გლობალური ოპტიმიზაციის მეთოდების ეფექტურობის ექსპერიმენტული შეფასება

ნოდარ ჯიბლაძე, ლელა გაჩეჩილაძე, თეიმურაზ იმედაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია გლობალური ოპტიმიზაციის მეთოდები: Ψ-გარდაქმნის მეთოდი, სიმძიმის ცენტრების მეთოდი და ექსტრემუმის ძებნის სხვადასხვა კომბინირებული მეთოდები. აღნიშნული მეთოდების ეფექტურობის შესაფასებლად ტესტურ ფუნქციებზე ჩატარებულია გამოთვლითი ექსპერიმენტები და გაანალიზებულია მიღებული შედეგები. შედარებითი ანალიზის საფუძველზე უპირატესობა ენიჭება სიმძიმის ცენტრების მეთოდს, რომელიც დასაშვები სიზუსტითა და მინიმალური დანაკარგებით უზრუნველყოფს გლობალური ექსტრემუმის მოძებნას.

საკვანძო სიტყვები: გლობალური ოპტიმიზაცია, ეფექტურობა, ექსპერიმენტული შეფასება, სიმძიმის ცენტრების მეთოდი, Ψ-გარდაქმნის მეთოდი, კომბინირებული მეთოდები.

1. შესავალი

გლობალური ოპტიმიზაციის ამოცანების გადაწყვეტა სერიოზულ პრობლემებთან არის დაკავშირებული, რაც, ძირითადად, საოპტიმიზაციო ფუნქციის მულტიმოდალურობითაა განპირობებული. საინჟინრო პრაქტიკაში გლობალური ოპტიმიზაციის ამოცანების გადასაწყვეტად ძირითადად გამოყენებულია Ψ-გარდაქმნის მეთოდი [1], სიმძიმის ცენტრების მეთოდი [2,3] და ექსტრემუმის ძებნის სხვადასხვა კომბინირებული მეთოდები [3]. ნაშრომში განხილულია შედეგები აღნიშნული მეთოდების შედარებითი ანალიზისა, რომელიც ჩატარებულია გამოთვლითი ექსპერიმენტის საფუძველზე.

2. ძირითადი ნაწილი

როგორც ცნობილია, მეთოდის შეფასების რამდენიმე კრიტერიუმი არსებობს, მაგალითად, სიზუსტის მიხედვით, სწრაფქმედების მიხედვით, შესაბამისი პროგრამული რეალიზაციის სირთულის მიხედვით და ა.შ. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ თითქმის ყველა შემთხვევაში საჭიროა ამოცანის შედეგის რაც შეიძლება სწრაფად მიღება, მაშინ მეთოდის შეფასება სწრაფქმედების მიხედვით ყველაზე არსებითია და იგი უნივერსალურ კრიტერიუმს წარმოადგენს.

ოპტიმიზაციის ამოცანებში სწრაფქმედება რაოდენობრივი თვალსაზრისით შეიძლება დახასიათდეს ძებნის დანაკარგების რიცხვით ρ, რაც საოპტიმიზაციო $f(x)$ ფუნქციის გამოთვლის რაოდენობასთანაა დაკავშირებული. ექსტრემუმის ძებნის მეთოდებში საოპტიმიზაციო ფუნქციის გამოთვლა, დანარჩენ ლოგიკურ ოპერაციებთან შედარებით, ყველაზე შრომატევად და მრავალჯერ გამეორებად პროცედურას წარმოადგენს. ამდენად, მისი საშუალებით მეთოდის შრომატევადობის ანუ ძებნის დანაკარგების შეფასება გარკვეულწილად გამართლებულია. ცხადია, მეთოდი, რომელიც ექსტრემუმის გარკვეული სიზუსტით მოსაძებნად საოპტიმიზაციო ფუნქციის გამოთვლას ნაკლები რაოდენობით საჭიროებს, მეტი სწრაფქმედებითა და ეფექტურობით ხასიათდება.

ექსტრემუმის ძებნის მრავალრიცხოვან მეთოდებში $f(x)$ ფუნქციის გამოთვლის რაოდენობა მნიშვნელოვნად დამოკიდებულია ძებნის საწყის $x^{(0)}$ წერტილზე. $x^{(0)}$ წერტილი რაც უფრო დაშორებულია ექსტრემუმის x^* წერტილიდან, მის მოსაძებნად მით უფრო მეტი რაოდენობის ფუნქციის გამოთვლაა საჭირო და ძებნის დანაკარგებიც შესაბამისად იზრდება. ამგვარად, $\rho = \rho[f(x), x^{(0)}]$ დამოკიდებულია როგორც $f(x)$ ფუნქციის გამოთვლის რაოდენობაზე, ისე საწყისი $x^{(0)}$ წერტილის მდებარეობაზეც.

სწრაფქმედების მიხედვით მეთოდის ეფექტურობის შეფასება შესაძლებელია როგორც თეორიულად, ისე ექსპერიმენტულად. ვინაიდან თეორიული შეფასება შეიძლება განხორციელებულ იქნეს ამოცანების მხოლოდ შეზღუდული კლასისათვის, ამიტომ, მოცემულ ნაშრომში ოპტიმიზაციის გლობალური მეთოდების ეფექტურობა შეფასებულია ექსპერიმენტების საშუალებით ანუ ტესტური ამოცანების ამოხსნის საფუძველზე. ამ მიზნით შერჩეულია ისეთი ტესტური ამოცანები, სადაც ადგილი აქვს კრიტიკული შემთხვევების მოდელირებას, როგორიცაა ასიმეტრიულობა, მულტიმოდალურობა, „ვიწრო ხევი“ და სხვ. ტესტური ფუნქციების ექსტრემუმის წერტილის სხვადასხვა მეთოდებით ε სიზუსტით მოძებნისა და ძებნის შესაბამისი ρ დანაკარგების მიხედვით შეიძლება ვიმსჯელოთ ამა თუ იმ მეთოდის ეფექტურობაზე.

ექსპერიმენტისათვის შერჩეულ იქნა ორი სხვადასხვა სირთულის ტესტური ამოცანა. პირველი ტესტური ამოცანა წარმოდგენილი იყო იზონ-ფენტონის ფუნქციით [4]

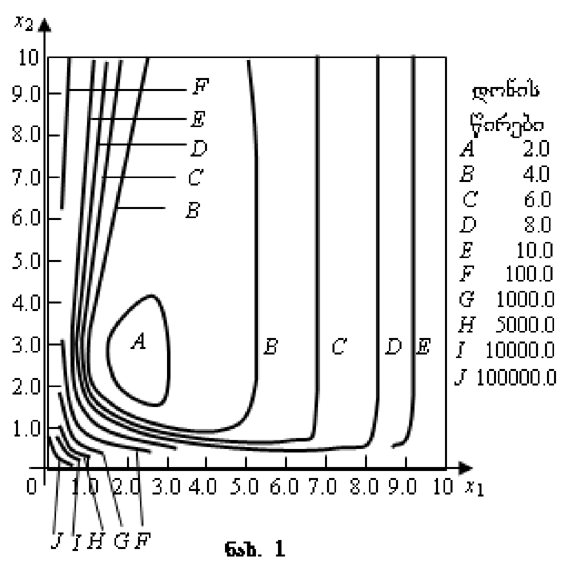
$$f(x) = 0.1\left[12 + x_1^2 + \frac{1 + x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 x_2^2 + 100}{(x_1 x_2)^4}\right], \tag{1}$$

რომლის ტოპოლოგია გამოსახულია ნახ. 1-ზე. აღნიშნული ფუნქციის მინიმუმის წერტილია $x^* = [1.742;\ \ 2.026]$, სადაც $f^* = f(x^*) = 1.744$. გეომეტრიულად იზონ-ფენტონის ფუნქცია ე.წ. "ასიმეტრიულ ხეობას" ასახავს.

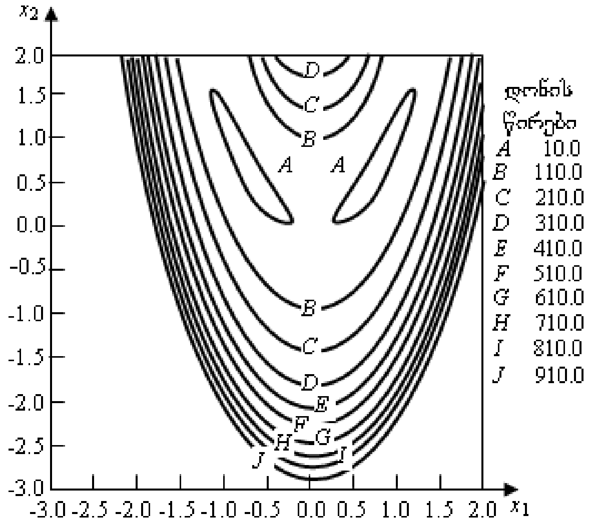
მეორე შემთხვევაში ტესტურ ფუნქციას წარმოადგენდა ვუდის ფუნქცია [4]

$$\begin{aligned} f(x) = {} & 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^2 + \\ & + 10.1[(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2] + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1), \end{aligned} \tag{2}$$

რომლის ტოპოლოგია, როცა $x_3 = x_4 = 1.0$, მოცემულია ნახ. 2-ზე. (2) ფუნქცია, გარდა იმისა, რომ მკვეთრად გამოხატული "ხევებით" ხასიათდება, მულტიმოდალურია. მას მოცემულ არეში ორი ექსტრემუმი გააჩნია, რომელთაგან $x_I^* = [1.0;\ 1.0;\ 1.0;\ 1.0]$ გლობალური მინიმუმის წერტილია, სადაც $f_I^* = f(x_I^*) = 0$, ხოლო $x_{II}^* = [-1.0;\ 1.0;\ 1.0;\ 1.0]$ - ლოკალური მინიმუმის წერტილი, სადაც $f_{II}^* = f(x_{II}^*) = 4$.



ნახ. 1



ნახ. 2

გლობალური ექსტრემუმის ძებნის მეთოდების ეფექტურობის შესაფასებლად და მათი შესაძლებლობების გამოვლენის მიზნით ორივე ტესტური ამოცანა გადაწყვეტილ იქნა ექვსი სხვადასხვა მეთოდით, მათ შორის Ψ-გარდაქმნის მეთოდით [1], სიმძიმის ცენტრების მეთოდით [2,3] და კომბინირებული ძებნის ოთხი სხვადასხვა მოდიფიკაციით [3], როგორიცაა მონტე-კარლოს და ჰუკი-ჯივსის (პირველი მოდიფიკაცია), მონტე-კარლოს და მუდმივბიჯიანი გრადიენტული (მეორე მოდიფიკაცია), მონტე-კარლოს და ფლეთჩერ-რივსის (მესამე მოდიფიკაცია), მონტე-კარლოს და დევიდონ-ფლეთჩერ-პაუელის (მეოთხე მოდიფიკაცია) მეთოდების საფუძველზე შემუშავებული ალგორითმული კომბინაციები.

კომბინირებული ძებნის მეთოდებში, რომლებშიც გრადიენტული ტიპის ალგორითმებია გამოყენებული, საოპტიმიზაციო ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები რიცხვითი აპროქსიმაციის საფუძველზე განისაზღვრება. წარმოებულის რიცხვითი აპროქსიმაციისათვის საოპტიმიზაციო პარამეტრის ნაზრდის სიდიდედ მიღებულია შემდეგი მნიშვნელობა $\Delta x = 10^{-6}$.

ყველა მეთოდში ექსტრემუმის ძებნა ერთი და იგივე დასაშვებ არეში განხორციელდა. პირველი ტესტური ამოცანის გამოკვლევის შედეგები მოცემულია 1-ელ ცხრილში, ხოლო მეორე ტესტური ამოცანის შედეგები - მე-2 ცხრილში. ექსპერიმენტებიდან ნათლად ჩანს მეთოდების სტრატეგიული ასპექტები და დამახასიათებელი თვისებები.

ექსტრემუმის მოძებნის სიზუსტის მიხედვით კომბინირებული მეთოდებიდან აღსანიშნავია პირველი და მესამე მოდიფიკაციები, რომელშიც შესაბამისად რეალიზებულია მონტე-კარლოსა და ჰუკი-ჯივსის და მონტე-კარლოსა და ფლეთჩერ-რივსის ალგორითმული კომბინაციები, თუმცა მათი ძებნის დანაკარგები საწყისი წერტილის სხვადასხვა მნიშვნელობის დროს სხვადასხვანაირია. მართალია, კომბინირებული ძებნის მეოთხე მოდიფიკაცია შედარებით ნაკლები დანაკარგებით გამოირჩევა, მაგრამ ხასიათდება შედარებით დაბალი სიზუსტით.

ასევე დაბალი სიზუსტით გამოირჩევა Ψ-გარდაქმნის მეთოდი, თუმცა სიმძიმის ცენტრების მეთოდთან შედარებით ნაკლები დანაკარგებით ხასიათდება.

ცხრ.1

№	მეთოდი	ძებნის არე	საწყისი წერტილი $x^{(0)}$	ბიჯი H	სიზუსტე ε	შედეგი		ძებნის დანაკარგი ρ
						f^*	$x^* = [x_1^*; x_2^*]$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	კომბინირებული ძებნის პირველი მოდიფიკაცია.	$0 \le x_j \le 5$	[3.53; 2.67] [2.90; 1.45] [1.51; 3.87] [0.07; 3.80] [4.07; 3.54]	0.5	10^{-10}	1.744152 1.744152 1.744152 1.744152 1.744152	[1.743737; 2.029621] [1.743593; 2.029312] [1.743740; 2.029701] [1.743588; 2.029619] [1.743450; 2.030190]	154 142 151 162 192
2	კომბინირებული ძებნის მეორე მოდიფიკაცია.	$0 \le x_j \le 5$	[3.53; 2.67] [2.90; 1.45] [1.51; 3.87] [0.07; 3.80] [4.07; 3.54]	0.5	10^{-10}	1.749289 1.744939 1.749149 1.745994 1.745458	[1.689113; 2.192299] [1.746475; 1.966475] [1.733347; 2.202880] [1.808165; 2.012943] [1.695644; 2.081510]	19 27 19 43 63
3	კომბინირებული ძებნის მესამე მოდიფიკაცია.	$0 \le x_j \le 5$	[3.53; 2.67] [2.90; 1.45] [1.51; 3.87] [0.07; 3.80] [4.07; 3.54]	-	10^{-10}	1.744157 1.744155 1.744154 1.744153 1.744173	[1.740113; 2.030205] [1.745504; 2.026184] [1.745419; 2.030277] [1.745009; 2.028644] [1.740646; 2.040189]	48 48 75 126 57
4	კომბინირებული ძებნის მეოთხე მოდიფიკაცია.	$0 \le x_j \le 5$	[3.53; 2.67] [2.90; 1.45] [1.51; 3.87] [0.07; 3.80] [4.07; 3.54]	-	10^{-10}	1.744152 1.744152 1.744152 1.744159 1.744152	[1.743542; 2.028710] [1.743673; 2.029404] [1.743064; 2.029746] [1.747420; 2.028104] [1.743803; 2.029837]	90 90 96 111 117
5	სიმძიმის ცენტრების მეთოდი.	$0 \le x_j \le 5$	-	1.0	10^{-10}	1.744152	[1.743867; 2.029177]	144
6	Ψ - გარდაქმნის მეთოდი	$0 \le x_j \le 5$	-	-	-	1.744676	[1.772867;1.992177]	110

რაც შეეხება სიმძიმის ცენტრების მეთოდს, იგი დამაკმაყოფილებელი სიზუსტით უზრუნველყოფს გლობალური ექსტრემუმის მოძებნას. სწრაფქმედების მიხედვით მისი ეფექტურობა საწყისი წერტილის შერჩევაზე არ არის დამოკიდებული. სხვადასხვა სირთულის ამოცანების გადაწყვეტის დროს მის დანაკარგებს ძირითადი სტატისტიკური ცდების რაოდენობა და ექსტრემუმის ძებნის საბოლოო სტადიაზე გამოყენებული დამხმარე ალგორითმი განაპირობებს. პირველ ტესტურ ამოცანაში დანაკარგები შეადგენს $\rho = 144$, ხოლო მეორე ტესტურ ამოცანაში - $\rho = 257$.

ორივე ამოცანაში ძებნის დანაკარგების მიხედვით სტაბილურობა სიმძიმის ცენტრების მეთოდის ეფექტურობის მაჩვენებელია დიდი განზომილების ამოცანებში, სადაც დამოუკიდებელი n ცვლადების რაოდენობის გაზრდა პირველი და მეორე რიგის დეტერმინირებული მეთოდების შრომატევადობის მნიშვნელოვან ზრდას იწვევს როგორც ამოზნექილი, ისე არაამოზნექილი ფუნქციებისთვის.

ცხრ.2

№	მეთოდი	ძებნის არე	საწყისი წერტილი $x^{(0)}$	სი-ზუ-სტე ε	შედეგი		ძებნის დანა-კარგი ρ
					f^*	$x^* = [x_1^*; x_2^*; x_3^*; x_4^*]$	
1	2	3	4	5	8	9	10
1	კომბინირებუ-ლი ძებნის პირველი მო-დიფიკაცია.	$-4 \le x_j \le 4$	[1.6; 0.3; 0.6; -1.7] [-1.6; 2.2; -3.9; 2.1] [2.5; 1.7; -3.6; -0.7] [2.9; 2.3; -1.0; 3.7] [3.0; -3.6; 3.6; -1.1]	10^{-10}	0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000	[0.999980; 0.999960; 1.000020; 1.000040] [1.000005; 1.000011; 0.999994; 0.999988] [1.000004; 1.000007; 0.999998; 0.999996] [1.000005; 1.000009; 0.999997; 0.999995] [0.999967; 0.999934; 1.000034; 1.000068]	1365 2121 2050 2041 1503
2	კომბინირებუ-ლი ძებნის მე-ორე მოდიფი-კაცია.	$-4 \le x_j \le 4$	[1.6; 0.3; 0.6; -1.7] [-1.6; 2.2; -3.9; 2.1] [2.5; 1.7; -3.6; -0.7] [2.9; 2.3; -1.0; 3.7] [3.0; -3.6; 3.6; -1.1]	10^{-10}	0.000002 7.878891 1.281121 1.797966 0.000001	[1.000764; 1.001516; 0.999236; 0.998469] [-0.936229; 0.886802; -1.008529; 1.027782] [1.396713; 1.952798; 0.138166; 0.020654] [1.380741; 1.908118; -0.113898; 0.023730] [0.999491; 0.998974; 1.000504; 1.001011]	26550 563 750 8526 35304
3	კომბინირებუ-ლი ძებნის მე-სამე მოდიფი-კაცია.	$-4 \le x_j \le 4$	[1.6; 0.3; 0.6; -1.7] [-1.6; 2.2; -3.9; 2.1] [2.5; 1.7; -3.6; -0.7] [2.9; 2.3; -1.0; 3.7] [3.0; -3.6; 3.6; -1.1]	$5.\ 10^{-4}$	0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000	[0.999956; 0.999922; 0.999953; 0.999915] [0.999797; 0.999603; 1.000121; 1.000252] [0.999938; 0.999886; 0.999987; 0.999983] [1.000053; 1.000117; 0.999861; 0.999732] [0.999967; 0.999944; 0.999950; 0.999910]	1750 2550 1695 4760 4000
4	კომბინირებუ-ლი ძებნის მე-ოთხე მოდი-ფიკაცია.	$-4 \le x_j \le 4$	[1.6; 0.3; 0.6; -1.7] [-1.6; 2.2; -3.9; 2.1] [2.5; 1.7; -3.6; -0.7] [2.9; 2.3; -1.0; 3.7] [3.0; -3.6; 3.6; -1.1]	10^{-10}	1.917398 1.897740 1.051384 1.684207 1.706841	[-0119485; 0.011443; 1.433985; 2.061155] [0.006037; -0.008452; -1.373518; 1.897740] [1.380120; 1.904623; 0.252023; 0.065664] [1.400145; 1.967949; -0.055214; 0.019213] [0.291808; 0.045007; 1.310707; 1.706841]	1950 365 235 1530 850
5	სიმძიმის ცენ-ტრების მეთო-დი	$-4 \le x_j \le 4$	-	10^{-10}	0.000000	[1.000035; 1.000069; 0.999965; 0.999930]	257
6	Ψ-გარდაქმნის მეთოდი	$-4 \le x_j \le 4$	-	-	27.10958	[0.307386; 0.548912; -1.091561; 1.119176]	220

3. დასკვნა

ამგვარად, ტესტურ ამოცანებზე ჩატარებული ექსპერიმენტების საფუძველზე შეიძლება და-ვასკვნათ შემდეგი. სიმძიმის ცენტრების მეთოდი მიახლოებითი მეთოდია, რომელიც დასაშვები სი-ზუსტით გლობალური ექსტრემუმის განსაზღვრის საშუალებას იძლევა. სწრაფქმედების მიხედვით მისი ეფექტურობა არ არის დამოკიდებული საწყისი წერტილის შერჩევაზე და ამიტომ სხვადასხვა სირთულის ამოცანების გადაწყვეტის დროს მის დანაკარგებს ძირითადი სტატისტიკური ცდების რაოდენობა განაპირობებს. N რაოდენობის სტატისტიკური ცდების ჩატარების შედეგად, იგი შედა-რებით სწრაფად ახდენს გლობალური ექსტრემუმის მიდამოს ლოკალიზებას, რომელშიც ნებისმი-ერი ლოკალური დეტერმინირებული მეთოდით შესაძლებელია ოპტიმუმის დაზუსტება.

სიმძიმის ცენტრების მეთოდის ეფექტურობა განსაკუთრებით თვალსაჩინოა დიდი განზომილების ამოცანებში, სადაც დამოუკიდებელი n ცვლადების რაოდენობის გაზრდა პირველი და მეორე რიგის დეტერმინირებული მეთოდების შრომატევადობის ზრდას იწვევს დაახლოებით n^2-ჯერ კვადრატული ფუნქციებისათვის და n^3-ჯერ არაკვადრატული ფუნქციებისთვის.

ლიტერატურა

1. Чичинадзе В.К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. М.: Наука, 1983
2. ჯიბლაძე ნ. ოპტიმიზაციის სტატიკური ამოცანების გადაწყვეტა სიმძიმის ცენტრების მეთოდით. „ინტელექტი", 1998, №3. 106-109 გვ.
3. ჯიბლაძე ნ., თოფჩიშვილი ა. სტატიკური ოპტიმიზაციის რიცხვითი მეთოდები (მონოგრაფია). მართვის სისტემების ინსტიტუტი. თბილისი. 2001
4. Реклейтис Г., Рейвендран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике, т.1. М.: Мир, 1986

EXPERIMENTAL ESTIMATION OF EFFICIENCY OF GLOBAL OPTIMIZATION METHODS

Jibladze Nodar, Gachechiladze Lela, Imedadze Teimuraz
Georgian Technical University

Summary

Methods of global optimization are considered: a method of Ψ-transformation, a method of the centers of gravity and the various combined methods of search of an extremum. For an estimation of their efficiency computational experiments on test functions are carried out and the received results are analyzed. On the basis of the comparative analysis the preference is given to a method of the centers of gravity which with satisfactory accuracy and the minimal losses on search provides solving for the global optimum.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Джибладзе Н., Гачечиладзе Л., Имедадзе Т.
Грузинский технический Университет

Резюме

Рассмотрены методы глобальной оптимизации: метод Ψ-преобразования, метод центров тяжести и различные комбинированные методы поиска экстремума. Для оценки их эффективности проведены вычислительные эксперименты на тестовых функциях и проанализированы полученные результаты. На основе сравнительного анализа предпочтение отдается методу центров тяжести, который с удовлетворительной точностью и минимальными потерями на поиск обеспечивает нахождение глобального экстремума.