

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ზურაბ კაპანაძე

ბზარების ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები
სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების
გამოყენებით

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
წარდგენილი დისერტაციის

ავტორეფერატი

თბილისი
2015 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში,
სამშენებლო ფაკულტეტზე,
მშენებლობის კომპიუტერული დაპროექტების დეპარტამენტი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: სრული პროფესორი მურმან კუბლაშვილი

რეცენზენტები: სრული პროფესორი ტარიელ კვიციანი
სრული პროფესორი სეით ბლიაძე

დაცვა შედგება 2015 წლის 23.07. 14 საათზე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის
სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, ადმინისტრაციული კორპუსი,
ნ. ნიკოლაძის მცირე დარბაზი

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.
დისერტაციის გაცნობა შეიძლება ტექნიკური უნივერსიტეტის
ბიბლიოთეკაში, ხოლო ავტორეფერატისა – უნივერსიტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს სწავლული
მდივანი: სრული პროფესორი

დ. ტაბატაძე

ნაშრომის საერთო დახასიათება

თემის აქტუალურობა:

უკანასკნელ წლებში სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია სულ უფრო მეტ მნიშვნელობას იძენს. მექანიკის (აეროდინამიკის, დრეკადობის თეორიის, რღვევის თეორიის, ელექტროდინამიკის და სხვა) მრავალი გამოყენებითი ტიპის ამოცანები ბუნებრივი გზით მიიყვანება ერთგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე, რომელთა შესახებაც საკმაოდ კარგად დამუშავებული სრული თეორია მოცემულია სხვადასხვა ავტორების ნაშრომებში (გახოვი, ივანოვი, მუსხელიშვილი, ლიფანოვი და სხვა).

თავის მხრივ სინგულარული ინტეგრალების დათვლა, ან ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნა ძალიან რთულია, ზოგ შემთხვევაში შეუძლებელიც. ასეთ შემთხვევაში პრობლემის გადასაწყვეტად აუცილებელი ხდება რიცხვითი მეთოდების გამოყენება.

რიცხვითი ამონახსნების ალგორითმების დამუშავება და მათი კომპიუტერული რეალიზაცია გარკვეულ სირთულეებთან არის დაკავშირებული და მოიცავს რამოდენიმე მნიშვნელოვან ეტაპს. პირველ რიგში ამა თუ იმ ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისათვის უნდა დამუშავდეს შესაბამისი ალგორითმები. ბუნებრივია ასეთი ალგორითმების დამუშავების დროს გათვალისწინებული უნდა იქნას ამოსახსნელი ამოცანების თავისებურებანი: კერძოდ, ალგორითმი სრულად უნდა აღწერდეს ამოცანის ბუნებას და რაც შეიძლება ზუსტად გადმოცემდეს მის შინაარსს. მეორე მხრივ, ალგორითმი უნდა იყოს მაღალი სიზუსტის და გამოთვლითი პროცესების მიმართ მდგრადი.

სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების განვითარება დაიწყო გაცილებით უფრო გვიან, ვიდრე თეორიული გამოკვლევები. პირველი შრომები გამოჩნდა მხოლოდ გასული საუკუნის ოცდაათიან წლებში. 1932 წელს გამოქვეყნებული მ.

ლავრენტიევის ცნობილი სტატია ბიძგი გახდა 50-იან წლებში ამ მიმართულებით დაწყებული გამოთვლითი მეთოდების ინტენსიური დამუშავებისათვის. ამ მიმართულებით განსაკუთრებით აღნიშვნის ღირსია ს. ბელოცერკოვსკის შრომები აეროდინამიკაში, რომელიც საფუძვლად დაედო არსებითად ახალ, ამჟამად კარგად ცნობილ, სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა რიცხვითი ამოხსნის მეთოდს- დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდს.

სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლებისადმი მიძღვნილ სხვა ავტორთა შრომებიდან დასახელებული უნდა იქნას ი. ლიფანოვის, მუსაევის, ჯ. სანიკიძის, ა. ჯიშკარიანის, მ. კუბლაშვილის, ბ. გაბდულხაევის, ი. ბოიკოვისა და სხვათა შრომები.

მნიშვნელოვანია აღინიშნოს, რომ ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდების განვითარების ტენდენცია დაიწყო უფრო მეტად „კარგი“ გულის მქონე მეორე გვარის ფრედგოლმის განტოლებებზე. ასეთი განტოლებებისათვის აგებული იქნა რიცხვითი მეთოდები: ა) მაღალი რიგის სიზუსტის, საკმარისად ვიწრო კლასის, განტოლებებისათვის, როცა საძებნი ფუნქციები ინტერპოლირდება სპეციალური მრავალწევრებით ან შესაბამისი ოპერატორების საკუთრივი ფუნქციებისგან შედგენილი მწკრივის კერძო ჯამებით. ბ) დაფუძნებული მართკუთხედის ტიპის ან ანალოგიური, საკმარისად ზოგადი, ტიპის ფორმულებზე.

სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის რიცხვითი ალგორითმების აგების დროს, ვაწყდებით პრობლემებს იმის გამო, რომ სინგულარული ინტეგრალი ჩვეულებრივი აზრით განშლადია და გაიგება გარკვეული სპეციალური აზრით (ე.წ. კოშის მთავარი მნიშვნელობით). ამიტომ ასეთი ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ალგორითმების აგების დროს წარმოიშობა დამატებითი სიძნელებები.

ასე მაგალითად განვიხილოთ ფრედგოლმის განტოლება: $K\varphi = f$, სადაც K ფრედგოლმის ოპერატორია, f ცნობილი, ხოლო φ საძებნი ფუნქცია. ვთქვათ K ოპერატორისათვის ავაგეთ K_n მიახლოებითი ოპერატორი

ისეთი, რომ $\|K - K_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, მაშინ როცა $K\varphi = f$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი φ , $K_n\varphi_n = f_n$ მიახლოებით განტოლებასაც გარკვეული n_0 -დან დაწყებული ექნება ერთადერთი ამონახსნი φ_n და $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. ზოგადად სინგულარული ინტეგრალური განტოლებისათვის ასე არ ხდება: ვთქვათ ზუსტი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებაა $S\varphi = f$, ხოლო აპროქსიმაციის შედეგად მიღებული მიახლოებითი განტოლება $S_n\varphi_n = f_n$. დაუშვათ, რომ ზუსტ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და $\|S - S_n\| \rightarrow 0$, აქედან არ გამომდინარეობს, რომ $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0$. ესეიგი სამართლიანი არ არის კანტოროვიჩის ზოგადი მიახლოების თეორია. სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებში, ყოველ განტოლებას სჭირდება ინდივიდუალური შესწავლა. ამიტომ ასეთ შემთხვევაში რთულდება მიახლოებითი პროცესების დაფუძნება. ამის გამო, მიუხედავად იმისა, რომ სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები კარგად აღწერენ მექანიკის ამოცანების რთულ ბუნებას, თავის მხრივ, მიახლოებითი პროცესების შესწავლა ბევრ სირთულეებთანაა დაკავშირებული.

საყოველთაოდ ცნობილია, რომ ბზარების ამოცანები რიცხვითი ამოხსნების თვალსაზრისით ითვლება რთულ ამოცანებად. განსაკუთრებით აქტუალურია ისეთი მეთოდების დამუშავება, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს ადვილად განისაზღვროს ბზარების ბოლოების რაგინდ მცირე მიდამოში ძაბვების მნიშვნელობები, რაც, თავის მხრივ, ბზარის შემდგომი გავრცელების მიმართულების პროგნოზირების გაკეთების საშუალებას მოგვცემს. როგორც გამოკვლევებმა აჩვენა, ასეთი ამოცანებისათვის ძალიან ეფექტიანი აღმოჩნდა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები.

სადისერტაციო ნაშრომი ეხება სწორედ ასეთი პრობლემების შესწავლას სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის. იგი მოიცავს ბზარების ამოცანებისათვის მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი

ამოხსნის ალგორითმების დამუშავებას და მათ კომპიუტერულ რეალიზაციას.

დისერტაციის მიზანია:

სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ალგორითმების დამუშავება და მათი კომპიუტერული რეალიზაცია.

კვლევის მეთოდები:

დისერტაციაზე მუშაობის დროს გამოყენებულია სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორია, სამშენებლო და რღვევის მექანიკის და მიახლოებითი მეთოდების ზოგადი თეორიები.

მეცნიერული სიახლე:

სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით აგებულია და კომპიუტერული პროგრამით უზრუნველყოფილია სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები.

მიღებული შედეგების პრაქტიკული გამოყენება

მიღებული შედეგები შესაძლებელია გამოყენებული იქნას სამშენებლო მექანიკის, ჰიდროდინამიკის, აეროდინამიკის და რღვევის თეორიის ამოცანების გადასაწყვეტად. ნაშრომში აგებული მაღალი რიგის სიზუსტის ალგორითმები შესაძლებელია გამოვიყენოთ სამშენებლო მექანიკის ისეთი მნიშვნელოვანი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნისათვის, როგორცაა ბზარების ამოცანები.

ნაშრომის აპრობაცია და გამოქვეყნებული პუბლიკაციები:

სადისერტაციო ნაშრომის, როგორც ცალკეული ისე ძირითადი შედეგები მოხსენებული იქნა სადისერტაციო პროგრამით გათვალისწინებულ ორ სემინარზე. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სტუდენტთა ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციებზე. გარდა ამისა სადისერტაციო ნაშრომის მასალების მიხედვით გამოქვეყნებულია ექვსი სამეცნიერო ნაშრომი.

ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა:

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, სამი თავის, დასკვნის, დანართის, გამოყენებული ლიტერატურის 70 დასახელების ნუსხიხგან. ტექსტის საერთო მოცულობა 126 გვერდია.

ნაშრომის შინაარსი

შესავალში მოცემულია ნაშრომის საერთო დახასიათება: დასაბუთებულია პრობლემის აქტუალობა, სამუშაოს მიზანი და კვლევის მეთოდები, მეცნიერული სიახლე, პრაქტიკული ღირებულება და შედეგების რეალიზაცია, მეცნიერული დასკვნების და რეკომენდაციების სარწმუნოობის დასაბუთება, სამუშაოს აპრობაცია, ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა.

პირველ თავში განხილულია წონიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის სხვადასხვა ავტორების და დისერტანტის მიერ დამუშავებული რიცხვითი გამოთვლების ალგორითმები და მათი კრებადობის რიგის შეფასებები.

პირველი თავის §1.1-ში მოყვანილია ხარისხობრივი ტიპის განსაკუთრებულობების მქონე სიმკვრივიანი სინგულარული ინტეგრალის თვისებები

$$S(\{; t_0, \gamma) \equiv \frac{1}{fi} \int_L \frac{\{ (t) dt}{(t-c)^\gamma (t-t_0)} \quad (t_0 \in L),$$

სადაც $L \equiv ab$ წარმოადგენს გლუვ გახსნილ კონტურს a და b ბოლოებით, რომელიც მოცემულია განტოლებით $t = t(s), (s_a \leq s \leq s_b)$. ამასთან, დადებითი მიმართულება აიღება s პერიმეტრის ზრდის მიხედვით. c არის a ან b , $\gamma = \beta + i\delta$, $(0 \leq \beta < 1)$, $(t-c)^\beta$ -ს ქვეშ იგულისხმება ამ მრავალსახა ფუნქციის ნებისმიერი ფიქსირებული შტო.

პირველი თავის § 1.2-ში განხილულია ს. ბელოცერკოვსკისა და ი. ლიფანოვის მიერ აგებული რიცხვითი გამოთვლის ალგორითმები შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალისათვის

$$I(t_0) = \int_L \frac{\{ (t) dt}{t-t_0} \quad (1)$$

სადაც L ერთეულრადიუსიანი წრეა ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, ხოლო $\{ (t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას L კონტურზე (ჰელდერის კლასის ფუნქციაა L -ზე). მოყვანილია L კონტურის კანონიკური დაყოფა $E = (t_k, k=1, \dots, n)$ და $E_0 = (t_{0k}, k=1, \dots, n)$ სიმრავლეებით.

აღნიშნული ინტეგრალი შეცვლილია $s_n(t_{0j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\{ (t_k) \Delta t_k}{t_k - t_{0j}} \quad j=1, \dots, n$

კვადრატურული ჯამით. $\{ (t) \in H(r)$ კლასის ფუნქციებისთვის მიღებულია შემდეგი შეფასება

$$\begin{aligned} |I(t_{0j}) - s_n(t_{0j})| &\leq \omega_n(t_{0j}), \quad j=1, \dots, n, \\ \omega_n(t_{0j}) &= O\left(\frac{1}{n^r} \ln n\right) + |\{ (t_{0j})| O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

ამ თავში ასევე განხილულია (1) სახის სინგულარული ინტეგრალი $L = [a, b]$ მონაკვეთისთვის, რომლის მიახლოებითი გამოთვლისათვის

აგებულია კვადრატურული ფორმულა $\sum_{k=1}^n \frac{\{ (t_k) h}{t_k - t_{0j}}$ და მოყვანილია შეფასება

$$I \equiv \left| \int_a^b \frac{\{ (t) dt}{t-t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{\{ (t_k) h}{t_k - t_{0j}} \right| \leq \omega_n(t_{0j}), \quad j=0, 1, \dots, n$$

სადაც $\epsilon(t_{0j})$ მნიშვნელობა აკმაყოფილებს შემდეგს:

1) ყველა წერტილისთვის $t_{0j} \in [a+u, b-u]$, $u > 0$ უსასრულოდ მცირე რიცხვია

$$\epsilon(t_{0j}) \leq O_u(h^{\lambda_1}), \quad 0 < \lambda_1 \leq 1;$$

2) ყველა წერტილისთვის $t_{0j} \in [a, b]$

$$\sum_{j=0}^n \epsilon(t_{0j}) |\Delta t_{0j}| \leq O(h^{\lambda_2}), \quad 0 < \lambda_2 \leq 1,$$

$$\text{აქ } \Delta t_{0j} = h, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

პირველი თავის § 1.3-ში გადმოცემულია ჯ. სანიკიძის მიერ აგებული დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის მოდიფიცირებული მომატებული რიგის სიზუსტის გამოთვლითი სქემა, რომელიც კრებადობის რიგით მნიშვნელოვნად აუმჯობესებს ს. ბელოცერკოვსკისა და ი. ლიფანოვის სქემებს.

განხილულია შემდეგი სახის სიგულარული ინტეგრალი

$$\frac{1}{f_i} \int_L \frac{\{t\} dt}{t - t_0} \quad (2)$$

სადაც შეკრული გლუვი L კონტური წერტილთა ორი სისტემის საშუალებით, $2n$ კვანძით $\{\tau_j\}_{j=1}^{2n}$, იყოფა $2n$ ტოლ ნაწილად. ამასთან, τ_m, τ_q რკალის ქვეშ იგულისხმება L კონტურის უმცირესი რკალი τ_m, τ_q ბოლოებით, რომლებიც განლაგებულია L -ის დადებითი მიმართულების შესაბამისად. ამასთან ერთად, τ_m კვანძის აღნიშვნაში, უარყოფით ან n -ზე მეტი ინდექსის შემთხვევაში იგულისხმება დაყოფის წერტილები შესაბამისად $m \pm 2n$ ინდექსით. (2) ინტეგრალისათვის აგებულია მიახლოება:

$$\frac{1}{f_i} \int_L \frac{\{t\} dt}{t - t_0} \approx \{t_0\} + \sum_{\tau=1}^n (P_{\epsilon+2\tau-1} + P_{\epsilon+2\tau+1}) \frac{\{t_{\epsilon+2\tau+1}\} - \{t_0\}}{t_{\epsilon+2\tau+1} - t_0}$$

იმ პირობით, რომ $t_0 \in \tau_{v-1}, \tau_{v+1}$ ($t_0 \neq \tau_{v-1}, \tau_{v+1}$),

სადაც

$$P_{\epsilon+2--1} = \frac{1}{fi} \int_{\dagger_{\epsilon+2--1}}^{\dagger_{\epsilon+2--1}} l_{\epsilon-}^{(o)}(t) dt = \frac{1}{fi} \int_{\dagger_{\epsilon+2--1}}^{\dagger_{\epsilon+2--1}} l_{\epsilon-}^{(1)}(t) d(t),$$

$$\text{ამასთან, } l_{\epsilon-}^{(0)}(t) = \frac{t - \dagger_{\epsilon+2--1}}{\dagger_{\epsilon+2--1} - \dagger_{\epsilon+2--1}}, l_{\epsilon-}^{(1)}(t) = \frac{t - \dagger_{\epsilon+2--1}}{\dagger_{\epsilon+2--1} - \dagger_{\epsilon+2--1}}$$

t_0 პარამეტრისათვის $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2n}$ მნიშვნელობების მიცემით მივიღებთ $(S_{\phi})(t_0)$ სინგულარული ინტეგრალისათვის გარკვეულ აპროქსიმაციის სქემას.

ნებისმიერი $t_0 \in L$ -სთვის, $(S_{\phi})(t_0)$ -ის აპროქსიმაციისთვის, გამოიყენება უბან-უბან გლუვი კვადრატული ინტერპოლაცია, რომელიც დაწყებული რომელიმე ფიქსირებული კვანძიდან აიგება სამ მომდევნო კვანძზე.

მტკიცდება, რომ, თუ $\{t\}$ ფუნქციას L -ზე გააჩნია მეორე რიგის შემოსაზღვრული წარმოებული, მაშინ აღნიშნული კვადრატურული ფორმულით მიახლოება გვაძლევს კრებადობის $O(n^{-2} \ln n)$ რიგს. თუ დამატებით $\{t\}$ L -ზე აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას r ($0 < r \leq 1$) მაჩვენებლით, მაშინ $O(n^{-2} \ln n)$ შეფასებაში შეგვიძლია მოვაცილოთ, მხოლოდ ლოგარითმული მამრავლი. შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ $O(n^{-2} \ln n)$ შეფასება, სიზუსტის რიგის მცირე დანაკარგით, შენარჩუნებული იქნება იმ შემთხვევაშიც, როცა აღნიშნული უბან-უბან კვადრატული მიახლოების ნაცვლად გამოვიყენებთ უფრო მარტივ უბან-უბან წრფივ აპროქსიმაციას.

პირველი თავის § 1.4-ში განხილულია მ. კუბლაშვილის მიერ აგებული დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის მოდიფიცირებული მომატებული რიგის სიზუსტის გამოთვლითი სქემა გახსნილი კონტურების შემთხვევაში. ბუნებრივია, ამ დროს წარმოიშობა გაცილებით უფრო რთული დამატებითი სიძნელეები, სინგულარული ინტეგრალების წირის ბოლოებში ყოფაქცევის გამო, ასევე შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების ამონახსნების თვისებების გამო, საჭირო

ხდება გარკვეული წონიანი სინგულარული ინტეგრალების აპროქსიმაცია და მათი შესაბამისი გამოყენება აღნიშნულ განტოლებებში.

განხილულია შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალი:

$$S^{(p,q)}(\xi : t_0) = \frac{1}{fi_L} \int (t-a)^p (t-b)^q \frac{\xi(t) dt}{t-t_0} \quad (3)$$

სადაც $L \equiv ab$ კომპლექსურ სიბრტყეზე რაიმე გახსნილი გლუვი კონტურია a და b ბოლოებით, რომელიც მოცემულია პარამეტრული სახით $t = t(s)(s_a \leq s \leq s_b)$. აქ $\dots(t) = (t-a)^p (t-b)^q$

წონითი ფუნქციაა, სადაც p და q პარამეტრები იღებს ერთ-ერთ მნიშვნელობას $\pm 1/2$ რიცხვებიდან.

(3) სახის სინგულარული ინტეგრალისათვის აგებულია კვადრატურული ფორმულა

$$S_n^{(1/2;-1/2)}(\xi ; t) \approx \xi(t_0) + \sum_{\dagger=1}^n \int_{\dagger_{2\dagger-1}}^{\dagger_{2\dagger+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \left[\frac{t-\dagger_{2\dagger-1}}{\dagger_{2\dagger+1}-\dagger_{2\dagger-1}} \mathfrak{t}(\dagger_{2\dagger+1}, t_0) + \frac{t-\dagger_{2\dagger+1}}{\dagger_{2\dagger-1}-\dagger_{2\dagger+1}} \mathfrak{t}(\dagger_{2\dagger+1}, t_0) \right] =$$

$$= \xi(t_0) + p_1 \mathfrak{t}(\dagger_1, t_0) + \sum_{\dagger=1}^{n-1} (q_1^{(1/2;-1/2)} + q_1^{(1/2;-1/2)}) \mathfrak{t}(\dagger_{2\dagger+1}, t_0) + q_1^{(1/2;-1/2)} \mathfrak{t}(\dagger_{2n-1}, t_0),$$

სადაც

$$q_1^{(1/2;-1/2)} = \frac{1}{fi_{\dagger_{2\dagger-1}-\dagger_{2\dagger+1}}} \int_{\dagger_{2\dagger-1}}^{\dagger_{2\dagger+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{t-\dagger_{2\dagger-1}}{\dagger_{2\dagger+1}-\dagger_{2\dagger-1}} dt, q_{2\dagger+1}^{(1/2;-1/2)} =$$

$$= \frac{1}{fi_{\dagger_{2\dagger-1}-\dagger_{2\dagger+1}}} \int_{\dagger_{2\dagger-1}}^{\dagger_{2\dagger+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{t-\dagger_{2\dagger-1}}{\dagger_{2\dagger-1}-\dagger_{2\dagger+1}} dt \quad (\dagger = 1, 2, \dots, n)$$

ინტერპოლაციის ლუწი ინდექსის წერტილებში

$$D_n^{(1/2;-1/2)}(\xi, t_0) = \xi(t_0) + q_2^{(1/2;-1/2)} \mathfrak{t}(\dagger_2; t_0) + \sum_{\dagger=1}^{n-1} q_1^{(1/2;-1/2)} +$$

$$+ q_{2\dagger+2}^{(1/2;-1/2)} \mathfrak{t}(\dagger_{2\dagger+2}, t_0) + q_{2n-2}^{(1/2;-1/2)} \mathfrak{t}(\dagger_{2n}, t_0)$$

სადაც

$$q_1^{(1/2;-1/2)} = \frac{1}{fi_{\dagger_{2\dagger} \dagger_{2\dagger+2}}} \int_{\dagger_{2\dagger}}^{\dagger_{2\dagger+2}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{t-\dagger_{2\dagger}}{\dagger_{2\dagger+2}-\dagger_{2\dagger}} dt, q_{2\dagger+2}^{(1/2;-1/2)} = \frac{1}{fi_{\dagger_{2\dagger} \dagger_{2\dagger+2}}} \int_{\dagger_{2\dagger}}^{\dagger_{2\dagger+2}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{t-\dagger_{2\dagger+2}}{\dagger_{2\dagger}-\dagger_{2\dagger+2}} dt$$

$$(\dagger = 1, 2, \dots, n-1)$$

ანალოგიურად აიგება $D_n^{(-1/2;-1/2)}(\xi, t_0)$ და $D_n^{(1/2;1/2)}(\xi, t_0)$.

t_ϵ კვანძებში $D_n^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\xi; t_\epsilon)$ ჯამების საშუალებით შეიძლება ავაგოთ მიახლოებითი ფორმულა შესაბამისად $S^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\xi; t_0)$ სინგულარული ინტეგრალებისათვის, რომლებსაც აზრი ექნებათ ნებისმიერი $t_0 \in L$ -სთვის, ამასთან ექნებათ სიზუსტის იგივე რიგი, რაც t_ϵ -კვანძით წერტილებში.

ვთქვათ $R_n^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\xi; t_0) = S^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\xi, t_0) - S_n^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\xi, t_0)$ ნაშთითი წევრია.

მტკიცდება, რომ, როდესაც $\varphi(t)$ ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის შემოსაზღვრული წარმოებული, სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_n^{(1/2; -1/2)}(\xi; t_0)\|_{H_s} \leq \frac{M \ln n}{n^{3/2+r-w}} \quad (n > 1, s < r - 1/2),$$

$$\|R_n^{(-1/2; -1/2)}(\xi; t_0)\|_{H_s} \leq \frac{A \ln n}{n^{3/2+r-w}} \quad (n > 1, s < r - 1/2)$$

$$\|R_n^{(1/2; 1/2)}(\xi; t_0)\|_{H_s} \leq \frac{B \ln n}{n^{3/2+r-w}} \quad (n > 1, s < r - 1/2)$$

სადაც M, A, B მუდმივებია, რომლებიც დამოკიდებულია მხოლოდ L -ზე და $\varphi^{(2)}$ ფუნქციის ჰელდერის მაჩვენებელზე.

პირველი თავის § 1.5-ში განხილულია ჯ. სანიკიძის და კ. ნინიძის მიერ კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის ჩებიშევის ტიპის მომატებული რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულები. მოყვანილია სინგულარული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ფორმულა ჩებიშევის კვანძებისათვის $\pm t_1, \pm t_2$.

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi(t)}{t-t_0} dt \approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\xi(-t_1)}{-t_1-t_0} + \frac{\xi(t_1)}{t_1-t_0} + \frac{\xi(-t_2)}{-t_2-t_0} + \frac{\xi(t_2)}{t_2-t_0} \right\},$$

სადაც $t_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}}$, $t_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}}$, $t_{01} = -0.970411$, $t_{02} = -0.494516$,

$t_{03} = 0.494516$, $t_{04} = 0.970411$

პირველი თავის § 1.6-ში გადმოცემულია მ. კუბლაშვილისა და ჯ. სანიკიძის მიერ განხილული კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატურული ფორმულების მომატებული რიგის სიზუსტის შესახებ. განხილულია შემდეგი სახის კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{+1} \dots(t) \frac{\{t\} dt}{t-x} \quad (-1 < x < 1)$$

სადაც $\dots(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, რომელიც აკმაყოფილებს ასეთი ინტეგრალების თეორიაში ზოგადად მიღებულ პირობებს. ასეთი წონითი ფუნქცია უფრო ხშირია გამოყენებითი ტიპის ამოცანებში. თუ გავითვალისწინებთ $\dots(t)$ -ს სახეს, მივიღებთ:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\{t\} dt}{\sqrt{1-t^2} (t-x)} \quad (-1 < x < 1)$$

აგებულია კვადრატურული ფორმულა

$$\int_{-1}^{+1} \dots(t) \frac{\{t\} dt}{t-x} \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\{t_k\}}{t_k - x}; x \in (-1, +1), x \neq t_k,$$

სადაც $\{t_k\}$, $\{A_k\}$ - შესაბამისად, გაუსის ჩვეულებრივი კვადრატურული ფორმულის კვანძები და წონებია, თანაც ნაგულისხმევია, რომ წონითი ფუნქცია $\dots(t)$ აკმაყოფილებს ცნობილ სტანდარტულ პირობებს.

$2n-1$ -თან ყველაზე ახლოს მდგომ r_n მნიშვნელობებს, ბუნებრივია, მივყავართ სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატურულ ფორმულებამდე, რომლის სიზუსტე უახლოვდება გაუსის კვადრატურული ფორმულების სიზუსტეს.

n კვანძების რაოდენობების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის ჩატარებულმა ექსპერიმენტებმა დაადასტურა ამ მიმართულებით წარმოქმნილი თეორიული მოსაზრებები

პირველი თავის § 1.7-ში გადმოცემულია ჯ. სანიკიძის და მ.კუბლაშვილის მიერ განხილული კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის სიზუსტით გაუსის ტიპის მახლობელი კვადრატურული ფორმულების შესახებ. აქაც, როგორც წინა პარაგრაფში, განხილულია კომის გულიანი შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{+1} \dots(t) \frac{\{t\} - \{x\}}{t-x} dt \quad (-1 < x < 1) \quad (4)$$

(4) ინტეგრალისათვის განხილულია გაუსის კვადრატურული ფუნქცია t_k კვანძებით და $\{A_k\}$ კოეფიციენტებით:

$$\int_{-1}^{+1} \dots(t) \frac{\{t\} - \{x\}}{t-x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\{t_k\} - \{x\}}{t_k - x} \quad (-1 < x < 1) \quad (5)$$

იგულისხმება, რომ $\{t\}$ -ს გააჩნია შესაბამისი სიგლუვე, ამასთან, როცა $t_k = x$ (5)-ე გამოსახულებაში იგულისხმება შესაბამისი ზღვარი.

როდესაც $\{t\}$ წარმოადგენს $\leq 2n$ მრავალწევრს, ცხადია, ნებისმიერი $x \in (-1; +1)$ -ისათვის მოცემული კვადრატურული ფორმულა, არის ზუსტი, ხოლო თუ $x \in (-1 < x < 1)$ მნიშვნელობები (5)-ში შერჩეულია ისე, რომ ამ უკანასკნელისათვის შესრულდეს ტოლობა

$$\int_{-1}^{+1} \dots(t) \frac{dt}{t-x} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{t_k - x} = 0, \quad (6)$$

მაშინ x -ის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის (6)-ე პირობის მიხედვით შემდეგი სინგულარული ინტეგრალისათვის

$$\int_{-1}^{+1} \dots(t) \frac{\{t\}}{t-x} dt \quad (-1 < x < 1):$$

გვექნება კვადრატურული ფორმულა

$$\int_{-1}^{+1} \dots(t) \frac{\{t\}}{t-x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\{t_k\}}{t_k - x} \quad (-1 < x < 1), \quad (7)$$

ასეთი სტრუქტურის კვადრატურული ფორმულები, რომლებიც ლიტერატურაში ცნობილია სინგულარული ინტეგრალისათვის გაუსის კვადრატურული ფორმულების სახელწოდებით, განისაზღვრება სავსებით ერთმნიშვნელოვნად მოცემული $\dots(t)$ -სათვის $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$ სინგულარობის წერტილების მნიშვნელობებით. ამით შეიძლება ითქვას, რომ x სინგულარობის პარამეტრის იმ მნიშვნელობების რაოდენობა, რომელთა დროსაც მიიღწევა (7)-ე კვადრატურული ფორმულების უმაღლესი ალგებრული სიზუსტე, მკაცრად შეზღუდულია.

ამასთან დაკავშირებით, იმ კვადრატურული ფორმულების პრაქტიკული ეფექტურობის გათვალისწინებით, რომლებსაც გააჩნიათ სიზუსტის ასე თუ

ისე მაღალი ხარისხი, ბუნებრივია ვცადოთ რაღაც ოდენობით სინგულარობის ასეთი წერტილების x რაოდენობის გაზრდა, რაც (7)-ე სახის ფორმულებთან მიმართებაში შესაძლოა განხორციელდეს ასეთი ფორმულების სიზუსტის შედარებით დაწვევის ხარჯზე, მაგრამ ისე კი, რომ შესაბამის კვადრატურულ ფორმულებს გააჩნდეთ სიზუსტის მნიშვნელოვნად უფრო მაღალი ხარისხი, ვიდრე გაცილებით ხშირად გამოყენებად (ანდა მათთან მიახლოებულ) ინტერპოლაციური სიზუსტის ფორმულებს. როგორც რიცხვითი ექსპერიმენტიდან ცხადი ხდება, r -ის მნიშვნელობის თანდათანობითი შემცირებისას მოცემულ საზღვრებში ჩვენ ვიღებთ კვადრატურულ ფორმულებს რამდენადმე შემცირებული, მაგრამ მაინც გაუსის სიზუსტისადმი მიახლოებული სიზუსტით.

(7) სახის სინგულარული ინტეგრალების ყველაზე უფრო ეფექტური სიზუსტის ფორმულების აგების მიზნით ძალიან არსებითია გამოთვლითი ექსპერიმენტის როლი. ამასთან დაკავშირებით კიდევ ერთხელ უნდა აღინიშნოს მომატებული სიზუსტის სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატურული ფორმულების გამოყენების ცნობილი ეფექტურობა იმ ამოცანების რიცხობრივ ამოხსნით, რომლებიც დაკავშირებულია კომის გულინ სინგულარული ინტეგრალების შემცველი ინტეგრალური განტოლებების გადაწყვეტის საკითხთან.

პირველი თავის § 1.8-ში ხორციელდება დისერტანტის მიერ კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის მარკოვის ტიპის მომატებული რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულების აგება $n = 25$ კვანძისათვის. მოყვანილია სინგულარული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ფორმულა მარკოვის კვანძებისათვის. (მარკოვის სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ 12 ფესვს, ეს 12 ფესვი, დალაგებული კლებადობის მიხედვით და მათი 0-ის მიმართ სიმეტრიული მნიშვნელობები თვით $t = 0$ -ის ჩათვლით გვამღევს 25 კვანძს). მარკოვის 25 კვანძისათვის ვღებულობთ 7 სინგულარობის წერტილს t_{0j} , $j = 1, 2, \dots, 7$. მიღებული სინგულარობის

წერტილებში სინგულარული ინტეგრალის დასათვლელად ვიყენებთ კვადრატურულ ფორმულას

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\{t\} dt}{t-t_0} \approx 2 \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{\{t_k\}}{t_k-t_{0j}} + \frac{\{-t_k\}}{-t_k-t_{0j}} \right) + 2 \frac{\{0\}}{-t_{0j}}, \quad j=1,2,\dots,7$$

განხილული საკითხი წარმოადგენს მეტად მნიშვნელოვანს, იმ თვალსაზრისით, რომ აღნიშნული ტიპის სინგულარული ინტეგრალისათვის აიგო მუდმივკოეფიციენტებიანი კვადრატურული ფორმულა. მიღებული შედეგი მნიშვნელოვნად აუმჯობესებს § 1.7-ში მოყვანილ შედეგებს.

პირველი თავის § 1.9-ში განხილულია მ. კუბლაშვილის მიერ აგებულ მაღალი რიგის გამოთვლითი სქემებს წონიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის.

$$S(\{; t_0, \gamma) \equiv \frac{1}{fi} \int_L \frac{\{t\} dt}{(t-c)^\gamma (t-t_0)} \quad (t_0 \in L)$$

აგებულია კვადრატურული ფორმულა მოცემული ინტეგრალისათვის

$$S_n^{*(-1/2; -1/2)}(\{; t_0) = [1 + \sum_{\substack{\dagger=1 \\ \dagger \neq \epsilon}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\dagger k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\epsilon j} - t_{\dagger k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\epsilon k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\epsilon j} - t_{\epsilon k}} - P_{\epsilon j}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\epsilon k}(t_{\epsilon j})] \{t_{\epsilon j}\} - \\ - \sum_{\substack{\dagger=1 \\ \dagger \neq \epsilon}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\dagger k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\epsilon j} - t_{\dagger k}} \{t_{\dagger k}\} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\epsilon k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\epsilon j} - t_{\epsilon k}} \{t_{\epsilon k}\} + P_{\epsilon j}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\epsilon k}(t_{\epsilon j}) \{t_{\epsilon k}\}$$

სადაც

$$d_{\epsilon k} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m t_{\epsilon j} - t_{\epsilon j_0}}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m t_{\epsilon k} - t_{\epsilon j_0}}, \quad P_{\dagger k}^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{fi} \int_{t_{\dagger} t_{\dagger+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t-t_{\dagger j}}{t_{\dagger k} - t_{\dagger j}} dt$$

$$P_{\dagger k}^{*(-1/2; -1/2)} = \begin{cases} P_{\dagger 1}^{(1/2; -1/2)} + P_{\dagger -1m}^{(1/2; -1/2)}; & \dagger = 1, 2, 3, \dots, n; \\ P_{\dagger k}^{(1/2; 1/2)}, & k = 2, 3, \dots, m-1; \dagger = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$(\dagger = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m), \quad (t_0 \in \dagger \epsilon \dagger_{\epsilon+1}; \quad \epsilon = 1, 2, \dots, n)$$

ანალოგიურად ამოიწერება კვადრატული ფორმულების შესაბამისი გამოსახულებები $S_n^{*(-1/2; -1/2)}(\{; t_0)$ და $S_n^{*(1/2; 1/2)}(\{; t_0)$ -ის შემთხვევაში.

მტკიცდება, რომ როცა $\{t\} \in H_r^\Gamma$ ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|S^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\{; t_0) - S_n^{*(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\{; t_0)\|_{H_s} \leq \frac{C \ln n}{n^{r+\Gamma-1/2}}, \text{ სადაც } C \text{ რაიმე მუდმივია.}$$

ქვემოთ მოყვანილია სინგულარული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ცხრილი, ზემოთ აგებული კვადრატული ფორმულების გამოყენებით, განსაკუთრებულ $t_0 = \pm 1$ (ბოლო) წერტილებში, როცა ინტეგრების წირი ნამდვილი $[-1;1]$ მონაკვეთია. ამ შუალედის სხვადასხვა n დაყოფათა რიცხვისთვის, სადაც სიმკვრივე $\{t\} = t^2$

ცხრილი I

n	t_0	$S^{(1/2; -1/2)}(t^2; t_0)$	$S_n^{*(1/2; -1/2)}(t^2; t_0)$	$R_n^{(1/2; -1/2)} = S - S_n$
5	-1	-0,5	-0,496551	-0,003449
	1	1,5	1,48621	0,01379
10	-1	-0,5	-0,499256	-0,00074424
	1	1,5	1,49405	0,0059532
30	-1	-0,5	-0,499962	-0,0000380375
	1	1,5	1,49893	0,00106505
50	-1	-0,5	-0,49999	-0,0000101642
	1	1,5	1,49951	0,00048789

როგორც ცხრილიდან ჩანს n -ის ზრდასთან ერთად იზრდება სიზუსტე და $n = 50$ -ისთვის აღწევს 10^{-4} -ს

ნაშრომის II თავში ნაჩვენებია I თავში აგებული მიახლოებითი ფორმულების გამოყენება ერთი კლასის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისათვის. ამ კლასის განტოლებებზე მიიყვანება სხვადასხვა სახის გამოყენებითი (მათ შორის სამშენებლო მექანიკის) ტიპის, დირიხლეს (შესაბამისად გრეხის) და დრეკადობის თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები, რომელთა შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებები იწერება კომის გულიან სინგულარულ ინტეგრალებში.

მეორე თავის § 2.1-ში პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის ს. ბელოცერკოვსკისა და ი. ლიფანოვის მიერ რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმის აგება დისკრეტულ

განსაკუთრებულებათა მეთოდის გამოყენებით. განხილულია შემდეგი სახის პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება

$$\frac{1}{f_i} \int_{-1}^1 \frac{\xi(t) dt}{t_0 - t} + \int_{-1}^1 K(t_0, t) \xi(t) dt = f(t_0) \quad (8)$$

ვთქვათ (8) განტოლებაში $f(t)$ და $K(t_0, t)$ ფუნქციები ეკუთვნის ჰელდერის კლასს შესაბამისად $[-1; 1]$ და $[-1; 1] \times [-1; 1]$ სიმრავლეზე და ამ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი შესაბამისი მოცემული ინდექსისათვის, მაშინ გამოყენებულია შემდეგი სახის მიახლოებითი გამოთვლის ალგორითმი

$$\sum_{k=1}^n \frac{\xi_n(t_k) h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k) \xi_n(t_k) h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\xi_n(t_k) h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k) \xi_n(t_k) h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^n \xi_n(t_k) h = C$$

$$x_{0n} + \sum_{k=1}^n \frac{\xi_n(t_k) h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k) \xi_n(t_k) h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

(9), (10), (11) სისტემების ამონახსნებსა და (8) განტოლების ამონახსნებს შორის ადგილი აქვს დამოკიდებულებას:

$$|\xi(t_k) - \xi_n(t_k)| \leq \mu_n(t_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

სადაც მნიშვნელობა $\mu_n(t_k)$ აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს:

1) ყველა წერტილისათვის $t_k \in [a + u, b + u]$, სადაც $u > 0$

$$\mu_n(t_k) \leq O(h^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 > 0$$

2) ყველა წერტილისათვის $t_k \in [a, b]$

$$\sum_{k=1}^n \mu_n(t_k) \leq O(h^{\lambda_2}), \quad \lambda_2 > 0$$

აქ სიმრავლე $E = \{t_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ და $E_0 = \{t_{0j}, j = 0, 1, \dots, n\}$ ანხორციელებს [-1.1] მონაკვეთის კანონიკურ დაყოფას.

როგორც ამ ფორმულებიდან ჩანს, ბელოცერკოვსკის მიერ აგებული სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი საკმაოდ მარტივია, მაგრამ მათ არ აქვთ სიზუსტის მაღალი რიგი.

მეორე თავის § 2.2-ში განხილულია პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი გახსნილი კონტურების შემთხვევები. განიხილება შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება:

$$\frac{1}{f i_L} \int \frac{\xi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{f i_L} \int K(t_0, t) \xi_0(t) dt = f(t_0), \quad (t_0 \in L) \quad (12)$$

ჩავთვალოთ, რომ (12) განტოლებაში $L \equiv ab$ წარმოადგენს გახსნილ გლუვ კონტურს, რომელიც მოცემულია პარამეტრული სახით $t = t(s)$ ($s_a \leq s \leq s_b$), $K(t_0, t)$ და $f(t)$ L -ზე მოცემული ჰელდერის კლასის ფუნქციებია. ვეძებთ (12) განტოლების ამონახსნს, რომელიც შემოსაზღვრულია a ბოლოზე და შემოუსაზღვრელი b -ზე. ასეთ ამონახსნს, როგორც ცნობილია, აქვს შემდეგი სახე

$$\xi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \{ (t),$$

მახასიათებელი ნაწილის შებრუნებით, მოცემული განტოლება შეიძლება მოყვანილი იქნეს სახეზე:

$$\{ (t_0) + \frac{1}{f i_{ab}} \int \left[\frac{1}{f i_{ab}} \int \frac{t_1-b}{t_1-t_0} \frac{k(t_1, t)}{t_1-t_0} dt_1 \right] \xi_0(t) dt = \frac{1}{f i_{ab}} \int \sqrt{\frac{t-b}{t-a}} \frac{f(t)}{t-t_0}$$

შემდეგში ამ უკანასკნელ განტოლებას განვიხილავთ, როგორც ოპერატიულ განტოლებას, გარკვეულ ფუნქციონალურ სივრცეში. ამასთან დაკავშირებით მას ჩავწერთ შემდეგი სახით

$$K^0 \{ = I \{ + k \{ = f_0(t_0),$$

თუ მიღებულ განტოლებაში შემავალ სინგულარულ ინტეგრალებს შევცვლით წინა თავებში განხილული მიახლოებითი გამოთვლის სქემებით, მივიღებთ შემდეგი სახის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას $\{_n(t_{\epsilon_j})$ -საძიებელი უცნობების მიმართ.

$$\{_n(t_{\epsilon_j}) + \sum_{i=1}^n \sum_e^m q_{ie} A_n(t_{ie}, t_{\epsilon_j}) \{_n(t_{ie}) = f_0(t_{\epsilon_j}),$$

სადაც

$$A_n(t_{ie}, t_{\epsilon_j}) = \left[1 + \sum_{\substack{\dagger=1 \\ \dagger \neq \epsilon}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\dagger k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\dagger k} - t_{\epsilon_j}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\epsilon k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vk} - t_{\epsilon_j}} - P_{\epsilon j}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\epsilon k}(t_{vj}) \right] K(t_{vj}; t_{ie}) - \\ - \sum_{\substack{\dagger=1 \\ \dagger \neq \epsilon}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\dagger k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\dagger k} - t_{\epsilon_j}} K(t_{\dagger k}; t_{ie}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\epsilon k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vk} - t_{\epsilon_j}} K(t_{vk}; t_{ie}) + P_{\epsilon j}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\epsilon k}(t_{vj}) K(t_{vk}; t_{ie}),$$

ხოლო

$$f_0(t_{vj}) = \left[1 + \sum_{\substack{\dagger=1 \\ \dagger \neq \epsilon}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\dagger k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\dagger k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\epsilon k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\epsilon k}} - P_{\epsilon j}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\epsilon k}(t_{vj}) \right] f(t_{vj}) - \\ - \sum_{\substack{\dagger=1 \\ \dagger \neq \epsilon}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\dagger k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\epsilon_j} - t_{\dagger k}} f(t_{\dagger k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\epsilon k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\epsilon_j} - t_{vk}} f(t_{vk}) + P_{\epsilon j}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\epsilon k}(t_{vj}) f(t_{vj}),$$

$$(v = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$$

$$P_{\dagger k}^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{fi_{\dagger \dagger+1}} \int \sqrt{\frac{t-b}{t-a}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t-t_{\dagger j}}{t_{\dagger k} - t_{\dagger j}} dt \quad q_{ij}^{(-1/2; 1/2)} = \frac{1}{fi_{\dagger \dagger+1}} \int \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^m \frac{t-t_{ij}}{t_{ie} - t_{ij}} dt$$

$$P_{\dagger k}^{*(1/2; -1/2)} = \begin{cases} P_{\dagger k}^{(1/2; -1/2)}, & k = \overline{2, m-1}; \dagger = \overline{1, n}, \\ P_{\dagger 1}^{(1/2; -1/2)} + P_{\dagger -1, m}^{(1/2; -1/2)}; & k = 1; \dagger = \overline{1, n}, \end{cases} \quad d_{vk} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m (t_{vj} - t_{vj_0})}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m (t_{vk} - t_{vj_0})}$$

ამასთან, მტკიცდება, რომ როცა $r = 1$, შესაბამის დაშვებებში K -სა და f -

ის მიმართ, მაშინ $\|\{ - L_n \{ \|$ -ის რიგი არის $O\left(\frac{1}{n^{r+1/2-v}}\right)$, სადაც v რაგინდ

მცირე დადებითი რიცხვია.

მეორე თავის § 2.3-ში განხილულია პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნა, გახსნილი კონტურებით, არანულოვანი ინდექსის შემთხვევაში. აქაც კვლავ განიხილება განტოლება

$$\frac{1}{fi} \int_L \frac{\xi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{fi} \int_L K(t_0, t) \xi_0(t) dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L) \quad (13)$$

კვლავ ვიგულისხმობთ, რომ $f(t), K(t_0, t) \in H$ და განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ვეძებთ (13) განტოლების ამონახსნს, რომელიც შემოუსაზღვრელია ორივე a და b ბოლოებზე. როგორც ცნობილია ამ შემთხვევაში (13) განტოლების ინდექსი 1-ის ტოლია და ამონახსნი ზოგადად ცალსახად არ განისაზღვრება.

(13) განტოლების მახასიათებელი ნაწილის მიმართ ამოხსნით იგი მიიყვანება ეკვივალენტურ განტოლებაზე:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi(t_0) + \frac{1}{fi} \int_{ab} \frac{1}{fi} \int_{ab} \frac{K(t_1, t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \frac{dt_1}{t_1-t_0} \xi_0(t) dt &= \frac{1}{fi} \int_{ab} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-t_0)}} \\ \int_{ab} \xi_0(t) dt &= C \end{aligned} \right.$$

სადაც C მუდმივი რიცხვია.

მოცემულ შემთხვევაში ოპერატორულ განტოლებას ექნება სახე:

$$V_\xi = I_\xi + k_1 \xi = f_1 \quad (14)$$

სადაც

$$|_1 \xi = \frac{1}{fi} \int_{ab} \left[\frac{1}{fi} \int_{ab} \frac{K(t_1, t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t_1-t)}} dt_1 \right] \xi_0(t) dt$$

$$f_1(t_0) \equiv \frac{1}{fi} \int_{ab} \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-t_0)}} + C$$

აქაც, თუ შევცვლით (14) განტოლებაში შემავალ სინგულარულ ინტეგრალებს მათი მიახლოებითი გამოთვლის სქემებით, მივიღებთ შემდეგი სახის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ {}_n(t_{\epsilon_j}) + \sum_{\dagger=1}^n \sum_{e=1}^m q_{ie}^{*(1/2;1/2)} B_n(t_{ie}; t_{\epsilon_j}) = f_{ln}(t_{\epsilon_j}) \\ (\epsilon = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, m) \\ (\epsilon = n; j = 1, 2, \dots, m-1) \\ \sum_{\dagger=1}^n \sum_{k=1}^m q_{\dagger k}^{*(1/2;1/2)} \{ (t_{\dagger k}) = C; \end{array} \right. \quad (15)$$

სადაც

$$B_n(t_{ie}, t_{\epsilon_j}) = \left[\sum_{\substack{\dagger=1 \\ \dagger \neq \epsilon}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\dagger k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\dagger k} - t_{\epsilon_j}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\epsilon k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\epsilon k} - t_{\epsilon_j}} - P_{\epsilon_j}^{*(-1/2;-1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\epsilon k}(t_{\epsilon_j}) \right] K(t_{\epsilon_j}, t_{ie}) - \\ - \sum_{\substack{\dagger=1 \\ \dagger \neq \epsilon}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\dagger k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\dagger k} - t_{\epsilon_j}} K(t_{\dagger k}, t_{ie}) - \sum_{\substack{\dagger=1 \\ \dagger \neq j}}^n \frac{P_{\epsilon k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\epsilon k} - t_{\epsilon_j}} K(t_{\epsilon k}, t_{ie}) + P_{\epsilon_j}^* \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\epsilon k}(t_{\epsilon_j}) K(t_{\epsilon k}, t_{ie})$$

$\varphi_n(t_{\nu_j})$ - კვლავ საძებნი ფუნქცია.

$$f_{ln}(t_{\epsilon_j}) = \left[\sum_{\substack{\dagger=1 \\ \dagger \neq \epsilon}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\dagger k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\epsilon_j} - t_{\dagger k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\epsilon k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\epsilon_j} - t_{\epsilon k}} - P_{\epsilon_j}^{*(-1/2;-1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\epsilon k}(t_{\epsilon_j}) \right] f(t_{\epsilon_j}) - \\ - \sum_{\substack{\dagger=1 \\ \dagger \neq \epsilon}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\dagger k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\epsilon_j} - t_{\dagger k}} f(t_{\dagger k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\epsilon k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\epsilon_j} - t_{\epsilon k}} f(t_{\epsilon k}) + P_{\epsilon_j}^{*(-1/2;-1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\epsilon k}(t_{\epsilon k}) f(t_{\epsilon k})$$

$$P_{\dagger k}^{*(-1/2;-1/2)} = \frac{1}{fi} \int_{\dagger+\dagger+1} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\dagger j}}{t_{\dagger k} - t_{\dagger j}} dt$$

$$q_{il}^{(1/2;1/2)} = \frac{1}{fi} \int_{\dagger+\dagger+1} \sqrt{(t-a)(t-b)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^m \frac{t - t_{ij}}{t_{ie} - t_{ij}}$$

$$P_{\dagger k}^{(-1/2;-1/2)} = \begin{cases} P_{\dagger k}^{(1/2;1/2)}, & k = \overline{2, m-1}; \dagger = \overline{1, n}, \\ P_{\dagger 1}^{(-1/2;-1/2)} + P_{\dagger -1m}^{(-1/2;-1/2)}; & k = 1; \dagger = \overline{1, n}; \end{cases}$$

$$d_{\epsilon k} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m t_{\epsilon_j} - t_{\epsilon_{j_0}}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j_0 \neq k}}^m t_{\epsilon_k} - t_{\epsilon_{j_0}}}, \quad q_{\dagger k}^{*(1/2;1/2)} = \begin{cases} q_{\dagger k}^{(1/2;1/2)}, & k = \overline{2, m-1}; \dagger = \overline{1, n}, \\ q_{\dagger 1}^{(1/2;1/2)} + P_{\dagger -1m}^{(1/2;1/2)}; & k = 1; \dagger = \overline{1, n}; \end{cases}$$

კვლავ ვიგულისხმობთ, რომ $K, f \in H_r^{(r)}(L)$ მტკიცდება, რომ თუ (13) განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, მაშინ გარკვეული $n=n_0$ -დან დაწყებული (13) განტოლებას და (15) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი,

ამასთან, თუ $L_n(\varphi_n; t_0)$ არის (13) განტოლების ამონახსნი, მაშინ K და f -ის მიმართ ზემოთ მოყვანილ დაშვებებში ადგილი აქვს შეფასებებს

$$\|\{t\} - L_n[\{t\}, t]\|_{H_s} \leq \frac{A_r \ln n}{n^{r+r-s-1/2}}, \quad (m > r+1, s < r-1/2),$$

სადაც A_r მუდმივია, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ L -ზე და $\varphi^{(r)}$ -ფუნქციის ჰელდერის მაჩვენებელზე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: იმ შემთხვევაში, როცა (13) განტოლების ინდექსი უარყოფითია $\kappa = -1$, ყოველთვის არ არსებობს აღნიშნული ზუსტი განტოლების ამონახსნი, ის რომ არსებობდეს მარჯვენა მხარე $f(t_0)$ უნდა აკმაყოფილებდეს დამატებით პირობას

$$\int_{ab} \frac{f(t)dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = 0 \quad (16)$$

ამიტომ (13) განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის დროს გათვალისწინებული უნდა იქნეს (16) დამატებითი პირობა.

განხილულია ზემოთ მოყვანილი ალგორითმით შემდეგი სახის პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამოხსნა მასში შემავალი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის

$$\frac{1}{2f} \int_{-a}^a \{t\} \left[\frac{1}{t-t_0} + \frac{t_0-t}{(t_0-t)^2 + 4H^2} \right] dx = f(t_0)$$

ცხრილი 2 $n = 3; m = 2; H = 1; f = 2$ (ზუსტი ამონახსნია $\varphi = 2$)

t_{vj}	-1	-0.3333	0.3333	1
$\varphi(t_{vj})$	1.85	1.98	2.08	2.13

ცხრილი 3 $n = 3; m = 4; H = 1; f = 2$

t_{vj}	-1	-0.778	-0.556	-0.333	-0.111	0.111	0.333	0.556	0.778	1
$\varphi(t_{vj})$	1.8	1.86	1.90	1.94	1.98	2.02	2.06	2.09	2.12	2.14

ცხრილი 4

$n = 5; m = 2; H = 1; f = 2$

t_{vj}	-1	-0.6	-0.2	-0.2	-0.6	1
$\varphi(t_{vj})$	1.82	1.902	1.981	0.050	2.104	2.138

მეორე თავის § 2.4-ში განხილულია პირველი გვარის სრული სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნა, გახსნილი კონტურებით. აქაც კვლავ განიხილება განტოლება

$$\frac{1}{fi} \int_L \frac{\xi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{fi} \int_L h(t_0, t) \xi_0(t) dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L) \quad (17)$$

კვლავ ვიგულისხმობთ, რომ ვეძებთ (17) განტოლების a ბოლოებზე შემოსაზღვრულ და b ბოლოზე შემოყსაზღვრულ ამოხსნას, მაშინ როგორც ცნობილია (17) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\xi(t_0) + \frac{1}{fi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{t-t_0} dt + \frac{1}{fi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} h(t_0, t) \xi(t) dt = f(t_0)$$

სინგულარული; ინტეგრალებისათვის წინა თავებში აგებული მიახლოებითი გამოთვლის სქემების გამოყენებით ვღებულობთ შემდეგი სახის განტოლებას.

$$\xi(t_0) + [D_n^{(1/2; -1/2)}]^{-1} \left[L_n \left[\int_L (L_n h(t_0, t) \xi_n, t_0) dt \right] \right] = [D_n^{(1/2; -1/2)}] (L_n f)(t_0).$$

სადაც, თუ გავითვალისწინებთ $D_n^{(1/2; -1/2)}$ ოპერატორის სტრუქტურას, ცხადი გახდება, რომ უკანასკნელი განტოლების მარცხენა მხარის ოპერატორი მოქმედებს უბან-უბან პოლინომიურ ქვესივრციდან (რომლის ხარისხი ≤ 2) იგივე ქვესივრცეში, რომელშიც ვიხილავთ განტოლებას. მტკიცდება, რომ

$$D_n^{(1/2; -1/2)} (\xi; t_0) + L_n \left[\int_L (L_n h(t_0, t) \xi_n(t) dt; t_0) \right] = L_n [f; t_0]$$

განტოლებას საკმარისად დიდი n -ებისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

მეორე თავის § 2.5-ში განხილულია ჩვენს მიერ აგებული მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულებით პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალების რიცხვითი ამოხსნა.

$$\frac{1}{f_i} \int_L \frac{\xi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{f_i} \int_L K(t_0, t) \xi_0(t) dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L) \quad (18)$$

კვლავ ვგულისხმობთ, რომ $f(t), K(t_0, t) \in H$. (18)-ისათვის ვიყენებთ კვადრატურულ ფორმულას

$$\frac{1}{f_i} \sum_{k=1}^7 \frac{\xi(t_k)}{t_k - t_{0j}} + \frac{1}{f_i} \sum_{k=1}^7 K(t_{0j}, t_k) \xi(t_k) = f(t_{0j})$$

სადაც $j = 1, 2, \dots, 7$. აქ t_k და t_{0j} , $k, j = 1, 2, \dots, 7$ § 1.8-ში ჩვენს მიერ მოძებნილი კვანძითი და სინგულარობის წერტილებია.

ნაშრომის III თავში წარმოდგენილია სამშენებლო მექანიკის მეტად აქტუალური საკითხი, ბზარების ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით. ცნობილია, რომ როცა ბზარს აქვს გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირის ფორმა, იგი მიიყვანება დირიხლეს ამოცანაზე.

მესამე თავის § 3.1-ში წარმოდგენილია დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა გახსნილი სასაზღვრო წირის შემთხვევაში. აღვნიშნოთ D - თი სიბრტყე, რომელიც გაჭრილია გლუვი ლიაპუნოვის $L=ab$ წირის გასწვრივ (ბოლოებით a და b), ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: უნდა ვიპოვოთ D -არეში ისეთი უსასრულოებაში ქრობადი W ჰოლომორფული ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან წირის გასწვრივ, გარდა a და b ბოლოებისა. სადაც ის

აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $|w(z)| \leq \frac{const}{|z-c|^r}; \quad 0 \leq r < 1$

c ემთხვევა a ან b , შემდეგი ზღვრული პირობით

$$\operatorname{Re} w^+(t_0) = \operatorname{Re} w^-(t_0) = f(t_0), \quad (19)$$

სადაც $f(t_0)$ L -ზე მოცემული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა.

დავუშვათ $U(x, y) + iV(x, y) = w(z) = \frac{1}{f} \int_L \frac{\xi(t) dt}{t-z}, \quad (z) \in D.$

ვეძებთ ამონახსნი შემდეგი სახით: $U(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{f} \int_L \frac{\{t\} dt}{t-z}$, ($z \in D$), (20)

სადაც $\{t\}$ – საძიებელი ნამდვილი ფუნქცია.

(20) ტოლობა ჩავსვათ (19) სასაზღვრო ტოლობაში. მაშინ $\{t\}$ -ს მოძებნის ამოცანა დაიყვანება შემდეგი სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$\operatorname{Re} \frac{1}{f} \int_L \frac{\{t\} dt}{t-t_0} = f(t_0). \quad (21)$$

როგორც მუსხელიშვილის თეორიიდანაა ცნობილი, (21)

განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს სამი ტიპის ამონახსნი:

- 1) ერთ ბოლოზე შემოსაზღვრული და მეორეზე შემოუსაზღვრელი;
- 2) ორივე ბოლოზე შემოუსაზღვრელი;
- 3) ორივე ბოლოზე შემოსაზღვრული.

სიმარტივისათვის ვეძებთ $\{t\}$ ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია მრუდის a ბოლოზე და არ არის შემოსაზღვრული b ბოლოზე:

$$\{t\} = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \{t\}_0$$

მაშინ (21) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\operatorname{Re} \frac{1}{f} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \{t\}_0 = f(t_0) \quad (22)$$

ახლა ვიგულისხმობთ, რომ L -წირი მოცემულია მხოლოდ გრაფიკულად.

სპეციალური პაკეტი - პროგრამა „**Spline toolbars**“-ის საშუალებით

დისპლეის ეკრანზე შეგვყავს ამ წირის გრაფიკის შესაბამისი რამდენიმე

წერტილის კოორდინატები. ეკრანზე წირის სხვა პარამეტრებთან ერთად

დაიწერება წირის სიგრძის შესაბამისი s - პარამეტრი, რომლის შემდეგაც

საშუალება გვქვია დავწეროთ მრუდის განტოლება $t = t(s)$, სადაც s

არის წირის სიგრძის შესაბამისი ბუნებრივი პარამეტრი. ჩავთვალოთ,

რომ n - ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, გავყოთ $[a, b]$ შუალედი n -

ტოლ ნაწილად წერტილებით: $S_{\uparrow} = a + \frac{b-a}{n}(\uparrow - 1)$, $\uparrow = 1, 2, \dots, n+1$

შემდეგ მოცემული ფიქსირებული m ნატურალური რიცხვისთვის ყოველი $[S_{\dagger}, S_{\dagger+1}]$ სეგმენტი დავყოთ ნაწილებად წერტილებით:

$$S_{\dagger k} = S_{\dagger} + h \cdot x_k \left(h = \frac{b-a}{n} \right), k = 1, 2, \dots, m,$$

სადაც $\{x_k\}_{k=1}^m$ არის $[0,1]$ შუალედიდან აღებული მოცემული წერტილთა სისტემა. შემდეგში გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ, $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ რიცხვები დანომრილია ზრდის მიხედვით.

$$\text{აღვნიშნოთ } \dagger_{\dagger} = t(s_{\dagger}), \quad t_{\dagger k} = t(s_{\dagger k}) \quad (\dagger = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m)$$

ვიგულისხმობთ, რომ \dagger, ϵ ნებისმიერია $1, 2, \dots, n$ რიცხვთაგან და t_0 წერტილი განსხვავებულია $t_{\dagger k}$ კვანძებისაგან. განვიხილოთ გამოსახულება:

$$\mathbb{E}_{\dagger \epsilon}(\{; t, t_0) = \{ (t_0) + \sum_{k=1}^m l_{\dagger k}(t) \frac{t-t_0}{t_{\dagger k} - t_0} \cdot \{ (t_{\dagger k}) + \sum_{k=1}^m l_{\dagger k}(t) \frac{t-t_0}{t_0 - t_{\dagger k}} \cdot L_{\epsilon}(\{; t_0),$$

სადაც
$$L_{\epsilon}(\{; t_0) = \sum_{k_0=1}^m l_{\epsilon k_0}(t_0) \chi_{0n}(t_{\nu k_0}),$$

$$l_{\dagger k}(t) = \frac{\check{S}_{\dagger}(t)}{(t - t_{\dagger k}) \check{S}'_{\dagger}(t_{\dagger k})}, \quad \check{S}_{\dagger}(t) = \prod_{k=1}^m (t - t_{\dagger k}),$$

ხოლო $\{, L$ - ზე მოცემული ჰელდერის კლასის ფუნქციაა ($\{ \in H$). შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{E}_{\dagger \epsilon}(\{; t, t_0)$ გამოსახულებას შეიძლება მივანიჭოთ სრულიად გარკვეული აზრი, როცა $t = t_{\dagger k}$ (ამ შემთხვევაში უნდა ვიგულისხმობთ, რომ $t \rightarrow t_{\dagger k}$).

აღვნიშნოთ ახლა $W_n(\{; t, t_0) = \mathbb{E}_{\dagger \epsilon}(\{; t, t_0)$, $t \in \dagger_{\dagger} \dagger_{\dagger+1}$, $t_0 \in \dagger_{\epsilon} \dagger_{\epsilon+1}$ $\dagger = 1, 2, \dots, n$; $\epsilon = 1, 2, \dots, n$, და (22) ინტეგრალურ განტოლებაში $\{_0(t)$ მიახლოებით შევცვალოთ $W_n(\{; t, t_0)$ ფუნქციით, შემდეგ t_0 -ში ჩავსვათ $\{t_{\dagger k}\}$ ($\dagger = 1, 2, \dots, n$; $k=1, 2, \dots, m$) დისკრეტული წერტილები. (22)-განტოლებიდან მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას $\{\{t_{\dagger k}\}$ ($\dagger = 1, 2, \dots, n$; $k=1, 2, \dots, m$) უცნობების მიმართ. მტკიცდება, რომ ეს

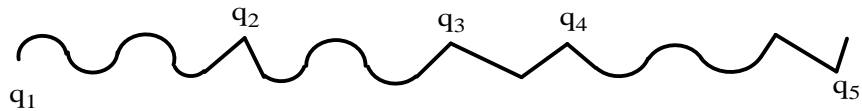
სისტემა ცალსახად ამოხსნადია. ვპოულობთ ამ ამონახსნებს და დირიხლეს ამოცანის მიახლოებით ამონახსნად ვღებულობთ:

$$U_n(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{f} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\mathbb{E}_n(t)}{t-z} dt, \quad (z \in D) \quad (23)$$

სადაც $\mathbb{E}_n(t)$ წარმოადგენს $\left\{ \dagger_{0j} \right\}_{j=1}^n$ მნიშვნელობაზე აგებულ ლანგრანჟის ინტერპოლაციურ მრავალწევრს,

$$\psi_n(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\omega(t)}{(t-t_{0j})\omega'(t_{0j})} \cdot \varphi_{0n}(t_{0j}).$$

როცა L წირი უბან-უბან გლუვია q_1, q_2, \dots, q_n კუთხითი წერტილებით ან (იხ. ნახ.1) $f(t)$ -ს გააჩნია პირველი გვარის წყვეტები, მაშინ



ნახ. 1.

დირიხლეს ამოცანაში $S^{(1/2; -1/2)}(\{; t_0)$ სინგულარულ ინტეგრალს ვცვლით

მ. კუბლაშვილის მიერ აგებული $s_{n, q_1, q_2, \dots, q_n}(\{; t_0)$ მაღალი სიზუსტის მიახლოებითი მასპროქსიმირებელი ჯამით:

$$\begin{aligned} s_{n, q_1, q_2, \dots, q_n}(\{; t_0) &= \sum_{\dagger=1}^n \left\{ \{ (t_0) \} \right\}_{r\dagger} (t_0) + \sum_{k=1}^m \frac{P_{r\dagger k}}{t_0 - t_{r\dagger k}} [L_{r\dagger}(\{; t_0) - \{ (t_{r\dagger k}) \}] + \\ &+ \sum_{i=1}^l [\{ (q_i) \}]_{i\dagger} (t_0) + \sum_{k=1}^m \frac{\Omega_{i\dagger k}(t_0; q_i)}{q_i - t_{i\dagger k}}] + [L_{i,0}(\{; q_i) - \{ (t_{i\dagger k}) \}] + \{ (q_r) \}]_{r-1\dagger} (t_0) + \\ &+ \sum_{k=1}^m \frac{\Omega_{r-1\dagger k}(t_0; q_r)}{q_r - t_{r-1\dagger k}} \times [L_{r-1, n-1}(\{; q_r) - \{ (t_{r-1\dagger k}) \}] \}. \end{aligned}$$

სადაც

$$\Omega_{\dagger k}(t_0, q_i) = p_{\dagger k} + \frac{t_0 - q_i}{(t_0 - t_{\dagger k}) \check{S}'_{\dagger}(t_{\dagger k})} [\check{S}_{\dagger}(t_0) [x_{\dagger}(t_0) + y_{\dagger}(t_0)] - p_{\dagger k} \check{S}'_{\dagger}(t_{\dagger k})]$$

$$y_{\dagger}(t_0) \equiv \frac{1}{f i} \ln \frac{\dagger_{\dagger+1} - t_0}{\dagger_{\dagger} - t_0}; \quad x_{\dagger}(t_0) \equiv \sum_{j=1}^m \frac{P_{\dagger j}}{t_0 - t_{\dagger j}}$$

$$P_{\dagger k} = \frac{1}{f i} \int_{\dagger_{\dagger} \dagger_{\dagger+1}}^{\sqrt{t-a}} \frac{\check{S}_{\dagger}(t) dt}{\sqrt{t-b} (t - t_{\dagger k}) \check{S}'_{\dagger}(t_{\dagger k})}$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, r-1, r+1, \dots, l) \quad (t_0 \in q_r, q_{r+1})$$

$t_{\dagger k} (i = 1, 2, \dots, e; \dagger = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m)$ კვანძითი წერტილებია $q_i q_{i+1} \subset L$ რკალზე.

(23) ფორმულაში L მრუდთან ახლო წერტილისთვის $z = x + iy$ ვიყენებთ მ. კუბლაშვილის მიერ აგებულ მაღალი რიგის სიზუსტის კვადრატურულ ფორმულას:

$$\frac{1}{f} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\mathbb{E}_n(t)}{t-z} \approx 2iL_v(W_v; t_0) + 2i \sum_{\dagger=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\dagger k}(\dagger; t; z) \cdot \frac{\mathbb{E}_n(\dagger_{\dagger+k}) - L_{\dagger k}}{\dagger_{\dagger+k}}$$

სადაც

$$P_{\dagger k}(p, t, z) = \frac{1}{2} p_{\dagger}(p) + \frac{(z - t_0)}{f i} \int_{\dagger_{\dagger} \dagger_{\dagger+1}}^{\sqrt{t-a}} \frac{l_{\dagger k}(t) dt}{t-z} + \frac{(z - t_0)^2}{2f i} \int_{\dagger_{\dagger} \dagger_{\dagger+2}}^{\sqrt{t-a}} \frac{l_{\dagger k}(t) dt}{(t-z)^2};$$

დანარჩენი z წერტილებისთვის გამოვიყენოთ ჩვეულებრივი კვადრატურული ფორმულა.

$$\frac{1}{f} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\mathbb{E}_n(t)}{t-z} \approx 2i \sum_{\dagger=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\dagger k} \cdot \frac{\mathbb{E}_n(\dagger_{\dagger+k}) - L_{\dagger k}}{\dagger_{\dagger+k} - z}.$$

მაგალითისთვის, L კონტურის როლში მივიღოთ გრაფიკულად ფორმულირებული მრუდი (სურ.6), ხოლო მარჯვენა მხარედ $f(t) = \text{Re}(t) + \text{Im}(t)$ და გამოვთვალოთ დირიხლეს ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა კონტურის დაყოფათა n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის. შედეგები წარმოდგენილია (5,6,7) ცხრილებში:



ნახ. 2. გრაფიკულად ფორმულირებული მრუდი

პროგრამა დავწერეთ „Mathematica“-ში.

n=10

ცხრილი 5

Z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
0.005i	$5.84648 \cdot 10^{-15}$	-0.00359624	0.00359624
$2f + 0.005i$	1.	0.866977	0.133003

n=50

ცხრილი 6

Z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
0.005i	$5.84648 \cdot 10^{-15}$	-0.00469624	0.0046966
$2f + 0.005i$	1.	0.93816	0.061804

n=100

ცხრილი 7

Z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
0.005i	$5.84648 \cdot 10^{-15}$	-0.00959009	0.009004
$2f + 0.005i$	1.	0.95221	0.04779493

აგებული ალგორითმის ეფექტურობა კარგად ჩანს მიღებული ცხრილებიდან, როცა ბზარს აქვს ნებისმიერი გლუვი გახსნილი წირის ფორმა, რომლის პარამეტრული განტოლებაც უცნობია.

მესამე თავის § 3.2-ში მოყვანილია დირიხლეს სახეშეცვლილი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა გახსნილი კონტურების შემთხვევაში.

როგორც ცნობილია, ბზარების, გრეხის, კონფორმულად გადამსახავი ფუნქციის პოვნის ამოცანა (ამ უკანასკნელზე, თავის მხრივ, მიიყვანება მრავალი გამოყენებითი ტიპის ამოცანები, რომელიც ფორმულირდება შემდეგი სახით):

ვთქვათ, L - აღნიშნავს გლუვ მარტივ, ლიპონოვის გახსნილ წირს. ავღნიშნოთ D -თი სიბრტყე, რომელიც გაჭრილია L -ის გასწვრივ. ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: უნდა ვიპოვოთ D -არეში ისეთი უსასრულობაში ქრობადი Φ ჰოლომორფული ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად

გაგრძელებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან L - წირის გასწვრივ, გარდა a და b ბოლოებისა, სადაც ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$|\Phi(z)| < \frac{cont}{|z-c|^\alpha} \quad 0 < \alpha \leq cont < 1$$

c ემთხვევა a -ს ან b -ს, შემდეგი სასაზღვრო პირობით

$$Re\Phi^+(t_0) = Re\Phi^-(t_0) = f(t_0) + d,$$

სადაც $f(t_0) - L$ -ზე მოცემული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო d განისაზღვრება ამოცანის ამოხსნის პროცესში.

დავუშვათ

$$U(x, y) + iV(x, y) = \phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t-z}, \quad (z \in D)$$

ვეძებთ ამონახსნი შემდეგი სახით

$$U(x, y) = Re \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0} \quad (z \in D) \quad (24)$$

სადაც $\varphi_0(t)$ საძებნი ნამდვილი ფუნქციაა. მაშინ φ ფუნქციის მოძებნის ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$Re \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t-z} - \frac{1}{\pi} \int_L \varphi_0(t) ds = f(t_0) \quad (25)$$

(s -არის L წირის რეალური აბცისა). ამასთან L კონტურზე დადებით მიმართულებად იგულისხმება L -ზე გადაადგილება s -პარამეტრის ზრდის მიხედვით.

როგორც ცნობილია (25) განტოლება ცალსახად ამოხსნადია და თუ $\varphi(t)$ არის მისი ამოხსნა, მაშინ საძებნი $u(x, y)$ ამოხსნა მოიცემა (24) ფორმულით, ამასთან, სასაზღვრო პირობაში შემავალი საძებნი მუდმივი

$$d = \frac{1}{\pi} \int_L \varphi(t) ds$$

გარკვეული გარდაქმნებით, საწყისი ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{[y'(\sigma) \cos \theta - x'(\sigma) \sin \theta] e^{i\theta} - i(t-t_0)}{t-t_0} \cdot \frac{\varphi_0(t) dt}{t'(\sigma)} = f(t_0) \quad (26)$$

ამ განტოლების (ნამდვილი) $\varphi(t)$ ამოხსნის შემდეგ საძიებელ $U(x, y)$ ჰარმონიულ ფუნქციას ვიპოვით ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე, ხოლო d მუდმივისათვის გვექნება

$$d = \frac{1}{\pi} \int_L \varphi_0(t) \frac{dt}{t'(\sigma)}.$$

გამოვიყენოთ პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნების წინა თავებში განხილული წარმოდგენები,

მაშინ, თუ $\varphi_0(t)$ ამონახსნს ვეძებთ $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi(t)$ სახით, სადაც

$\varphi \in H$, მაშინ (26) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} k_1(t, t_0) \varphi(t) = f(t_0)$$

$$K(t_0, t) = \frac{[y'(\sigma) \cos \vartheta - x'(\sigma) \sin \vartheta]}{t-t_0} \cdot \frac{1}{t'(\sigma)}$$

როგორც ცნობილია, ამ განტოლებას აქვს H კლასის ერთადერთი ამონახსნი.

როცა ამონახსნს ვეძებთ $\varphi_0(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{(t-a)/(t-b)}}$ სახით, მაშინ (26)

განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-t_0)}} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{k_1(t_0, t) \varphi(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = f(t_0), \quad (27)$$

ასეთ შემთხვევაში (27) განტოლების ცალსახად ამოხსნისათვის, ამონახსნი უნდა აკმაყოფილებდეს დამატებით პირობას

$$\int_L \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = C,$$

სადაც C რაიმე მუდმივია.

ბოლოს, როცა ამონახსნს ვეძებთ $\varphi(t) = \sqrt{(t-a)(t-b)} \varphi_0(t)$ სახით,

(26) განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{(t-a)(t-b)} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L \sqrt{(t-a)(t-b)} k_1(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0) \quad (28)$$

(28) განტოლებას, რომ ჰქონდეს ამონახსნი უნდა სრულდებოდეს დამატებითი პირობა, $\int_L \frac{f(t)dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = 0$, ამ დროს მას ექნება ერთადერთი ამონახსნი. (26), (27), (28) განტოლების რიცხვით ამონახსნებზე ჩვენ აქ აღარ შევჩერდებით, რადგან ეს საკითხი ჩვენ დაწვრილებით განვიხილეთ წინა თავებში.

გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილ განტოლებებზე II თავში ინტეგრალური განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნის სქემები, მას შემდეგ რაც შესაბამისი მიახლოებითი სისტემიდან ვიპოვიოთ $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ -ს მნიშვნელობებს, ამოცანის მიახლოებით ამონახსნად მივიღოთ

$$U_n(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{ab} \rho(t) \frac{\psi_n(t)}{t-z} dt \quad (z \in D), \quad (29)$$

სადაც $\psi_n(t)$ -წარმოადგენს $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ -ის მნიშვნელობებზე აგებულ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრს, ხოლო $\rho(t) = (t-a)^\alpha (t-b)^\beta$ წონითი ფუნქციაა. α და β ღებულობს მნიშვნელობას იმის შესაბამისად, რომელი განტოლების ამონახსნს ვიხილავთ. განტოლებაში $r = s = 1/2$; (29)-ფორმულით მივიღებთ ამოხსნის მიახლოებით $U_n(x, y)$ მნიშვნელობას $D + L$ არეში, ამასთან, საჭიროა განისაზღვროს d მუდმივის მიახლოებითი მნიშვნელობა

$$d_n = \frac{1}{f} \int_L \frac{\xi_n(t)}{t'(s)} d(t).$$

აქ $U_n(x, y)$ არის დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის ამოხსნა. თვითონ დირიხლეს ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა იქნება $U_n(x, y) - d_n$.

(29) ფორმულაში L -წირის მიახლოებითი $z = x + iy$ წერტილებისათვის გამოვიყენოთ წინა თავებში აგებული მიახლოებითი ფორმულა.

$$\frac{1}{f} \int_L \dots(t) \cdot \frac{\xi_n(t) dt}{t-z} \approx 2iL_v(W_v; t_0) + 2i \sum_{\dagger=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\dagger k}(\dots; t_0; z) \cdot \frac{\xi_n(\dagger_{\dagger+k}) - L_{\dagger k}}{\dagger_{\dagger+k} - z},$$

სადაც $P_{\dagger k}(\dots; t_0; z)$ კოეფიციენტები განისაზღვრება წინა პარაგრაფის შესაბამისად. დანარჩენი z წერტილებისათვის გამოვიყენოთ ჩვეულებრივი კვადრატული ფორმულები

$$\frac{1}{f} \int_L \dots(t) \cdot \frac{\mathbb{E}_n(t) dt}{t-z} \approx 2i \sum_{\dagger=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\dagger k} \frac{\mathbb{E}_n(\dagger_{\dagger+k}) - L_{\dagger k}}{\dagger_{\dagger+k} - z},$$

ქვემოთ მოყვანილია დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის ცხრილები, როცა $L \equiv [-1; +1]$ ნამდვილი ღერძის მონაკვეთია, ხოლო $f(t) = f(t(s)) = \text{Re}(t) = t$.

$U(x, y)$ და $U_n(x, y)$ -ით აღნიშნულია შესაბამისი ამოცანის შესაბამისად ზუსტი და მიახლოებითი ამონახსნები. z წერტილი აღებულია კონტურის ბოლოების მცირე მახლობელ მიდამოდან.

$n = 50$

ცხრილი 8

z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
1+0.005	-36.2402	-36.7524	0.5102
-1+0.005	0.005	0.007468	0.002468

$n = 100$

ცხრილი 9

z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
1+0.005	-36.2402	-36.2961	0.0559
-1+0.005	0.005	0.007468	0.000078

$n = 50$

ცხრილი 10

z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
1+0.005 <i>i</i>	0.0000	0.00427	0.00427
-1+0.005 <i>i</i>	2	2.00215	0.00215

$n = 100$

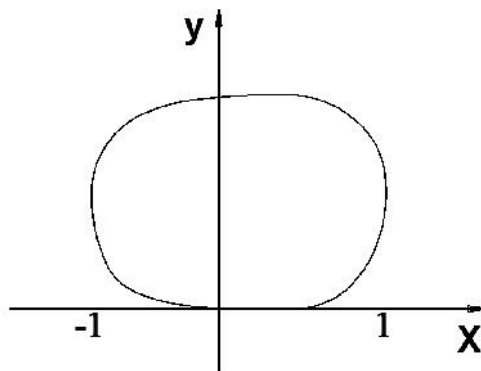
ცხრილი 11

z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
1+0.005 <i>i</i>	0.0000	0.00155	0.00155
-1+0.005 <i>i</i>	2	2.00052	0.00052

მოცემული ცხრილების მისაღებად ჯერ უნდა ამოიხსნას შესაბამისი (26) ინტეგრალური განტოლება, შემდეგ ამ ამონახსნების $\{\xi_n(\#_j)\}_{j=1}^n$ საშუალებით ვაგებთ $\mathbb{E}_n(t)$ საინტერპოლაციო მრავალწევრს და (29) ფორმულით ვპოულობთ $U_n(x, y)$ მიახლოებით ამონახსნს.

მიუხედავად რამდენიმეჯერ ჩატარებული მიახლოებითი პროცესისა, უკვე $n=100$ წერტილისათვის მიიღწევა საკმარისად მაღალი, 10^{-3} რიგის სიზუსტე. ეს უკანასკნელი ადასტურებს, რომ ჩვენს მიერ აგებული მიახლოებითი გამოთვლის ალგორითმი მდგრადია. დამრგვალების ცდომილება არსებით გავლენას ვერ ახდენს კრებადობის პროცესზე.

მესამე თავის § 3.3-ში მოყვანილია დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა შესახებ ისეთი არეებისათვის, რომელთა საზღვრის წირებს არ აქვთ მაღალი რიგის სიმრუდე. განვიხილოთ სასრული არე $L = ab$ საზღვრით, რომელიც შედგება $y = x^3$, $-1 \leq x \leq 0$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$ და გარკვეული (გრაფიკულად მოცემული) გლუვი რკალისაგან, რომელიც გლუვად ეხება აღნიშნულ წირს $T = -1+i$, $t = t+0i$ წერტილებში (და მთლიანად განლაგებულია $y \geq 0$ ნახევარსიბრტყეში (ნახ.-3).



ნახ.-3

ამ შემთხვევაში L -ის მეორე რიგის წარმოებული $t=0$ წერტილში განიცდის წყვეტას. ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში:

უნდა ვიპოვოთ ისეთი (ნამდვილი) $U(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც ჰარმონიულია L -ით შემოსაზღვრულ D^+ არეში, უწყვეტია $D^+ + L$ -ზე და აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$U(x,y)|_L = f(t)$$

სადაც $f(t)$ ჰელდერის კლასის მოცემული ფუნქციაა ($f \in H(L)$).

$$U(x,y) + iV(x,y) = W(z) = \frac{1}{fi} \int_L \frac{\{t\} dt}{t-z} \quad (30)$$

სადაც $\varphi(t)$ სამეზნი ნამდვილი ფუნქციაა H კლასიდან.

გადავიდეთ (30)-ში ზღვარზე, როდესაც $z \rightarrow t_0$ ($t_0 \in L$), პლემელი-სოხოცკის ფორმულით, მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო განტოლებას:

$$\{t_0\} + \operatorname{Re} \frac{1}{fi} \int_L \frac{\{t\} dt}{t-t_0} = f(t_0)$$

ეს განტოლება მიიყვანება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე $\{E_n(\dagger_{\epsilon j})\}$ ($\epsilon = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, 3$) უცნობების მიმართ.

$$\begin{aligned} & \left\{ E_n(\dagger_{\epsilon j}) + \dagger_{\epsilon j} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\dagger_{\epsilon j}} \left\{ 1 + \sum_{\substack{\dagger=0 \\ \dagger \neq \epsilon}}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{2\dagger_{\dagger k} P_{\dagger k}^*}{\dagger_{\epsilon j}^2 - \dagger_{\dagger k}^2} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^2 \frac{2\dagger_{\epsilon k} P_{\dagger k}^*}{\dagger_{\epsilon j}^2 - \dagger_{\epsilon k}^2} + P_{\epsilon k}^* \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^3 \frac{1}{\dagger_{\epsilon j} - \dagger_{\epsilon k}} - \frac{1}{\dagger_{\epsilon k}} \right) \right\} \right] E_n(\dagger_{\epsilon j}) - \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{\dagger=0 \\ \dagger \neq k}}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{2\dagger_{\dagger k} P_{\dagger k}^*}{\dagger_{\epsilon j}^2 - \dagger_{\dagger k}^2} E_n(\dagger_{\dagger k}) - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^2 \frac{2\dagger_{\epsilon k} P_{\dagger k}^*}{\dagger_{\epsilon j}^2 - \dagger_{\epsilon k}^2} E_n(\dagger_{\epsilon k}) + P_{\epsilon j}^* \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^3 d_{\epsilon k}(\dagger_{\epsilon j}) E_n(\dagger_{\epsilon k}) \right\} = g(\dagger_{\epsilon j}) \end{aligned} \quad (31)$$

$(\epsilon = 0, 1, 2, \dots, n-1; j = 0, 1, 2, 3),$

სადაც

$$P_{\dagger k}^* = \begin{cases} P_{\dagger k}^*; & \dagger = \overline{0, n-1}; k = 1, 2, 3 \\ P_{\dagger+1,0} + P_{\dagger 3}; & \dagger = \overline{0, n-1}; k = 1, 2, 3 \\ \dagger = n-1; & P_{n0} + P_{n-1,3} = P_{0,0} + P_{n-1,3} \end{cases}$$

$$E(\dagger_{\epsilon j}) = \dagger_{\epsilon j} \cdot \{ \dagger_{\epsilon j}^2 \}, \quad g(\dagger_{\epsilon j}) = \dagger_{\epsilon j} \cdot f(\dagger_{\epsilon j}^2)$$

მას შემდეგ, რაც შესაბამისი (31) მიახლოებითი სისტემიდან ვიპოვიით $\{E_n(\dagger_{\epsilon j})\}$ ($\epsilon = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, 3$) მნიშვნელობებს და

გავითვალისწინეთ გარდაქმნას $t = \dagger$, ამოცანის მიახლოებით ამონახსნად მივიღოთ

$$U_n(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{fi} \int_L \frac{\xi_n(t) dt}{t-z} = \operatorname{Re} \frac{2}{fi} \int_{L^0} \frac{\mathbb{E}_n(\dagger) d\dagger}{\dagger^2 - z} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{z} \left[\frac{1}{fi} \int_{L^0} \frac{\mathbb{E}_n(t) d\dagger}{\dagger - z} - \frac{1}{fi} \int_{L^0} \frac{\mathbb{E}_n(\dagger) d\dagger}{\dagger^2 - (-z)} \right] \right\} \quad (32)$$

სადაც $\mathbb{E}_n(\dagger)$ წარმოადგენს (31) სისტემის ამონახსნებზე აგებულ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრს. (32) განტოლებაში შემავალი სინგულარული ინტეგრალებისათვის გამოვიყენოთ წინა თავებში განხილული მიახლოებითი გამოთვლის სქემები. მივიღებთ:

$$\frac{1}{fi} \int_{L^0} \frac{\mathbb{E}_n(\dagger) d\dagger}{\dagger - z} \approx 2L_\epsilon(\mathbb{E}_n; \dagger_0) + 2 \sum_{\dagger=0}^{n-1} \sum_{k=0}^1 P_{\dagger k}(\dagger_0, z) \frac{\mathbb{E}_n(t_{\dagger+k}) - L_{\dagger k}(\mathbb{E}_n; \dagger_0)}{t_{\dagger+k} - z}; \quad (33)$$

$$\frac{1}{fi} \int_{L^0} \frac{\mathbb{E}_n(\dagger) d\dagger}{\dagger - (-z)} \approx 2L_\epsilon(\mathbb{E}_n; \dagger_0) + 2 \sum_{\dagger=0}^{n-1} \sum_{k=0}^1 P_{\dagger k}(\dagger_0, -z) \frac{\mathbb{E}_n(t_{\dagger+k}) - L_{\dagger k}(\mathbb{E}_n; \dagger_0)}{t_{\dagger+k} - (-z)}$$

სადაც

$$P_{\dagger k}(\dagger, z) = \frac{t_{\dagger+1} - t_{\dagger}}{2} + \frac{z - \dagger_0}{fi} \int_{l_{\dagger} l_{\dagger+1}} \frac{l_{\dagger k}(\dagger) d\dagger}{\dagger - z} + \frac{(z - \dagger_0)^2}{2fi} \int_{l_{\dagger} l_{\dagger+1}} \frac{l_{\dagger k}(\dagger) d\dagger}{(\dagger - z)^2}$$

მაღალი სიზუსტის მისაღწევად (33) ფორმულებს ვიყენებთ L^0 წირის მახლობელ $z = x + iy$ წერტილებისთვის, დანარჩენ z წერტილებისათვის კი - ჩვეულებრივი კვადრატული ფორმულები:

$$\frac{1}{fi} \int_{L^0} \frac{\mathbb{E}_n(\dagger) d\dagger}{\dagger \pm z} \approx 2 \sum_{\dagger=0}^{n-1} \sum_{k=0}^1 P_{\dagger k} \frac{\mathbb{E}(t_{\dagger+k})}{t_{\dagger+k} \pm z},$$

სადაც

$$P_{\dagger k} = \frac{1}{fi} \int_{l_{\dagger} l_{\dagger+1}} \frac{\mathring{S}_{\dagger}(\dagger) d\dagger}{(\dagger - t_{\dagger k}) \mathring{S}'_{\dagger}(t_{\dagger k})}, \quad \mathring{S}_{\dagger}(\dagger) = \prod_{k=0}^{m-1} (\dagger - t_{\dagger k})$$

$$(\dagger = 0, 1, \dots, n-1; k = 0, 1, \dots, m-1)$$

ქვემოთ მოყვანილია კომპიუტერზე გათვლის შედეგები, როდესაც

$$f = x + y; \quad n = 20; ;$$

$$U_n(0.5; 0.5) \approx 0.987705;$$

$$U_n(0.9; 0.1) \approx 0.95231;$$

$$U_n(0.1; 0.9) \approx 1.0012;$$

ძირითადი დასკვნები

სინგულარული ინტეგრალებისათვის აგებულია და კომპიუტერული პროგრამებით უზრუნველყოფილია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნების ალგორითმები:

1. გახსნილი კონტურებით, ხარისხობრივი ტიპის განსაკუთრებულობების მქონე წონითი ფუნქციებისათვის მიღებულია შეფასებები, რომლებიც კერძოდ ახასიათებს ნაშთითი წევრის ყოფაქცევას ინტეგრების წირის ბოლოების მახლობლობაში.
2. წონითი ფუნქციებით, რომლებიც ინტეგრების წირზე აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას, მაგრამ მათ წარმოებულებს კონტურის (სასრული რაოდენობის) წერტილებში აქვთ პირველი გვარის წყვეტები.
3. წონითი ფუნქციებით, რომლებსაც ინტეგრების წირზე ცალკეულ რკალებზე გააჩნიათ სხვადასხვა ტიპის ხარისხობრივი განსაკუთრებულობები.
4. გახსნილი კონტურებით, ხარისხობრივი ტიპის განსაკუთრებულობების მქონე წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის აგებულია დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის ტიპის მომატებული სიზუსტის რიგის მიახლოებითი სქემები.
5. აგებულია სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოსათვლელი კვადრატურული ფორმულები.
6. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის (რომელზედაც მიიყვანება მექანიკის ბევრი მნიშვნელოვანი გამოყენებითი ტიპის ამოცანები), გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის სხვადასხვა ტიპის რიცხვითი ამოხსნის სქემები.
7. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის აგებული მაღალი რიგის გამოთვლითი სქემების გამოყენებით განხორციელებულია მნიშვნელოვანი გამოყენებითი ტიპის სამშენებლო მექანიკის ამოცანების ამოხსნები:

- ა) დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა გახსნილი სასაზღვრო წირის შემთხვევაში, რომელზედაც თავის მხრივ მიიყვანება ბზარების ამოცანები.
- ბ) დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა, რომელზედაც თავის მხრივ მიიყვანება მრავალი სამშენებლო მექანიკის ამოცანა.
- გ) დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა ისეთი არეებისათვის, რომელთა საზღვრის წირებს არ აქვთ მაღალი რიგის სიმრუდე.

დისერტაციის ძირითადი შინაარსი გამოქვეყნებულია

შემდეგ ნაშრომებში:

1. О численном решении задачи Дирихле в случае неизвестной разомкнутой граничной кривой. Международный научный журнал «Проблемы механики». №4(21), ст. 101-105,. 2005г. В. В. Чанкотадзе, М. Д. Кублашвили, З. Ш. Капанадзе.
2. О численном решении видоизмененной задачи Дирихле в случае разомкнутых контуров. Международный научный журнал «Проблемы механики». №4(21), ст. 83-87,. 2005г. М. Д. Кублашвили, З. Ш. Капанадзе.
3. დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ არეებისათვის, რომელთა საზღვრის წირებს არ აქვთ მაღალი რიგის სიმრუდე. ჟურნალი „ენერგია“, №1(37), 2006. ზ. კაპანაძე, მ. კუბლაშვილი.
4. აეროდინამიკის ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის „ინფორმაციული ტექნოლოგიები მართვაში“ მოხსენებათა კრებული, თბილისი, 2007, გვ. 168-172. მ. კუბლაშვილი, ზ. კაპანაძე, თ. კვაჭაძე, ვ. ჭანკოტაძე.
5. წრიულ დისკზე ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. მშენებლობა №4(27), 2012. მ. დ. კუბლაშვილი, ნ. ფილფანი, ზ. კაპანაძე, მ. მ. კუბლაშვილი.
6. კვადრატურული ფორმულების მომატებული რიგის შესახებ კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის. სტუ-ს სტუდენტთა ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, 2015 წ. ნ. ფილფანი, ზ. კაპანაძე.