდვა:

1) არაუარყოფითობის პირობა $x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \; . \; . \; . \; x_n \ge 0$
2) შეზღუდვები უტოლობათა სახით:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}\right\} \tag{5}$$

ვექტორული სახით შეზღუდვები ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$Ax \le b_1, x \ge 0$$

სადაც, A - (mxn) განზომილებიანი მატრიცაა

$$A = \left\{\begin{array}{l} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{array}\right\}$$

წრფივი დაპროგრამების ამოცანის მიზანია მოიძებნოს ცვლადთა ისეთი არაუარყოფითი მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შეზღუდვებს და მიზნის ფუნქციას ანიჭებენ მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

დინამიკური ოპტიმიზაციის მეთოდი. ოპტიმიზაციის დინამიკური ამოცანა წარმოადგენს შეზღუდული რესურსების განაწილების ამოცანას ურთიერთკონკურენტული მიზნების კომპლექსის მისაღწევად განსაზღვრული დროის შუალედში. მათემატიკურ ტერმინებში ეს ამოცანა ჩამოყალიბდება შემდეგი სახით: ამოცანა მდგომარეობს მართვის სიმრავლიდან დროზე დამოკიდებული მმართველი პარამეტრების შერჩევაში. ცვლადი სიდიდეების გარკვეული რაოდენობას ვუწოდებთ მმართველი პარამეტრებს. დროზე დამოკიდებული ფუნქციათა სიმრავლეს კი - მართვის სიმრავლეს. შერჩეული დროის ფუნქციები განსაზღვრავენ თავის მხრივ თუ როგორი სახე ექნებათ დროზე დამოკიდებულ სხვა ცვლადებს, რომლებიც განსაზღვრავენ სისტემის ყოფაქცევას. ამ ცვლადებს უწოდებენ ფაზურ კოორდინატებს. ფაზური კოორდინატების მნიშვნელობები დროის ყოველ მომენტში შეირჩევა ისე, რომ მიღწეულ იქნას მიზნობრივი ფუნქციონალის მაქსიმუმი.

დრო t წარმოადგენს უწყვეტ სიდიდეს და იცვლება ფიქსირებულ შუალედში $t_0 \le t \le t_1$., t_0 საწყისი მნიშვნელობიდან (რომელიც ცნობილია) საბოლოო t_1 მომენტამდე., რომლის მნიშვნელობაც ოპტიმიზაციის უმეტეს ამოცანაში ხშირად უნდა განისაზღვროს.

სისტემის მდგომარეობა ამ შუალედში ხასიათდება $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ ფაზური კოორდინატებით, რომელიც წარმოადგენს ფაზურ ვექტორ-სტრიქონს:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \tag{6}$$

გეომეტრიული თვალსაზრისით ფაზური ტრაექტორია წარმოადგენს მრუდს, რომლის წერტილებიც ეკუთვნის E^n სივრცეს.

გადაწყვეტილებები, $u_1(t)$ და $u_2(t)$ რომლებიც უნდა მიღებულ იქნას დროის ყოველ მოცემულ მომენტში t მითითებულ ინტერვალიდან, წარმოადგენს ვექტორული სახის მართვის ფუნქციებს

$$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t) \tag{7}$$

და გეომეტრიული ინტერპრეტაციით იგი წარმოადგენს E^n სივრცის წერტილს, რომელსაც მართვის ფუნქცია ეწოდება.

$$\{u(t)\} = \{v(t) \in E\} \quad t_0 \le t \le t_1 \tag{8}$$

მოითხოვება, რომ თითოეული მმართველი პარამეტრი წარმოადგენდეს უბან-უბან დროის უწყვეტ ფუნქციას. ამიტომ მართვა წარმოადგენს უბან-უბან დროის უწყვეტ ფუნქციას. ამ ფუნქციის მნიშვნელობებს მითითებული შუალედიდან t დროის ყოველ მოცემულ მომენტში ეწოდებათ მართვის ვექტორები (8). მმართველი პარამეტრების შესაძლო მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ შეზღუდვებს.

$$(U(t) \in \Omega, \qquad t_0 \le t \le t_1$$

ჩვეულებრივ ითვლება, რომ Ω მართვის არე წარმოადგენს ამოზნექილს და კომპაქტურს (ანუ ჩაკეტილს და შეზღუდულს), რომელიც ინვარიანტულია დროის მიმართ.

ფაზური ტრაექტორია $X(t)$ განისაზღვრება მოძრაობის განტოლებიდან, რომელიც წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელშიც ფაზური კოორდინატების ცვლილების სიჩქარე წარმოდგენილია როგორც ფაზური კოორდინატების, მმართველი პარამეტრისა და დროის ფუნქცია:

$$\frac{dx_\partial}{dt}(t) = x_j(t) = F_j(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

$$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t); t), j = 1,2,3,\ldots,n \tag{9}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც (9) დიფ. განტოლება არ არის ცხადად დამოკიდებული დროზე, მაშინ მოძრაობის განტოლებათა სისტემას უწოდებენ ავტონომიურს. მიზნობრივი ფუნქციონალს, რომლის მაქსიმალურ მნიშვნელობასაც ვეძებთ ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$J = J\{u(t)\} = \int \left| x(t), u(t), t \right) dt + F(x, t_1) \tag{10}$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია გვიჩვენებს, რომ ფუნქციონალი დამოიდებულია ფაზურ კოორდინატებზე და მართვის პარამეტრებზე, რომლებიც დროის ფუნქციას წარმოადგენს:

$$\left|(x, u, t) = \right| \quad x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \quad u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t) \quad \text{სადაც}, \ t_0 \le t \le t \tag{11}$$

F -პარამეტრების ფუნქცია – გვიჩვენებს ფუნქციონალის დამოკიდებულებას საბოლოო მდგომარეობასა და დროის საბოლოო მომენტზე

$$F(x \cdot t) = F(\ x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))\ ;\ \ t_1)$$

მიზნობრივი ფუნქციონალი (10) ჩაწერილია ფუნქციონალის სახით. ითვლება, რომ T და F წარმოადგენენ ფიქსირებულ უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციას.

თამაშთა თეორია. უკანასკნელ წლებში გაიზარდა თამაშთა თეორიის როლო ეკონომიკურ და სოციალურ მეცნიერების მრავალ სფეროში. ეკონომიკაში იგი გამოიყენება არა მხოლოდ საერთო სამეურნეო ამოცანების გადასაწყვეტად, არამედ საწარმოოს სტრატეგიული პრობლემების ანალიზისთვის, საორგანიზაციო სტრუქტურების და სტიმულირების სისტემის შემუშავებისათვის.

ამ თეორიის ჩასახვა უკავშირდება 1944 წელს გამოცემულ ჯ. ნეიმანისა და ო. მორგენშტერნის მონოგრაფიას „თამაშთა თეორია და ეკონომიკური ყოფაქცევა'' ზოგიერთმა იგი შეაფასა, როგორც რევოლუცია ეკონომიკურ თეორიაში. ეს მოსაზრება არ არის ძალზე თამამი, რადგან ახალი თეორია თავიდანვე მიზნად ისახავდა რაციონალური ქცევის აღწერას ურთიერთდაკავშირებულ სიტუაციებში გადაწყვეტილების მიღებისას. ისეთი სფერო როგორიცაა სტრატეგიული ქცევა, კონკურენცია, კოოპერაცია წარმოადგენს ძირითადს თამაშთა თეორიაში უკავშირდება უშუალოდ მართვის ამოცანას.

თამაშთა თეორიის პირველი ნაშრომები გამოირჩეოდა მაღალი ხარისხის ფორმალური აბსტრაქციით, რაც მათ ნაკლებად გამოსადეგს ხდიდა პრაქტიკაში.

სამრეწველო ეკონომიკის პროგრესმა ფართოდ გაუღო კარი თამაშთა თეორიას გამოყენებით სფეროში. უკანასკნელ ხანს მისმა მეთოდებმა დაიპყრეს მართვის სფერო. უნდა აღინიშნოს, რომ უკვე 1980 წელს ამერიკელმა ეკონომისტმა მ. პორტერმა შემოიტანა ისეთი ცნებები, როგორიცაა ''სტრატეგიული სვლა'' და ''მოთამაშე''.

მაგალითად გამოდგება გადაწყვეტილებები, რომლებიც ეხება საფასო პროდუქციის გატარებას, ახალი ბაზრების დაპყრობას, საწარმოების შექმნას, ინოვაციას, ვერტიკალური ინტეგრაციის სფეროში ლიდერების და შემსრულებლების გამოკვეთას. ამ თეორიის დებულებები გამოსადეგია ყველა სახის გადაწყვეტილებების მიღებისას, თუ ამ გადაწყვეტილებებზე ზეგავლენას ახდენენ სხვა მოქმედი პირობებიც. ეს პირობები ან მოთამაშეები არ არის აუცილებელი იყვნენ საბაზრო კონკურენტები; მათ როლში შეიძლება იყვნენ სუბმიმწოდებლები, წამყვანი კლიენტები, ორგანიზაციის თანამშრომლები კოლეგები და ა.შ.

თამაშთა თეორიის ინსტრუმენტები გამოიყენება როცა თანამონაწილეთა შორის არსებობს მნიშვნელოვანი ურთიერთდამოკიდებულება გადახდის დარგში. თამაშთა თეორიის გამოყენებას აქვს თავის საზღვრებიც. ზოგიერთ შემთხვევაში თამაშთა თეორიის ინსტრუმენტები გამოსაყენებელია მხოლოდ დამატებითი ინფორმაციის მიღების შემთხვევაში.

ექსპერიმენტულად დამტკიცებულია, რომ თამაშის გაფართოებისას 10-ზე მეტი ეტაპით მოთამაშეები ვეღარ იყენებენ შესაბამის ალგორითმებს და ვერ ახერხებენ თამაშის გაგრძელებას წონასწორული სტრატეგიებით.

თამაშთა თეორია რთული დარგია. მისი გამოყენებისას უნდა დავიცვათ სიფრთხილე და გამოყენების საზღვრები. გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ შესაბამისი ინსტრუმენტების გამოყენება უპრიანია ერთჯერადად, პრინციპულად მნიშვნელოვან საგეგმო სტრატეგიულ გადაწყვეტილებების მიღებისას, მათ შორის მსხვილ კოოპერატიულ ხელსეკრულებათა მომზადებისას.

3. დასკვნა

ამრიგად, ინფორმაციული ტექნოლოგიების განვითარების თანამედროვე დონე განაპირობებს მიღებულ იქნას ხარისხობრივი მმართველობითი გადაწყვეტილებები მნიშვნელოვან ფაქტორთა რაოდენობის გათვალისწინებით, რაც საბოლოო ჯამში ზრდის ეკონომიკის კონკურენტუნარიანობას

ნაშრომში განხილულია რეალური ეკონომიკური პროცესების ოპტიმიზაციის რამოდენიმე მეთოდი მათემატიკის თანამედროვე მიღწევათა გამოყენებით. აღნიშნული საკითხები დიდ მნიშვნელობას იძენს დღევანდელი საქართველოს ეკონომიკის განვითარების პირობებში. აუცილებელი ხდება ეკონომიკის გონივრული და სწორი მართვა, რაც სამომავლოდ უზრუნველყოფს ქვეყნის ეკონომიკის შემდგომ განვითარებას.

ლიტერატურა

1. Белкин В. Д. Экономические измерения и планирование.– М.: Мысль, 2000.
2. А.Лотов. Введение в экономико-математическое моделироание. М.:Наука. 2001.
3. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1998.

ABOUT SOME METHODS OF OPTIMIZATION OF ECONOMIC-MATHEMATICAL MODELS

Sesadze Neli
Georgian Technical University

Summary

In article it is considered methods of optimization of real economic processes with using of modern achievements in sphere of mathematics: statistical dynamic methods of optimization and the theory of games. The using of these methods provides development of economy, and raises its competitiveness.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ОПТИМИЗАЦИИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Сесадзе Н.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассматриваются методы оптимизации реальных экономических процессов с использованием современных достижениий в сфере математики: статистический и динамический методы оптимизации и теория игр. Использование этих методов обеспечивает развитие экономики и повышает ее конкурентоспособность.