Transactions. Georgian Technical University. AUTOMATED CONTROL SYSTEMS - No 1(2), 2007

PETRINETZE IN DER WELT DER SYSTEMMODELLE: GLEICHUNGS- UND UNGLEICHUNGS-INVARIANTEN ELEMENTARER SYSTEMNETZE

Wolfgang Reisig
Humboldt Universität zu Berlin, Institut für Informatik,
Leiter des Lehrstuhles Theorie der Programmierung

Zusammenfassung

Die Struktur und das Verhalten der elementaren Systemnetze kann man in gewöhnlicher linearen Algebra vorstellen. Sie beschreiben mit Hilfe der Vektore und der Matrizen. Zugleich man kann die Gleichungssysteme bilden und auf solche Weise die Eigenschaften der elementaren Systemnetze ausrechnen. In der Arbeit werden einige theoretischen Algorithmen und die praktischen Beispiele auf der Basis der invarianten Gleichungen, Ungleichungen und ihrer Kombinationen angeboten.

Schlüsselworte: Petrinetze. Elementare Systemnetze. Inzidenzmatrix. Gleichungssysteme. Gleichungs-Invarianten-Theorem. Ungleichungssysteme. Wahrheitswert.

1. Einleitung

Mit Petrinetzen modelliert man Systeme. Oft ist ein Rechner wesentlicher Bestandteil eines modellierten Systems. Auftraggeber, Anwender und Implementiererin sollen an Hand des Modells besser verstehen, was das System leistet, wie man es verwenden, erg¨anzen und ver¨andern kann.

Besonders geeignet sind Petrinetz-Modelle für *verteilte* und *reaktive* Systeme. Sie haben nicht unbedingt einen eindeutigen sequentiellen Kontrollfluss und sie interagieren mit ihrer Umgebung nicht nur zu Beginn und am Ende einer Berechnung. Solche Systeme bilden den größten Teil rechnerintegrierter Systeme. Es gibt eine Vielzahl von Methoden und Modellen für verteilte und reaktive Systeme. Sie alle haben ihre Vorzüge, ihre bevorzugten Anwendungsgebiete, Anwendergruppen, Werkzeuge.

Petrinetze gehören zu den Ältesten Systemmodellen. Über Jahrzehnte wurden interessante theoretische Fragen gestellt und gelöst, spezielle Teilklassen untersucht,Werkzeuge entwickelt, Fallstudien realisiert. Sie sind nie, wie einige andere Methoden, eine Weile bevorzugt und dann vergessen worden, sondern hatten über die Jahrzehnte ihren Platz in der Methodenvielfalt. Im Laufe der Zeit ist das Interesse an der Integration mit anderen einem gelegentlichen Hang zur Abgrenzung gewichen.

2. Gleichungs-Invarianten elementarer Systemnetze

Struktur und Verhalten elementarer Systemnetz kann man in konventioneller linearer Algebra fassen, also mit Vektoren und Matrizen beschreiben. Damit kann man dann Gleichungssysteme bilden und so Eigenschaften elementarer Systemnetze ausrechnen.

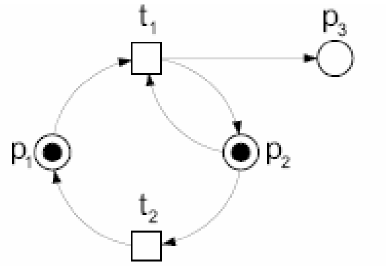
- Die Inzidenzmatrix:

Eine Netzstruktur $N = (P, T, F)$ repräsentieren wir als Matrix, mit einer Zeile für jeden Platz und einer Spalte für jede Transition. Seien also $p1, ..., pk$ die Plätze und $t1,..., tl$ die Transitionen von N. Dann ist die $k\ X\ l$-Matrix N definiert durch

$$\begin{array}{ll} \underline{N}(i,j) = 1 & \text{gdw } (p_i, t_j) \in F \text{und } (t_j, p_i) \notin F \\ \underline{N}(i,j) = -1 & \text{gdw } (t_j, p_i) \in F \text{und } (p_i, t_j) \notin F \\ \underline{N}(i,j) = 0 & \text{sonst.} \end{array}$$

Intuitiv formuliert beschreibt $N(i; j)$, wie sich die Markenzahl auf pi in einem Schritt von tj ändert (Abb.1).

Gleichungs-Invarianten elementarer Systemnetze N repräsentiert das Systemnetz N nicht eindeutig: Der Eintrag $N(i; j) = 0$ steht entweder für keinen Pfeil zwischen pi und tj oder für eine Schlinge. Die Darstellung von N wird übersichtlicher, wenn man die (üblicherweise häufigen) Einträge $N(i; j) = 0$ nicht notiert. Die Indizes i und j für die Plätze pi und Transitionen tj werden häufig durch pi und tj ersetzt.



$\underline{N}$	t_1	t_2
p_1	-1	1
p_2	0	-1
p_3	1	0

Abb.1

- Die Schrittregel in Vektornotation:

Mit der Matrix . lässt sich die Schrittregel neu ausdrücken: Für einen Schritt $M \xrightarrow{t_j} M'$ gilt für jeden Platz *pi* von $\underline{N}$ *N*:

$$M'(p_i) = M(p_i) + \underline{N}(i,j) \qquad (1)$$

Wir schreiben eine Markierung *M* von *N* oft als Spaltenvektor

$$M = (M(p_1), \ldots, M(p_k))^T \qquad (2)$$

und bezeichnen mit

$$\underline{N}_j \qquad (3)$$

M_0	
p_1	-1
p_2	1
p_3	0

die j-te Spalte von $\underline{N}$. Damit k.onnen wir (1) in Vektorschreibweise notieren als

$$M' = M + \underline{N}_j \qquad (4)$$

$\underline{N}$	$1 \ldots j \ldots l$	$\underline{N}_j$
	z_1	z_1
	$\vdots$	$\vdots$
	z_k	z_k

. Gleichungssysteme über der Inzidenzmatrix

Mit der Matrix *N* einer Netzstruktur *N* werden wir auf vielfältige Weise rechnen. Zunächst betrachten wir das lineare, homogene Gleichungssystem

$$x \cdot \underline{N} = o \qquad (1)$$

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und interessieren uns für Lösungen mit ganzzahligen Komponenten.

Ist *N* eine $k \times l$ Matrix (wie im letzten Abschnitt), so besteht der Zeilenvektor *o* *l*-fach aus der natürlichen Zahl 0. Jede Lösung von (1) ist ein Zeilenvektor

$$o = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{l-mal}$$

$$v = (v_1, \ldots, v_k) \tag{2}$$

$$(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0)$$

(enthält also für jeden Platz *pi* eine Zahl *vi*), so dass für jeden paltenindex gilt: $1 \leq j \leq l$

$$\sum_{i=1}^{k} v_i \cdot \underline{N}(i,j) = 0 \tag{3}$$

	A	B	C	D	E	F
v	1	1	0	0	0	0
v'	0	0	1	1	0	0
v''	1	0	0	0	1	1
v'''	0	−1	0	0	1	1

in Vektornotation:

$$v \cdot \underline{N} = o$$

$$v''' \cdot \underline{N}_a = (0,-1,0,0,1,1) \cdot (-1,1,0,0,1,0)^T = o$$

Entsprechend ist jede Lösung des Gleichungssystems

$$\underline{N} \cdot y = o \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist nur trivial mit $(0,0)^T$ *lösbar.*

Ein Spaltenvektor

$$b = (b_1, \ldots, b_l)_i^T \tag{5}$$

Er enthält also für jede Transition *tj* eine Zahl *bj* . Wir werden uns für die Lösung $b_j \geq 0$ interessieren. Das Gleichungssystem (4) ist ein Spezialfall (mit *M* =*M*0) der *Markierungsgleichung*

$$M = M_0 + \underline{N} \cdot x, \tag{6}$$

deren Nutzen wir später sehen.

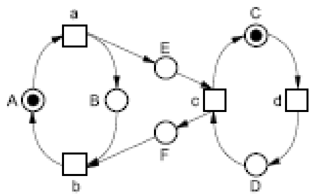
. *Gleichungs-Invarianten elementarer Systemnetze*

Wir haben Gleichungs-Invarianten von Systemnetzen als Gleichungen definiert, die jede erreichbare Markierung erfüllt.

Wir betrachten nun den Spezialfall von Gleichungs-Invarianten *elementarer* Systemnetze.

Sei also $N = (P; T; F)$ ein elementares Systemnetz mit den Plätzen $p1; : : : ; pk$ und der Anfangsmarkierung $M0$. Wir betrachten Gleichungen der Form

$$I : \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot p_i = n_0, \qquad (1)$$



M_0	
A	1
B	0
C	1
D	0
E	0
F	0

$$I_A = 1 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C + 0 \cdot$$
$$D + 0 \cdot E + 0 \cdot F = 1$$
$$\textit{kurz: } I_A : A + B = 1$$

wobei die Plätze pi von N nun als Variablen verwendet werden und Werte in den natürlichen Zahlen annehmen können. $n0; : : : ; nk$ sind ganze Zahlen. + und . sind also Summe und Produkt ganzer Zahlen.

Eine Gleichung I der Form (1) ist eine Gleichungs-Invariante von N, ("I gilt in N") wenn für jede erreichbare Markierung M von N gilt:

$$I : \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot p_i = n_0, \qquad (2)$$

$$I : 1 : A + B = 1$$
$$I_2 : C + D = 1$$
$$I_3 : A + E + F = 1$$
$$I_4 : B + E + F = 0$$

Wir fassen die Faktoren $n1; . . . ; nk$ zum Zeilenvektor

$$n = (n_1, \ldots, n_k) \qquad (3)$$
$$\textit{für } I_1 : (1, 1, 0, 0, 0, 0)$$
$$\textit{für } I_4 : (0, -1, 0, 0, 1, 1)$$

zusammen und können (mit der bereits eingeführten Notation für Markierungen als Spaltenvektoren) (2) schreiben als

$$n \cdot M = n_0 \qquad (4)$$

$$\textit{Wert von } I_1 : 1$$
$$\textit{Wert von } I_4 : 0$$

Die Zahl $n0$ ist der *Wert* der Invariante. Wir können ihn ausrechnen, denn (2) gilt insbesondere auch für die Anfangsmarkierung $M0$ von N, die ja gegeben ist. Somit gilt:

$$n_0 = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot M_0(p_i) \qquad (5)$$

In Vektornotation: $n_0 = n \cdot M_0$

Für $I_1 \; : \; (1,1,0,0,0,0) \cdot (1,0,1,0,0,0)^\tau = 1$

Für $I_2 \; : \; (0,0,1,1,0,0) \cdot (1,0,1,0,0,0)^\tau = 1$

Für $I_3 \; : \; (1,0,0,0,1,1) \cdot (1,0,1,0,0,0)^\tau = 1$

Für $I_4 \; : \; (0,-1,0,0,1,1) \cdot (1,0,1,0,0,0)^\tau = 0$

Die Gleichungs-Invariante (2) ist damit durch den Vektor n in (3) eindeutig festgelegt. Wie findet man solche Vektoren? Als Lösungen des Gleichungssystems $x \,.\, \underline{N} = 0$!

. Das Gleichungs-Invarianten-Theorem

Sei N ein elementares Systemnetz mit den Plätzen $p1; : : : ; pk$
und der Anfangsmarkierung $M0$. Seien $n1; \; : \; : \; : \; ; \; nk$ ganze Zahlen so dass $n = (n1; \; . \; . \; . \; ; \; nk)$ das Gleichungssystem $x \,.\, \underline{N} = 0$ löst. Sei $n0 := n \,.M0$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot p_i = n_0 \qquad (1)$$

für alle $j \leq l : n \cdot \underline{N}_j = 0$

eine Gleichungs-Invariante von N.

Zum Beweis bedenken wir zunächst, dass es zu jeder erreichbaren Markierung M eine Schrittfolge

$$M_0 \xrightarrow{n_1} M_1 \xrightarrow{n_2} \cdots \xrightarrow{n_{r-1}} M_{r-1} \xrightarrow{n_r} M \qquad (2)$$

gibt. Damit reicht es, für beliebige Schritte *M i .! M0* zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot M(p_i) = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot M'(p_i) \qquad (3)$$

in Vektornotation:

$$n \cdot M = n \cdot M'$$

Wir zeigen (3) durch Rückgriff auf die Formulierung der Schrittregel mit der Inzidenzmatrix. In Vektornotation:

$n \,.M' = n \,.\, (M + \underline{Nj})$ (vergleiche (4) im Abschnitt "Inzidenzmatrix")

$= n \,.M + n \,.\, \underline{Nj}$ (elementare Vektorrechnung)

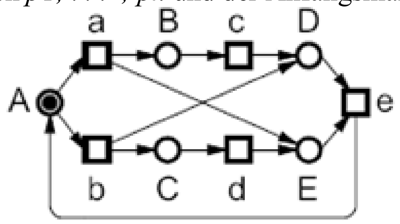
$= n \,.M + 0$ (Voraussetzung des Theorems)

$= n \,.M$ (trivial)*:*

Gibt es umgekehrt zu jeder Platzinvariante von N eine entsprechende L.osung von $x.\underline{N} = o$? Die gibt es tatsächlich, unter einer schwachen Voraussetzung: Zu jeder Transition t gibt es eine erreichbare Markierung, die t aktiviert.

3. Ungleichungs-Invarianten elementarer Systemnetze

Wir betrachten nun eine weitere Form von Invarianten elementarer Systemnetze. Wieder sei *N* ein elementares Systemnetz mit den Pl.atzen *p*1*; . . . ; pk* und der Anfangsmarkierung *M*0.



$N \models \neg(B \wedge C)$, *folgt aber nicht aus Invarianten von* N

In strikter Analogie zu den Gleichungen aus Kapitel 7 [1] , A + D + C ≥ 1, betrachten wir nun Ungleichungen der Form

$$I \quad : \quad \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot p_i \geq n_0 \qquad (1)$$

$$\text{und} \quad I \quad : \quad \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot p_i \leq n_0 \qquad (2)$$

wobei wir die Plätze p_i von *N* wieder als Variablen verwenden und die Faktoren n_i ganze Zahlen sind. Summanden der Form $0 \cdot p_i$ kann man natürlich sparen.

Eine Ungleichung der Form *I* in (1) oder (2) ist eine *Ungleichungs-Invariante von N* ("*I* gilt in *N*"), wenn für jede erreichbare Markierung *M* von *N* gilt:

$$I \quad : \quad \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot M(p_i) \geq n_0 \qquad (3)$$

$$\text{bzw.} \quad I \quad : \quad \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot M(p_i) \leq n_0 \qquad (4)$$

$A + D + E \geq 1$ *gilt!*

. Fallen

Analog zum Gleichungssystem $x \cdot \underline{N} = 0$, das Gleichungs-Invarianten von *N* charakterisiert, definieren wir nun das Konzept der *Fallen*, um (spezielle) Ungleichungs-Invarianten zu charakterisieren.

Eine Teilmenge *Q* der Plätze von *N* ist eine *Falle von N*, wenn f.ur jede Transition *t* von *N* Folgendes gilt:

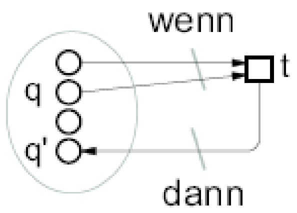
Wenn es einen Pfeil (*q, t*) in *N* gibt mit $q \in Q$,

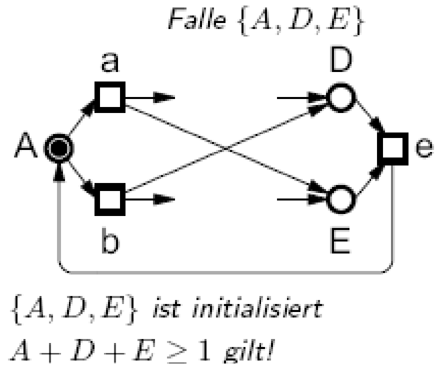
dann gibt es auch einen Pfeil (*t, q'*) mit $q' \in Q$. (1)

Intuitiv formuliert: "Wer etwas heraus nimmt, legt auch etwas hinein."

Eine Falle $Q = \{q1, \ldots, qr\}$ ist *initialisiert in N* wenn sie anfangs mindestens eine Marke enth.alt, wenn also gilt:

$$\sum_{i=1}^{r} M_0(q_i) \geq 1 \qquad (2)$$





. Das Fallen-Theorem

Sei *N* ein elementares Systemnetz und sei $Q = \{q1, \ldots, qr\}$ eine initialisierte Falle. Dann gilt in *N* die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{r} q_i \geq 1 \qquad (1)$$

Zum Beweis reicht es, für jeden Schritt $M \xrightarrow{t} M'$ von *N* zu zeigen:

$$\text{Wenn} \sum_{i=1}^{r} M(q_i) \geq 1, \text{dann} \sum_{i=1}^{r} M'(q_i) \geq 1$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Es gibt keinen Pfeil $(q; t)$ mit $q \in Q$. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq r : M'(q_i) \geq M(q_i)$, und die Behauptung folgt.

2. Es gibt einen solchen Pfeil. Dann garantiert die Definition der Falle mit einen Pfeil $(t; q')$ mit $q' \in Q$, also $M'(q') \geq 1$, und die Behauptung folgt ebenfalls.

4. **Kombination von Gleichungs- und Ungleichungs-Invarianten**

Gleichungen und Ungleichungen kann man, wie in der linearen Algebra üblich, addieren und mit Faktoren multiplizieren.

Sind I und I' in einem elementaren Systemnetz *N* gültige Gleichungen oder Ungleichungen, dann sind ihre Summe $I + I'$ und das v-fache Produkt $v \cdot I$ (für ganze Zahlen *v*) ebenfalls in *N* gültig.

Sind I und I' Gleichungen, die aus Lösungen von $x \cdot \underline{N} = 0$ auch entsprechende Lösungen für $I + I'$ und $v \cdot I$.

Für Ungleichungen, die aus Fallen hervorgehen, gilt Entsprechendes nicht! Summe und skalares Produkt liefern echt neue gültige Ungleichungen! Neue Ungleichungen entstehen natürlich auch, wenn man Gleichungen und Ungleichungen addiert.

$$\begin{array}{rlcl} I_1: & A+B+D & = & 1 \\ I_2: & A+D+E & \geq & 1 \\ I_1-I_2: & B-E & \leq & 1 \\ 2I_1: & 2A+2B+2D & = & 2 \\ -3I_2: & -3A-3D-3E & \leq & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} I_1: & A+B+D & = & 1 \\ & \textit{(Gleichungslösung)} & & \\ I_2: & A+D-C-E & = & 0 \\ & \textit{(Gleichungslösung)} & & \\ I_3: I_1-I_2: & A+C+E & = & 1 \\ & \textit{(Gleichungslösung)} & & \\ I_4: 2I_1+I_2: & 2A+B+C+D+E & = & 2 \\ & \textit{(Gleichungslösung)} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} I_3: & A+C+E & = & 1 \\ & \textit{(Gleichungslösung)} & & \\ I_5: & A+D+E & \geq & 1 \\ & \textit{(Falle)} & & \\ I_6: I_3-I_5: & C-D & \leq & 1 \\ & \textit{(neu!)} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} I_4: & 2A+B+C+D+E & = & 2 \\ & \textit{(Gleichungslösung)} & & \\ I_2: & A+D+E & \geq & 1 \\ & \textit{(Falle)} & & \\ I_6: & A & \geq & 0 \\ & \textit{(trivial)} & & \\ \multicolumn{4}{l}{I_7: I_4-I_2-I_6: B+C \leq 1} \end{array}$$

Nützlich sind auch Ungleichungen der Form

$$p \geq 0$$

die für alle Plätze p von N gelten.

. *Der Wahrheitswert* $\widehat{M}(p)$

Der klassische Formalismus zur Formulierung von Systemeigenschaften ist die Logik. Deshalb verwenden wir jetzt logische Ausdrucksmittel, um Eigenschaften elementarer Systemnetze zu formulieren.

Zunächst ordnen wir jeder Markierung $M(p)$ eines Platzes p von N einen Wahrheitswert $\widehat{M}(p)$ zu:

$$\widehat{M}(p) =_{def} \begin{cases} wahr, & \text{falls } M(p) \geq 1 \\ falsch, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \text{p} \odot & \widehat{M}(p) = wahr \\ \text{p} \bigcirc & \widehat{M}(p) = falsch \end{cases}$$

Viele elementare Systemnetze haben keine erreichbaren Markierungen M mit $M(p) \geq 2$. Dadurch entsteht kein Verlust an Information, wenn man $\widehat{M}$ statt M betrachtet.

4. Literaturverzeichnis

1. Reisig W. Petri-Netze - eine neue Einführung. Humboldt Universität zu Berlin. 2004.
2. Kindler E., Walter R. Mutex needs fairness. Information Processing Letters. 1997.
3. Reisig W. Petrinetze – Eine Einf˙uhrung. Springer-Verlag, 1982.

ინვარიანტული განტოლებები და უტოლობები ელემენტარული პეტრის ქსელებისთვის

ვოლფგანგ რეისიგი
ბერლინის ჰუმბოლდტის უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ელემენტარული პეტრის ქსელების სტრუქტურა და ყოფაქცევა შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ჩვეულებრივ წრფივი ალგებრაში. მათ აღწერენ ვექტორებისა და მატრიცების საშუალებით. ამასთანავე შესაძლებელია განტოლებათა სისტემის ფორმირება და მის საფუძველზე ელემენტარული პეტრის ქსელების თვისებების გაანგარიშება. აქ შემოთავაზებულია გარკვეული თეორიული ალგორითმები და პრაქტიკული მაგალითები ინვარიანტული განტოლებების, უტოლობებისა და მათი კომბინაციის საფუძველზე.

ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ

Рейсиг Вольфганг
Университет им. Гумбольдта, Берлин

Резюме

Структуру и поведение элементарных системных сетей можно представить в обычной линейной алгебре. Их описывают с помощью векторов и матриц. Вместе с тем можно образовывать системы уравнения и вычислять таким образом свойства элементарных системных сетей. Здес предлагаются некоторые теоретические алгоритмы и практические примеры на базе инвариантных уравнений равенств, неравенств и их комбинации.

INVARIANT EQUATIONS AND INEQUALITIES FOR ELEMENTAR PETRI NETWORKS

Reisig Wolfgang
Humboldt University Berlin

Summary

The structure and behaviour of elementary system networks can be presented in usual linear algebra. Them describe by means of vectors and matrixes. At the same time it is possible to form systems of the equation and to calculate thus properties of elementary system networks. In work some theoretical algorithms and practical examples on the basis of the invariant equations of equality, inequalities and are offered their combination.