

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

თამარ კვაჭაძე

სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა
სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა
მეთოდის გამოყენებით

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
წარდგენილი დისერტაციის

ავტორეფერატი

თბილისი
....2011..... წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
-----სამშენებლო ფაკულტეტზე-----

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: -სრ. პროფ. მურმან კუბლაშვილი-----

რეცენზენტები: ---ფიზ.-მათ. მეცნ. კანდიდატი, უფ. მეცნ. თანამშრომელი-----
მამული ზაქრაძე-----
---სრ. პროფ. გუგა ჭოხონელიძე-----

დაცვა შედგება -----2011----- წლის ”-----” -----, ----- საათზე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის - სამშენებლო-----ფაკულტეტის
სადისერტაციო საბჭოს
კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი ---- I -----, აუდიტორია -----
მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება ტექნიკური უნივერსიტეტის ბიბლიოთეკაში,
ხოლო ავტორეფერატისა – უნივერსიტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი -----მ. კუბლაშვილი-----

ნაშრომის საერთო დახასიათება

თემის აქტუალურობა: სამშენებლო მექანიკის მრავალი პრაქტიკული ტიპის ამოცანის ზუსტი ამოხსნის პოვნა მიიყვანება ისეთი ინტეგრლების დათვლაზე, ან ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნაზე, რომლებიც ძალიან რთულია, ზოგიერთ შემთხვევებში შეუძლებელიც. ასეთ შემთხვევებში პრობლემის გადასაწყვეტად აუცილებელი ხდება რიცხვითი მეთოდების გამოყენება. თავის მხრივ, რიცხვითი ამონახსნების ალგორითმების დამუშავება და მათი კომპიუტერული რეალიზაცია გარკვეულ სირთულეებთან არის დაკავშირებული და მოიცავს რამდენიმე მნიშვნელოვან ეტაპს. პირველ რიგში, ამა თუ იმ ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისათვის უნდა დამუშავდეს შესაბამისი მათემატიკური ალგორითმი. ბუნებრივია, ასეთი ალგორითმების დამუშავების დროს გათვალისწინებული უნდა იქნეს ამოსახსნელი ამოცანის თავისებურებანი: კერძოდ, ალგორითმი სრულად უნდა აღწერდეს ამოცანის ბუნებას და რაც შეიძლება ზუსტად გადმოსცემდეს მის შინაარსს. მეორე მხრივ, ალგორითმი უნდა იყოს რაც შეიძლება მაღალი სიზუსტის და გამოთვლითი პროცესების მიმართ მდგრადი.

სამშენებლო მექანიკის ბევრი გამოყენებითი ტიპის ამოცანა მიიყვანება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე, რომელთა შესახებაც საკმაოდ კარგად დამუშავებული თეორია მოცემულია ნ. მუსხელიშვილის ცნობილ მონოგრაფიაში („Сингулярные интегральные уравнения“-М. Наука, 1968, 511).

გამოკვლევებმა აჩვენა, რომ სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებით, სხვა ცნობილი მეთოდებისაგან განსხვავებით, ბზარების ამოცანებში ზუსტად აღიწერება წარმოშობილი ამოცანების რთული ბუნება. მეორე მხრივ, სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის რიცხვითი ალგორითმების აგების დროს ვაწყდებით პრობლემებს. იმის გამო, რომ სინგულარული ინტეგრალი ჩვეულებრივი აზრით განშლადია და გაიგება გარკვეული სპეციალური აზრით (ე.წ. კომის მთავარი მნიშვნელობით), ამიტომ ასეთი განტოლებების რიცხვითი ალგორითმების აგების დროს წარმოიშობა დამატებითი პრინციპული ხასიათის სიმკვლეები.

როგორც ცნობილია, სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის სამართლიანი არ არის კანტოროვიჩის ზოგადი მიახლოებითი თეორია. ფრედგოლმის განტოლებებისაგან განსხვავებით, სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის, საზოგადოდ, სინგულარული ოპერატორის კარგი აპროქსიმაცია არ იწვევს მიახლოებითი პროცესის დაფუძნების გარანტიას. მეორე მხრივ, ასეთ აპროქსიმაციაზე დაფუძნებული რიცხვითი ამოხსნის სქემები გამოსაყენებლად უფრო

მოსახერხებელია რეგულარიზაციის მეთოდთან შედარებით მრავალი პარამეტრით. პირველ რიგში, ხშირად სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნის დროს წარმოიშობა დამატებითი სიძნელებები, მათ შორის გამოთვლითი ხასიათის, ხოლო ზოგიერთ შემთხვევაში მოცემული სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ინდექსზე დამოკიდებულებით საზოგადოდ ვერ ხერხდება მისი ეკვივალენტური რეგულარიზაცია. ისეთი არეებისათვის, რომლებიც შემოსაზღვრულია (ნებისმიერი) გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირებით, წარმოიშობა გამოთვლითი ტიპის სირთულებები, რომლებიც ძირითადად განპირობებულია შესაბამისი შემომსაზღვრელი კონტურის დამოკიდებულებით ინტეგრალური განტოლების გულზე. ეს უკანასკნელი არსებით გავლენას ახდენს აპროქსიმაციაზე, როცა საწყისი განტოლება იცვლება ამა თუ იმ საშუალებით მიახლოებითი განტოლებით.

სადისერტაციო ნაშრომი ეხება სწორედ ასეთი პრობლემების შესწავლას სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის. კერძოდ, იგი მოიცავს ფუძის და საძირკვლის ერთობლივი დეფორმაციის განსაზღვრის მეთოდებს, ძირითადი ვარიანტების შერჩევას და კომპიუტერულ რეალიზაციას, ბზარების ამოცანებისათვის მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების დამუშავებას და მათ კომპიუტერულ რეალიზაციას.

ნაშრომი პირობითად შეიძლება ორ ძირითად ნაწილად გავყოთ. პირველ ნაწილში განხილულია ნაგებობათა ფუძეების დეფორმაციისათვის (დაჯდომისათვის, რომელიც თავის მხრივ იწვევს ბზარების წარმოშობას), რიცხვითი ამოხსნის თანამედროვე ალგორითმების შექმნა და მათი საშუალებით კომპიუტერული რეალიზაცია, ხოლო მეორე ნაწილში სამშენებლო მექანიკის პრაქტიკული ტიპის ამოცანებისთვის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდის გამოყენებით მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების აგება და მათი კომპიუტერული რეალიზაცია.

საყოველთაოდ ცნობილია, რომ ბზარების ამოცანები ითვლება რთულ ამოცანებად. განსაკუთრებით აქტუალურია ისეთი მეთოდების დამუშავება, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს ადვილად განისაზღვროს ბზარების ბოლოების რაგინდ მცირე მიდამოში ძაბვების მნიშვნელობები, რაც, თავის მხრივ, ბზარის შემდგომი გავრცელების მიმართულების პროგნოზირების გაკეთების საშუალებას მოგვცემს. როგორც გამოკვლევებმა აჩვენა, ასეთი ამოცანებისათვის ძალიან ეფექტიანი აღმოჩნდა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები.

ნაშრომის მიზანია სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ალგორითმების დამუშავება და მათი კომპიუტერული რეალიზაცია.

კვლევის მეთოდები დისერტაციაზე მუშაობის დროს გამოყენებულია სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა, სამშენებლო და რღვევის მექანიკის და მიახლოებითი მეთოდების ზოგადი თეორია.

ნაშრომის მეცნიერული სიახლე მდგომარეობს შემდეგში:

1. შესწავლილია ფუძის და საძირკვლის ერთობლივი დეფორმაციების განსაზღვრის სხვადასხვა მეთოდი;
2. წარმოდგენილია ფუძის დაჯდომის განსაზღვრა შრეობრივი (კომპიუტერული პროგრამული უზრუნველყოფით) შეჯამების, შეზღუდული სისქის დრეკადი ფენის, ეკვივალენტური შრის და მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით;
3. შემთხვევითი ძეზნის მეთოდით დამუშავებულია და შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამით უზრუნველყოფილია ოპტიმალური პარამეტრის მოძებნის ალგორითმი;
4. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით აგებულია და კომპიუტერული პროგრამით უზრუნველყოფილია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები:
 - ა) სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის;
 - ბ) აეროდინამიკის ზოგიერთი სტაციონარული და არასტაციონარული ამოცანებისათვის.

ნაშრომის დასკვნების და ძირითადი სამეცნიერო დებულებების უტყუარობა დადასტურებულია თეორიული და ექსპერიმენტული გამოკვლევების შედეგების კარგი დამთხვევით და ცნობილ მონაცემებთან ტესტური გაანგარიშების მონაცემების შედარებით.

ნაშრომის აპრობაცია სადისერტაციო ნაშრომის შედეგების შესახებ მოხსენებები პერიოდულად მოისმინებოდა სტუ-ის მშენებლობის კომპიუტერული დაპროექტირების სისტემების №90 მიმართულებაზე. წაკითხულია მოხსენება კონფერენციაზე „ქალი და XXI საუკუნე“ 2011წ.

პუბლიკაციები სადისერტაციო სამუშაოს ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია დისერტაციასთან დაკავშირებულ 6 სამეცნიერო ნაშრომში.

ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა. სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, სამი თავის, დასკვნის – თეორიული და პრაქტიკული შედეგების, გამოყენებული

ლიტერატურის 31 დასახელების ნუსხიხგან. ტექსტის საერთო მოცულობა 128 გვერდია.

ნაშრომის შინაარსი

შესავალში მოცემულია ნაშრომის საერთო დახასიათება: დასაბუთებულია პრობლემის აქტუალობა, სამუშაოს მიზანი და კვლევის მეთოდები, მეცნიერული სიახლე, პრაქტიკული ღირებულება და შედეგების რეალიზაცია, მეცნიერული დასკვნების და რეკომენდაციების სარწმუნოობის დასაბუთება, სამუშაოს აპრობაცია, ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა.



სურ.1. შენობის აგურის კედლის დეფორმაცია გაყინული გრუნტის გაღობის დროს.

პირველ თავში განხილულია ფუძის და სამირკვლის ერთობლივი დეფორმაციების განსაზღვრის მეთოდები და ძირითადი ვარიანტების შერჩევა. დამუშავებულია ალგორითმები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ, როდის არის მოსალოდნელი არ მოხდეს ან მოხდეს ფუძის დაჯდომა. იმ შემთხვევაში, როცა ხდება ფუძის დაჯდომები, ნაგებობაში წარმოიშობა ბზარები. თუ არ იქნა მიღებული შესაბამისი ზომები, შეიძლება ბზარების განვითარებამ გამოიწვიოს ნაგებობის დანგრევა. ამიტომ აუცილებელი ხდება ბზარების ამოცანებისათვის ისეთი ალგორითმების შექმნა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს განვსაზღვროთ ძაბვების მნიშვნელობები ბზარის ბოლოების რაგინდ მცირე მიდამოში, ეს უკანასკნელი საშუალებას მოგვცემს გადავანაწილოთ ძაბვები ისეთნაირად, რომ თავიდან ავიცილოთ ნგრევა, ან განვსაზღვროთ ბზარის შემდგომი გავრცელების მიმართულება. ეს საკითხები შესწავლილია ნაშრომის II-III თავში.

პირველი თავის §1.1-ში განხილულია ფუძის დაჯდომის განსაზღვრა შრეობრივი შეჯამების მეთოდით. ამოხსნილია ორი მაგალითი (3 და 4 ფენისათვის). ამ მეთოდის დროს საწყისში საზღვრავენ ბუნებრივ წნევებს (σ_{zg}) და დამატებით წნევებს ფუძეში (σ_{zp}).

საჭიროა განისაზღვროს საძირკვლის დაჯდომის სიდიდე, როცა ფუძე შედგება შემდეგი ფენებისაგან:

პირველი ფენა – წვრილი ქვიშა, როდესაც $h_1 = 3,1$ მ, $\gamma_1 = 16$ კნ/მ³ და $E_1 = 18$ მპა; სადაც h_1 - I შრის სისქე, γ_1 - კუთრი წონა, E_1 - დეფორმაციის მოდული.

მეორე ფენა - თიხნარი, როდესაც $h_2 = 2,4$ მ, $\gamma_2 = 10,3$ კნ/მ³ და $E_2 = 16$ მპა (წყლის ჰიდროსტატიკური წნევის გათვალისწინებით).

მესამე ფენა – თიხა $h_3 = 2,0$ მ, $\gamma_3 = 16$ კნ/მ³ და $E_3 = 17$ მპა; (ჰიდროსტატიკური წნევის გათვალისწინების გარეშე).

საძირკვლის ზომებია: სიგანე $b = 2$ მ და სიგრძე $l = 2,8$ მ, საძირკვლის ჩაღრმავება უდრის $d = 1,5$ მ.

შრობრივი შეჯამების მეთოდით გაანგარიშების ტექნიკა შემდეგია:

1. გრუნტის სისქე საძირკვლის ქვემოთ დაახლოებით (4-5) ხ სისქით დაიყოფა (0,2-0,4) ხ სისქით ელემენტალურ შრეებად:

$$h_i = 0,2b = 0,2 \cdot 2 = 0,4 \text{ მ} \quad (1)$$

სადაც b - საძირკვლის სიგანეა.

2. მარცხნივ, ღერძის მიმართ, გრუნტის საკუთარი წონისაგან (σ_{zg}), რომელიც გადის საძირკვლის სიმძიმის ცენტრში, გამოწვეული წნევის ეპიურები აიგება

ფორმულით:
$$\sigma_{zg} = \gamma' d_n + \sum_1^n \gamma_i h_i, \quad (2)$$

სადაც: γ' - საძირკვლის ძირის მაღლა მდებარე გრუნტის საშუალო კუთრი წონა; d_n - მიწის ბუნებრივი ზედაპირიდან საძირკვლის ჩაღრმავება; n - გრუნტის შრეების რიცხვი z -ის ფარგლებში; γ_i - საძირკვლის ქვემოთ გრუნტის i -ური შრის კუთრი წონა; h_i - გრუნტის i -ური შრის სისქე.

$$\sigma_{zg0} = \gamma' d = 16 \cdot 1,5 = 24 \text{ კპა}$$

$$\sigma_{zg1} = \sigma_{zg0} + \gamma_1 h_1 = 24 + 16 \cdot 0,4 = 37 \text{ კპა}$$

... ..

3. მარჯვნივ, ღერძის მიმართ z სიღრმეზე საძირკვლის ძირიდან დამატებითი (შემამკვრივებელი) წნევის ეპიურა აიგება ფორმულით:

$$p_0 = \alpha(p - \sigma_{zgo}), \quad (3)$$

სადაც: p_0 არის დამატებითი (ვერტიკალური) წნევა ფუძეზე;

p - საშუალო წნევა საძირკვლის ძირზე ნორმატიული დატვირთვისაგან:

$$p = \frac{N}{l \cdot b} = \frac{1624}{2 \cdot 2,8} = 290 \text{ კპა}$$

σ_{zgo} - გრუნტის საკუთარი წონისაგან გამოწვეული ვერტიკალური ძაბვა საძირკვლის ძირზე: $\sigma_{zgo} = \gamma' d_n = 16 \cdot 1,5 = 24 \text{ კპა}$.

α - ძაბვების გაბნევის კოეფიციენტი, რომელიც დამოკიდებულია საძირკვლის ძირის ფორმაზე, გვერდების ფარდობაზე ($\eta = l/b$) და ფარდობით სიღრმეზე $\xi = \frac{2z_i}{b}$:

$$\sigma_{zp0} = 1,000(290 - 24) = 266 \text{ კპა}$$

$$\sigma_{zp1} = 0,972(290 - 24) = 259 \text{ კპა}$$

... ..

ე.ი. საძირკვლის ძირზე ბუნებრივი და დამატებითი წნევები იქნება:

$$\sigma_{zgo} = \gamma' d = 16 \cdot 1,5 = 24 \text{ კპა}$$

$$\sigma_{zp} = \alpha(p - \sigma_{zgo}) = 1,000(290 - 24) = 266 \text{ კპა}.$$

4. გამომდინარე (4) პირობიდან განისაზღვრება ფუძის აქტიური ზონის ქვედა ზღვარი სიღრმეზე, როცა $z=H$:

$$\sigma_{zp} = 0,2\sigma_{zg} \quad (4)$$

$$28 \text{ კპა} \approx 0,2\sigma_{zg} = 0,2 \cdot 137 = 27,8 \text{ კპა}$$

5. განისაზღვრება ფუძის სრული დაჯდომის სიდიდე: $S = 0,8 \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{zpi} \cdot h_i}{E_i}$, (5)

სადაც: 0,8 - უგანზომილებო კოეფიციენტი, რომელიც დამოკიდებულია პუასონის კოეფიციენტზე, ანუ გრუნტის განივ დეფორმაციაზე; n - შრეების რიცხვი, აქტიური ზონის ფარგლებში; σ_{zpi} - საშუალო დამატებითი წნევა, გრუნტის i -ურ შრეში;

h_i - გრუნტის i -ური შრის სისქე (0,2-0,4)მ; E_i - იმავე i -ური შრის დეფორმაციის მოდული.

ცალკეული ფენების მიხედვით დაჯდომები ტოლია:

$$S_1 = \frac{0,8 \cdot 0,8}{18000} \left[\frac{266}{2} + 226 + \frac{142}{2} \right] = 0,015 \text{ მ} \quad S_2 = \frac{0,8 \cdot 0,8}{16000} \left[\frac{266}{2} + 86 + 56 + \frac{39}{2} \right] = 0,0085 \text{ მ}$$

$$S_3 = \frac{0,8 \cdot 0,8}{17000} \left[\frac{39 + 28}{2} \right] = 0,0012 \text{ მ}$$

საერთო დაჯდომა ტოლია:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 0,015 + 0,0085 + 0,0012 = 0,024 \text{ მ} = 2,4 \text{ სმ}$$

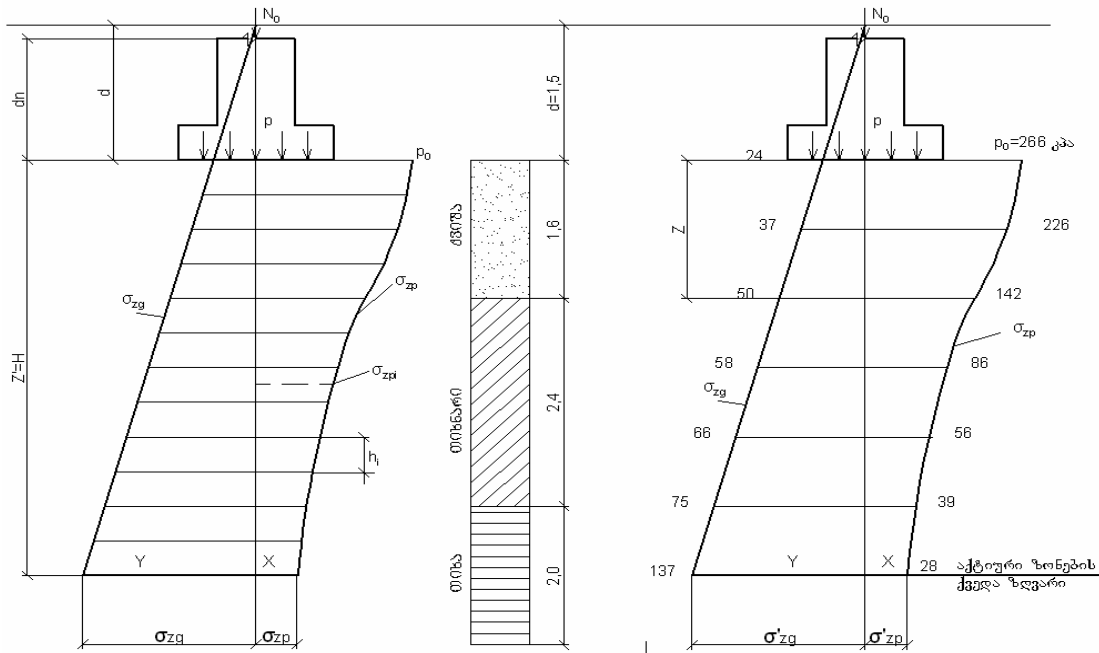
6. დაჯდომის სიდიდეს ვამოწმებთ პირობით:

$$S \leq S_u \quad S = 2,4 \text{ სმ} < S_u = 8 \text{ სმ}$$

სადაც: S - საძირკვლის დაჯდომის სიდიდე, სმ;

S_u - ზღვრული დაჯდომის სიდიდე, სმ (აიღება ნორმებიდან)

ე.ი. პირობა დაკმაყოფილებულია.



სურ. 2. ფუძის დაჯდომის განსაზღვრა შრეობრივი შეჯამების მეთოდით

აღნიშნული მეთოდის გამოყენების სფერო ფართობი:

1. შრეობრივი შეჯამების მეთოდი რეკომენდებულია CHuII 2.02.01-ის მიხედვით საძირკვლის დაჯდომის გაანგარიშებისათვის სამრეწველო და სამოქალაქო შენობათა ნაგებობებისათვის, როდესაც მისი სიგანე ნაკლებია 10მ-ზე;
2. როდესაც გრუნტის გვერდითი გაგანიერება შეუძლებელია;
3. როდესაც გვაქვს სუსტი გრუნტები და მათი ფიზიკური მდგომარეობა სხვადასხვაა (c_i, ϕ_i, E_i);
4. როდესაც აქტიური ზონის სისქე გამოდის საკმაოდ დიდი;
5. განსაკუთრებით, როდესაც გვაქვს მაღლივი შენობები (30 სართული და მეტი). ამ შემთხვევაში ზრდიან საძირკვლის ჩადრმავებას, რითაც აღწევენ ბუნებრივი წნევის გადიდებას (γh) და მის მიახლოებას საშუალო წნევასთან (p). ამით აღწევენ დაჯდომის შემცირებას. თუ γd მნიშვნელობა გაუტოლდება საშუალო წნევას (p), მაშინ დაჯდომა გამოირიცხება;
6. ეს მეთოდი იძლევა ფუძე-გრუნტის თვალნათლივ დათვალეირების და მუშაობის შეფასების შესაძლებლობას;
7. დაჯდომა წარმოებს მხოლოდ დამატებითი ვერტიკალური წნევით (σ_{zp}).

აღნიშნული მეთოდის დადებითი მხარეა ის, რომ:

1. ითვალისწინებს წნევის (p) შემცირებას გრუნტის სიღრმეზე;

2. ითვალისწინებს დეფორმაციის მოდულის ცვლილებას სიღრმეზე;
3. ითვალისწინებს მიწისქვეშა წყლის გავლენას;
4. დეფორმაციის განაწილება ხდება მხოლოდ აქტიური ზონის სიღრმეში;
5. ძაბვა განისაზღვრება მხოლოდ საძირკვლის ძირის ცენტრის ქვეშ;

აღნიშნული მეთოდის უარყოფითი მხარეა:

1. დაჯდომის სიდიდე ზოგჯერ 1,2-1,5-ჯერ აღემატება მის ფაქტობრივ მნიშვნელობას. ეს მიგვანიშნებს იმაზე, რომ გრუნტის საანგარიშო მახასიათებლები c, φ, E უნდა განისაზღვროს ბუნებრივ (საველე) პირობებში და არა ლაბორატორიულ პირობებში. ეს დაკავშირებულია დიდ ღირებულებასთან;
2. ჯდომა განპირობებულია მხოლოდ ვერტიკალური ძაბვით (σ_{zp}), ხოლო σ_y და σ_x ძაბვები მხედველობაში არ მიიღება;
3. სამშენებლო ნორმებისა და წესების თანახმად ფუძის დაჯდომა განისაზღვრება მხოლოდ ერთდერძა კუმშვაზე, როდესაც σ_x და σ_y გავლენა გრუნტის კუმშვაზე გამორიცხულია. ეს არ არის სწორი და კვლევა ამ მიმართულებით უნდა გაგრძელდეს.

მიუხედავად ამისა, ეს მეთოდი ითვლება ძირითად მეთოდად, რადგან იგი იძლევა გრუნტის თვალნათლივ დათვალიერების და მუშაობის შეფასების შესაძლებლობას. იგი ითვალისწინებს სიღრმეზე p-ს შემცირებას, E-ს ცვლილებას, მიწისქვეშა წყლების გავლენას და გრუნტის ფენების სხვადასხვაობას.

§1.2-ში განხილულია ფუძის დაჯდომა შეზღუდული სისქის დრეკადი შრის მეთოდით. წინა პარაგრაფის მსგავსად, აღნიშნული მეთოდით გაანგარიშებულია ორი მაგალითი. იგი გამოიყენება ისეთ შემთხვევაში, როდესაც დრეკადი ფუძე შეზღუდულია კლდოვანი გრუნტებით.

ისეთ პირობებში, როდესაც საძირკველი მდებარეობს შეზღუდული სისქის ერთგვაროვან დრეკად ფენაზე, რომელიც შეზღუდულია სიღრმეში კლდოვანი ქანებით ($E > 100 \text{ მპა}$), საძირკვლის დაჯდომა იანგარიშება შემდეგი ფორმულით:

$$S = \frac{pbk_c}{k_m} \sum_{i=1}^n \frac{k_i - k_{i-1}}{E_i} \quad (6)$$

სადაც: p - საშუალო წნევა საძირკვლის ძირზე; b - საძირკვლის სიგანე ან წრიული საძირკვლის დიამეტრი; k_c - კოეფიციენტი, რომელიც დამოკიდებულია $\zeta = \frac{2H}{b}$ ფარდობაზე; k_m - კოეფიციენტი, დამოკიდებული დეფორმაციის მოდულის სიდიდეზე (E); n - შრეების რიცხვი აქტიური ზონის ფარგლებში; k_i და k_{i-1} -

კოეფიციენტები, დამოკიდებულია საძირკვლის ფორმაზე, საძირკვლის გვერდების ფარდობაზე $\eta = l/b$ და ფარდობით სიღრმეზე $\xi_{i-1} = \frac{2z_{i-1}}{b}$; E_i - გრუნტის i -ური შრის დეფორმაციის მოდული; z - მანძილი საძირკვლის ძირიდან განსახილველი შრის ზედაპირამდე.

უნდა განისაზღვროს საძირკვლის დაჯდომის სიდიდე წინა მაგალითის მიხედვით სიღრმით $3b = 3 \cdot 2 = 6$ მ. აქტიური ზონის სისქე (სიმძლავრე) გამოიანგარიშება სურ.3-დან იმ ფენის ზედაპირამდე, რომლისთვისაც $E \geq 100$ მპა. ჩვენს შემთხვევაში დრეკადი შრის სისქე უდრის $H = 1,6 + 2,4 + 2 = 6$ მ.

განგარიშების ტექნიკა შემდეგია:

$k_c = ?$ ცხრ-დან [3, დამ.2, ცხრ.2], როცა $\xi' = \frac{2H}{b} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6,0$, $k_c = 1,0$;

$k_m = ?$ ცხრ-დან [3, დამ.2, ცხრ.3], როცა $E > 100$ მპა (100) და $b < 10$ მ, $k_m = 1,0$

k_i და $k_{i-1} - ?$ ცხრილიდან [3, დამ.2, ცხრ.4], როცა $\eta = a/b = 2,8/2 = 1,4$:

პირველი ფენისათვის, როცა $\xi_1 = 2z_1/b = 2 \cdot 1,6/2 = 1,6$ და $k_1 = 0,394$ და

$\xi_{i-1} = 2z_{i-1}/b = 2 \cdot 0/2 = 0$, $k_2 = 0$;

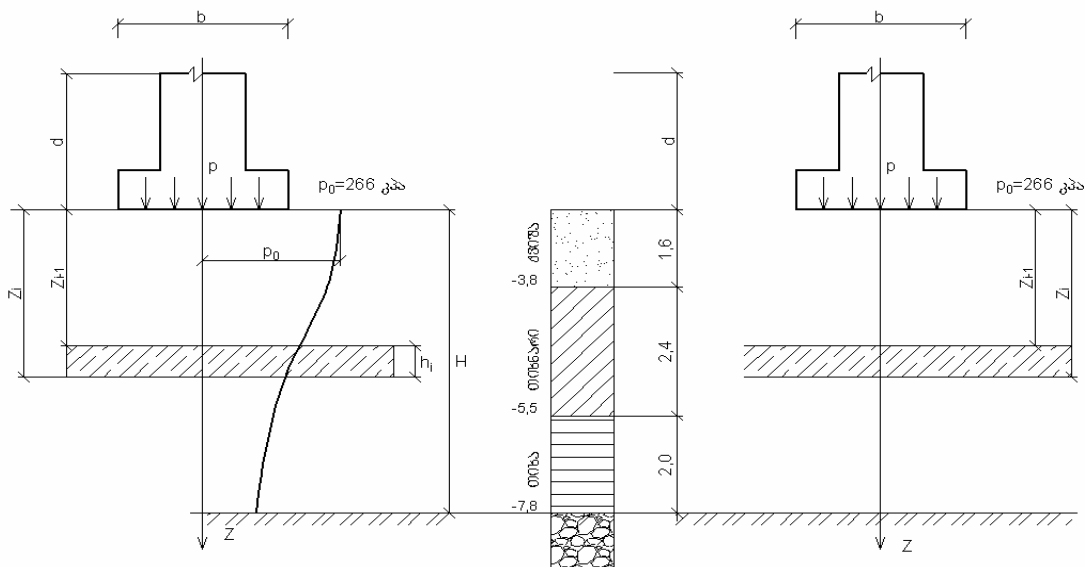
მეორე ფენისათვის, როცა $\xi_2 = 2z_2/b = 2 \cdot 4/2 = 4,0$ და $k_2 = 0,708$ და $\xi_{2-1} = 0,394$;

მესამე ფენისათვის, როცა $\xi_3 = 2z_3/b = 2 \cdot 6/2 = 6$ და $k_3 = 0,814$ და $\xi_{3-2} = 0,708$;

მაგალითის მიხედვით დამატებითი წნევა უდრის: $p_0 = 266$ კპა

საძირკვლის დაჯდომის სიდიდე იქნება: $S = \frac{pbk_c}{k_m} \sum_{i=1}^n \frac{k_i - k_{i-1}}{E_i} = 0,026 \text{ მ} = 2,6 \text{ სმ}$.

დაჯდომის სიდიდე, რომელიც მიიღება მოცემული მეთოდით რამდენადმე მეტია წინა მეთოდით განგარიშებულზე.



სურ. 3. ფუძის დაჯდომის განსაზღვრა შეზღუდული სისქის დრეკადიშრის მეთოდით

გამოყენების სფერო:

1. როდესაც ფუძის გავრცელების სიღრმე შეზღუდულია კლდოვანი გრუნტებით;
2. როდესაც აპროექტებენ სამოქალაქო და სამრეწველო ნაგებობების საძირკვლებს, როდესაც საძირკვლის ზომები 10მ-ს არ აღემატება.

დადებითი მხარეები:

1. მისი გამოყენება შეიძლება სამრეწველო და სამოქალაქო შენობებში, როცა საძირკვლის სიგანე არ აღემატება 10მ-ს;
2. გამოყენება შეიძლება სატრანსპორტო ნაგებობების საძირკვლებშიც, როდესაც $b > 10$ მ.
3. ამ მეთოდით არ ხდება ფუძის დაყოფა ელემენტარულ შრეებად;
4. არ საჭიროებს ბუნებრივი და დამატებითი წნევების ეპიურების აგებას, რის გამოც გამოთვლების მოცულობის დიდი ნაწილი მცირდება;

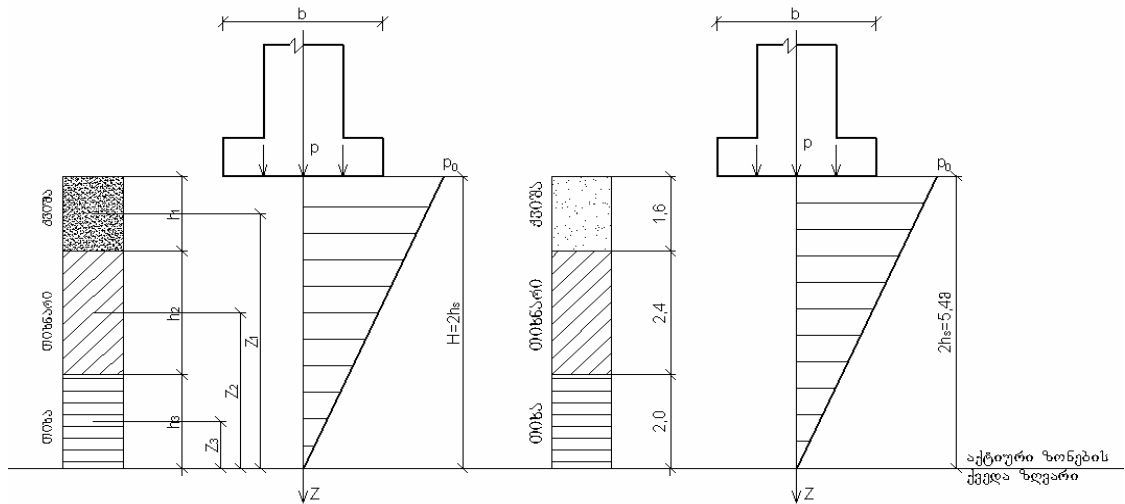
უარყოფითი მხარეები:

1. არ ითვალისწინებს p-ს ცვლილებას სიღრმეზე;
2. არ ითვალისწინებს მიწისქვეშა წყლის გავლენას;
3. გრუნტი წარმოდგენილია როგორც ხაზოვან-დეფორმადი სხეული, რაც მხოლოდ დაშვებას წარმოადგენს;
4. არ ითვალისწინებს დამატებით ძაბვების თანდათანობით შემცირებას ფუძის სიღრმეში, რაც მეტად მნიშვნელოვანია ანგარიშის სიზუსტის თვალსაზრისით;
5. არ გამოიყენება სუსტ გრუნტებში და როცა აქტიური ზონის სიღრმე გამოდის დიდი.

დასკვნა: ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარე, ეს მეთოდი არის მიახლოებითი მეთოდი, ანუ ინჟინრული მეთოდი.

§1.3-ში განხილულია ფუძის დაჯდომის ანგარიში გრუნტის ეკვივალენტური შრის მეთოდით. ამოხსნილია ორი მაგალითი.

ეს მეთოდი გულისხმობს, რომ საძირკველი მდებარეობს დრეკად ფუძეზე, როდესაც აქტიური ზონის გავრცელების სიღრმე შეზღუდულია ეკვივალენტური შრის სისქით. მისი გამოყენება შეიძლება ძირითადად როგორც ერთგვაროვან, ისე არაერთგვაროვან გრუნტებში.



სურ. 4. ფუძის დაჯდომის განსაზღვრა ეკვივალენტური შრის მეთოდით
 ფუძის დაჯდომის სიდიდე ერთგვაროვან გრუნტებში გამოითვლება პროფ.

ნ. ციტოვიჩის მეთოდით, შემდეგი ფორმულით: $S = h_s a_0 p_0$, (7)

სადაც: h_s - ეკვივალენტური შრის სისქე; a_0 - გრუნტის ფარდობითი კუმშვადობის კოეფიციენტი $a_i = \beta / E$; p_0 - დამატებითი ვერტიკალური წნევა საძირკვლის ძირზე.

ეკვივალენტური შრის სისქე განისაზღვრება ფორმულით:

$$h_s = H = A \omega b, \quad (8)$$

სადაც A - ეკვივალენტური შრის კოეფიციენტი, რომელიც დამოკიდებულია პუასონის კოეფიციენტზე ν , საძირკვლის ძირის ფორმაზე და საძირკვლის სიხისტეზე; ω - კოეფიციენტი, დამოკიდებული საძირკვლის ფორმაზე და საძირკვლის სიხისტეზე.

საჭიროა განისაზღვროს საძირკვლის დაჯდომის სიდიდე ზემოთ განხილული მაგალითის მიხედვით, როცა $b=2\text{მ}$ და $l=2,8\text{მ}$, მისი ჩაღრმავება $d=1,5\text{მ}$. დატვირთვა საძირკვლის ზედაპირის სიბრტყეში 1624კნ. ფუძე-გრუნტები მიღებულია პირველ მაგალითში. მივიღოთ ერთგვაროვანი გრუნტი-თიხნარი.

ანგარიში მიმდინარეობს შემდეგი თანმიმდევრობით:

1. საზღვრავენ ბუნებრივ წნევას და დამატებით წნევას საძირკვლის ძირზე:

$$\sigma_{z0} = \gamma' d = 16 \cdot 1,5 = 24 \text{ კპა}$$

$$\sigma_{zp0} = \alpha (p - \sigma_{z0}) = 1,000 (290 - 24) = 266 \text{ კპა}$$

2. საზღვრავენ გრუნტის ეკვივალენტური შრის სიმძლავრეს (h_s), როდესაც $\nu = 0,30$ და $a / b = 2,8 / 2,0 = 1,4$, მაშინ ნორმებში მოცემული ცხრილიდან $A \omega = 1,32$.

ეკვივალენტური შრის სიხრქე: $h_s = A \omega b = 1,32 \cdot 2 = 2,7\text{მ}$

3. საზღვრავენ ფარდობითი კუმშვადობის კოეფიციენტს: $a_0 = \frac{\beta}{E} = \frac{0,57}{16000} = 0,0036\text{კპა}^{-1}$

4. საზღვრავენ საძირკვლის დაჯდომის სიდიდეს: $S = h_s a_0 p_0 = 2,7 \cdot 0,0036 \cdot 266 = 2,9$ სმ.

გაანგარიშება გვიჩვენებს, რომ ეკვივალენტური შრით მიღებული შედეგი მნიშვნელოვნად აღემატება შრეობრივი შეჯამების მეთოდით მიღებულზე. არაერთგვაროვანი ფუძის შემთხვევაში სხვაობა კიდევ უფრო მეტია, ამიტომ მას არ ვიხილავთ.

გამოყენების არე:

1. მისი გამოყენება განსაკუთრებით მიზანშეწონილია, როცა ნაგებობის ფუძე წარმოდგენილი იქნება ერთგვაროვანი გრუნტებისაგან.

დადებითი მხარე:

1. ეს მეთოდი დაჯდომის განსაზღვრის საშუალებას იძლევა გვერდითი გაგანიერების პირობებში.
2. ეს მეთოდი მხედველობაში იღებს დაჯდომის გაანგარიშებაში გრუნტის სხვადასხვაობას, თუ გრუნტების მახასიათებლები მკვეთრად არ არის განსხვავებული;
3. არ საჭიროებს საანგარიშო ნაწილის მნიშვნელოვანი გამოთვლების ჩატარებას.

უარყოფითი მხარე:

1. მისი გამოყენება არაერთგვაროვანი გრუნტის შემთხვევაში იძლევა საძირკვლის დაჯდომის გადიდებულ მნიშვნელობას, განსაკუთრებით თუ გრუნტის მახასიათებლები მკვეთრად არიან განსხვავებული;
2. არ ითვალისწინებს ძაბვების ცვლილებას სიღრმეში;
3. არ ითვალისწინებს მიწისქვეშა წყლების გავლენას;
4. არ ითვალისწინებს მეზობელი ნაგებობების დატვირთვების გავლენას.

§1.4 წარმოდგენილია ფუძის დაჯდომა მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით. ეს მეთოდი წარმოადგენს სიახლეს გრუნტების მექანიკაში. ამ მეთოდით ამოხსნილია ორი მაგალითი.

დაკვირვებები საძირკვლის დაჯდომის მიმდინარეობაზე გვიჩვენებს, რომ გავლენის რადიუსის (გეგმაში) საზღვრებში, იგი უტოლდება მიახლოებით აქტიური ზონის სისქეს, დადგენილს ფუძეზე გადაცემული ყველა დატვირთვის გათვალისწინებით. სწორედ ეს მიგვითითებს იმის აუცილებლობაზე, რომ ანგარიში შეიძლება ვაწარმოოთ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით.

დასაწყისში ვპოულობთ აქტიური ზონის სისქეს. ამისათვის ვადიდებთ სიღრმეს საძირკვლის ძირიდან 20-30%-ით ($z = 0,4$ მ) და ვიხილავთ გავლენის რადიუსის და აქტიური ზონის პირველ მიახლოებას, სადაც განისაზღვრება დამატებითი წნევა (σ_{zp})

და შემოწმდება დაჯდომის პირობა. თუ პირობა არ შესრულდა, კიდევ ვზრდით სიღრმეს 20-30%-ით და ვაკეთებთ გავლენის რადიუსის და აქტიური ზონის მეორე მიახლოებას. საჭირო შემთხვევაში კიდევ გავზრდით სიღრმეს და ვაგრძელებთ ანგარიშს მანამდე, სანამ მიახლოებით მაინც არ მიიღება გავლენის რადიუსის და აქტიური ზონის სიღრმის ტოლობა. შევნიშნავთ, რომ გავლენის რადიუსის მიახლოება აქტიური ზონის სიღრმესთან შეიძლება b სიდიდის ცვლილებითაც ($1b, 2b, \dots$), ან კიდევ განვიხილავთ მიახლოებას ჯერ პირველი ფენის სიღრმეზე, შემდეგ მეორე ფენის სიღრმეზე და ა.შ.

საძირკვლის დაჯდომის სიდიდის განსაზღვრას ვაკეთებთ იმ მონაცემების მიხედვით, რომელიც მოცემულია წინა მაგალითში.

ბუნებრივი და დამატებითი ძაბვები საძირკვლის ძირზე ტოლია:

$$\sigma_{z_0} = \gamma' d = 16 \cdot 1,5 = 24 \text{ კპა,}$$

$$p_0 = \alpha(p - \sigma_{z_0}) = 1,000(290 - 24) = 266 \text{ კპა.}$$

შემდეგ ყოველ მიახლოებაზე ვსაზღვრავთ ბუნებრივ (σ_{zg}) და დამატებით (σ_{zp}) ძაბვებს სიღრმეში (2) და (3) ფორმულებით და ვამოწმებთ დაჯდომის პირობას $\sigma_{zp} = 0,2\sigma_{zg}$. მიახლოებას ვახდენთ ჯერ პირველი ფენის სიღრმეზე, შემდეგ მეორე ფენის სიღრმეზე და ა.შ.

ანგარიშის შედეგები შეიტანება ცხრილ 1-ში. α - ს მნიშვნელობები აიღება ნორმებიდან, როცა $\eta = a/b = 1,4$ და $\xi = 2z/b$:

ცხრილის მიხედვით მოინახება გავლენის რადიუსის და აქტიური ზონის ქვედა ზღვარი სიღრმეზე $z' = 4,8$ მ სადაც $\sigma'_{zp} = 28$ კპა $\approx 0,2\sigma'_{zg} = 27,8$ კპა. საძირკვლის დაჯდომის სიდიდე განისაზღვრება (5) ფორმულით და ტოლია:

$$S_1 = \frac{0,8 \cdot 1,6}{18000} \left[\frac{266 + 142}{2} \right] = 0,016 \text{ მ} = 1,6 \text{ სმ} \quad S_2 = \frac{0,8 \cdot 2,4}{16000} \left[\frac{142 + 39}{2} \right] = 0,010 \text{ მ} = 1 \text{ სმ}$$

$$S_3 = \frac{0,8 \cdot 0,8}{18000} \left[\frac{39 + 28}{2} \right] = 0,001 \text{ მ} = 0,1 \text{ სმ}$$

სრული დაჯდომა იქნება: $S = S_1 + S_2 + S_3 = 0,016 + 0,010 + 0,001 = 0,027 \text{ მ} = 2,7 \text{ სმ}$,

რაც 0,3სმ-ით მეტია შრეობრივი შეჯამებით მიღებულთან.

შემოწმდება დაჯდომის პირობა ფორმულით:

$S \leq S_u \quad S = 2,7 \text{ სმ} < 8 \text{ სმ.} \quad \text{ე.ი დაჯდომის პირობა დაკმაყოფილებულია.}$

ფენები	z,მ	$\xi = 2z / b$	α	σ_{zp} , კპა	σ_{zg} , კპა
პირველი- ქვიშა	0	0	1.000	266	24
	1.6	1.6	0.532	142	50
მეორე- თიხნარი	4.0	4.0	0.145	39	75
მესამე- თიხა	4.8	4.8	0.105	28	137

აღნიშნული მეთოდის გამოყენების სფერო ფართობა:

1. როდესაც გრუნტის გვერდით გაგანიერებას არა აქვს ადგილი;
2. როდესაც გვაქვს სუსტი გრუნტები და მათი ფიზიკური მდგომარეობა სხვადასხვაა;
3. როდესაც აქტიური ზონის სისქე საკმაოდ დიდი გამოდის;
4. განსაკუთრებით, როდესაც გვაქვს მაღლივი შენობები (30 სართული და მეტი).
5. როდესაც საჭიროა მეზობელი ნაგებობების გავლენის გათვალისწინება და სხვა.

აღნიშნული მეთოდის გამოყენების დადებითი მხარეებია:

1. ითვალისწინებს p წნევის შემცირებას ფუძის სიღრმეში;
2. ითვალისწინებს დეფორმაციის მოდულის ცვლილებას სიღრმეზე;
3. ითვალისწინებს მიწისქვეშა წყლების გავლენას;
4. ჯდომა განპირობებულია მხოლოდ σ_{zp} -მაბვით;
5. დეფორმაცია ნაწილდება მხოლოდ აქტიური ზონის ფარგლებში;
6. მბვები განისაზღვრება მხოლოდ საძირკვლის ცენტრის ქვეშ;
7. $\beta = 0,8$ - უგანზომილებო კოეფიციენტი, რომელიც მიიღება სამშენებლო ნორმებით.

აღნიშნული მეთოდის გამოყენების უარყოფითი მხარეებია:

1. დაჯდომის სიდიდე აღემატება მის ფაქტობრივ მნიშვნელობას. ეს მიგვითითებს იმაზე, რომ გრუნტის საანგარიშო მახასიათებლები (φ და c) უნდა განისაზღვროს საველე პირობებში და არა ლაბორატორიულ პირობებში, რაც დაკავშირებულია დიდ ხარჯებთან;
2. გრუნტი განიხილება, როგორც ერთგვაროვანი ხაზოვან-დეფორმადი სხეული, მხოლოდ ძალიან მცირე დიაპაზონში;
3. სამშენებლო ნორმების მიხედვით ფუძის დაჯდომა განისაზღვრება მხოლოდ ერთღერძა კუმშვაზე, σ_x , σ_y - ის გავლენა გამორიცხულია, რაც არ არის სწორი და ამ მიმართულებით უნდა გაგრძელდეს მუშაობა.

ჩვენი აზრით, მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი გამოყენებული უნდა იქნეს:

- ძალიან სუსტ გრუნტებში, სადაც ფუძის გავრცელების სიღრმე დიდი გამოდის;
- როდესაც გვაქვს მეზობელი ნაგებობების გავლენა, რომელთა გავლენის გათვალისწინება აუცილებელია არსებულ ნაგებობაზე, შეიძლება ეს მეთოდი მივიღოთ ინჟინრულ მეთოდად;
- როდესაც ვაგებთ მაღლივ შენობებს.

საერთო დასკვნა

ჩვენ მიერ მიღებული გაანგარიშებებით და ტექნიკურ ლიტერატურაში მოყვანილი შედეგების მიხედვით შეზღუდული სისქის დრეკადი ფუძის, ეკვივალენტური შრის და მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით გასაანგარიშებელი საძირკვლის დაჯდომის სიდიდე აღემატება შრეობრივი შეჯამების მეთოდით მიღებულს, ამიტომ ზემოთ აღნიშნული ფუძის დაჯდომის გასაანგარიშებელი მეთოდები შეიძლება მივიღოთ როგორც მიახლოებითი მეთოდი ანუ ინჟინრული მეთოდი.

აქედან გამომდინარე, ფუძის დეფორმაციის გასაანგარიშებლად შრეობრივი შეჯამების მეთოდი მიიღება ერთ-ერთ ძირითად (ტრადიციულ) მეთოდად, ანუ ოპტიმალურ მეთოდად და ამჟამად ფართოდ იყენებენ საპროექტო ორგანიზაციებში. მისი უპირატესობა მდგომარეობს იმაში, რომ ეს მეთოდი იძლევა გრუნტების თვალნათლივ დათვალიერების და მისი მუშაობის შესწავლის შესაძლებლობას. ეს მეთოდი ითვალისწინებს გრუნტების სახეობას და მათ მდგომარეობას, ძაბვების (p) შემცირებას ფუძის სიღრმეში და გრუნტების ფენების დეფორმაციის მოდულის (E) ცვლილებას, ასევე იძლევა მიწისქვეშა წყლების გავლენის მხედველობაში მიღების საშუალებას.

განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს მისი გამოყენების შესაძლებლობა მაღლივი შენობების დაპროექტების დროს მისი ჩაღრმავების გადიდების გზით, ასევე როცა აუცილებელია მეზობელი ნაგებობების დატვირთვების გავლენის გათვალისწინება. შრეობრივი შეჯამების მეთოდს ფართოდ იყენებენ საპროექტო ორგანიზაციებში. ამიტომ, §1.5-ში წარმოვადგინეთ შრეობრივი შეჯამების მეთოდის კომპიუტერული რეალიზაცია და ოპტიმალური პარამეტრების განსაზღვრა. ამ პარაგრაფში წარმოდგენილია ალგორითმი. ოპტიმალური პარამეტრი განსაზღვრულია შემთხვევითი ძებნის მეთოდით. პროგრამა დაწერილია **Basic**- ში. ეს პროგრამა მომხმარებელს მისცემს საშუალებას საწყისი მონაცემების (სიგრძე, სიგანე, ჩაღრმავება) საშუალებით მიიღოს ფუძის დაჯდომის ოპტიმალური მნიშვნელობა.



ნაშრომის II თავში წარმოდგენილია სამშენებლო მექანიკის მეტად აქტუალური საკითხი, ბზარების ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით. ცნობილია, რომ როცა ბზარს აქვს გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირის ფორმა, იგი მიიყვანება დირიხლეს ამოცანაზე.

§2.1-ში წარმოდგენილია დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა გახსნილი სასაზღვრო წირის შემთხვევაში. აღვნიშნოთ D - თი სიბრტყე, რომელიც გაჭრილია გლუვი ლიაპუნოვის $L=ab$ წირის გასწვრივ (ბოლოებით a და b), ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: უნდა ვიპოვოთ D -არეში ისეთი უსასრულობაში ქრობადი ϕ პოლომორფული ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან წირის გასწვრივ, გარდა a და b ბოლოებისა. სადაც ის

აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:
$$|\phi(z)| \leq \frac{const}{|z-c|^\alpha}; \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (9)$$

c ემთხვევა a ან b , შემდეგი ზღვრული პირობით
$$Re \phi^+(t_0) = Re \phi^-(t_0) = f(t_0), \quad (10)$$

სადაც $f(t_0)$ L -ზე მოცემული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა.

დავუშვათ
$$U(x, y) + iV(x, y) = \phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\phi(t) dt}{t-z}, \quad (z) \in D.$$

$$\text{ვებებოთ ამონახსნი შემდეგი სახით: } U(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z}, \quad (z \in D), \quad (11)$$

სადაც $\varphi(t)$ – საძიებელი ნამდვილი ფუნქცია.

(11) ტოლობა ჩავსვათ (10) სასაზღვრო ტოლობაში. მაშინ $\varphi(t)$ -ს მოძებნის ამოცანა დაიყვანება შემდეგი სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} = f(t_0). \quad (12)$$

როგორც მუსხელიშვილის თეორიიდანაა ცნობილი, (12) განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს სამი ტიპის ამონახსნი:

- 1) ერთ ბოლოზე შემოსაზღვრული და მეორეზე შემოუსაზღვრელი;
- 2) ორივე ბოლოზე შემოუსაზღვრელი;
- 3) ორივე ბოლოზე შემოსაზღვრული.

სიმარტივისათვის ვებებოთ $\varphi(t)$ ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია მრუდის a ბოლოზე და არ არის შემოსაზღვრული b ბოლოზე: $\varphi(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi_0(t)$

$$\text{მაშინ (12) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს: } \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi_0(t) = f(t_0) \quad (13)$$

ახლა ვიგულისხმობთ, რომ L -წირი მოცემულია მხოლოდ გრაფიკულად. სპეციალური პაკეტი - პროგრამა „**Spline toolbars**“-ის საშუალებით დისპლეის ეკრანზე შეგვყავს ამ წირის გრაფიკის შესაბამისი რამდენიმე წერტილის კოორდინატები. ეკრანზე წირის სხვა პარამეტრებთან ერთად დაიწერება წირის სიგრძის შესაბამისი S - პარამეტრი, რომლის შემდეგაც საშუალება გვქვია დავწეროთ მრუდის განტოლება $t = t(s)$, სადაც S არის წირის სიგრძის შესაბამისი ბუნებრივი პარამეტრი. ჩავთვალოთ, რომ n - ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, გავყოთ $[a, b]$ შუალედი n - ტოლ

ნაწილად წერტილებით: $S_\sigma = a + \frac{b-a}{n}(\sigma-1), \quad \sigma=1, 2, \dots, n+1$

შემდეგ მოცემული ფიქსირებული m ნატურალური რიცხვისთვის ყოველი $[S_\sigma, S_{\sigma+1}]$

სეგმენტი დავყოთ ნაწილებად წერტილებით: $S_{\sigma k} = S_\sigma + h \cdot x_k \quad \left(h = \frac{b-a}{n} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m,$

სადაც $\{x_k\}_{k=1}^m$ არის $[0, 1]$ შუალედიდან აღებული მოცემული წერტილთა სისტემა.

შემდეგში გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ რიცხვები დანომრილია ზრდის მიხედვით.

$$\text{აღვნიშნოთ } \tau_\sigma = t(s_\sigma), \quad t_{\sigma k} = t(s_{\sigma k}) \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m)$$

ვიგულისხმობთ, რომ σ, ν ნებისმიერია $1, 2, \dots, n$ რიცხვთაგან და t_0 წერტილი განსხვავებულია $t_{\sigma k}$ კვანძებისაგან. განვიხილოთ გამოსახულება:

$$\psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0) = \varphi(t_0) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_{\sigma k}-t_0} \cdot \varphi(t_{\sigma k}) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_0-t_{\sigma k}} \cdot L_\nu(\varphi; t_0),$$

სადაც
$$L_\nu(\varphi; t_0) = \sum_{k_0=1}^m l_{\nu k_0}(t_0) \varphi_{0n}(t_{\nu k_0}),$$

$$l_{\sigma k}(t) = \frac{\omega_\sigma(t)}{(t-t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})}, \quad \omega_\sigma(t) = \prod_{k=1}^m (t-t_{\sigma k}),$$

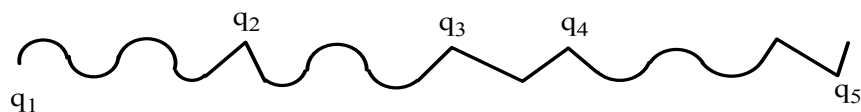
ხოლო φ, L - ზე მოცემული ჰელდერის კლასის ფუნქციაა ($\varphi \in H$). შევნიშნოთ, რომ $\psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0)$ გამოსახულებას შეიძლება მივანიჭოთ სრულიად გარკვეული აზრი, როცა $t = t_{\sigma k}$ (ამ შემთხვევაში უნდა ვიგულისხმობთ, რომ $t \rightarrow t_{\sigma k}$).

აღვნიშნოთ ახლა $\phi_n(\varphi; t, t_0) = \psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0)$, $t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$, $t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}$ $\sigma = 1, 2, \dots, n$; $\nu = 1, 2, \dots, n$, და (13) ინტეგრალურ განტოლებაში $\varphi_0(t)$ მიახლოებით შევცვალოთ $\phi_n(\varphi; t, t_0)$ ფუნქციით, შემდეგ t_0 -ში ჩავსვათ $\{t_{\sigma k}\}$ ($\sigma = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, m$) დისკრეტული წერტილები. (13)-განტოლებიდან მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას $\{\varphi_{\sigma k}\}$ ($\sigma = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, m$) უცნობების მიმართ. მტკიცდება, რომ ეს სისტემა ცალსახად ამოხსნადია. ვპოულობთ ამ ამონახსნებს და დირიხლეს ამოცანის მიახლოებით ამონახსნად ვღებულობთ:

$$U_n(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\psi_n(t)}{t-z} dt, \quad (z \in D) \quad (14)$$

სადაც $\psi_n(t)$ წარმოადგენს $\{\sigma_{0j}\}_{j=1}^n$ მნიშვნელობაზე აგებულ ლანგრანჟის ინტერპოლაციურ მრავალწევრს,
$$\psi_n(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\omega(t)}{(t-t_{0j})\omega'(t_{0j})} \cdot \varphi_{0n}(t_{0j}).$$

როცა L წირი უბან-უბან გლუვია q_1, q_2, \dots, q_n კუთხითი წერტილებით ან (იხ. სურ.6) $f(t)$ -ს გააჩნია პირველი გვარის წყვეტები, მაშინ



სურ. 5.

დირიხლეს ამოცანაში $S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ სინგულარულ ინტეგრალს ვცვლით

მ. კუბლაშვილის მიერ აგებული $S_{n,q_1,q_2,\dots,q_n}(\varphi;t_0)$ მაღალი სიზუსტის მიახლოებითი მაპროექსიმირებელი ჯამით:

$$S_{n,q_1,q_2,\dots,q_n}(\varphi;t_0) = \sum_{\sigma=1}^n \left\{ \varphi(t_0) \lambda_{r\sigma}(t_0) + \sum_{k=1}^m \frac{P_{r\sigma k}}{t_0 - t_{r\sigma k}} [L_{r\sigma}(\varphi;t_0) - \varphi(t_{r\sigma k})] \right\} + \sum_{i=1}^l [\varphi(q_i) \lambda_{i\sigma}(t_0) + \sum_{k=1}^m \frac{\Omega_{i\sigma k}(t_0; q_i)}{q_i - t_{i\sigma k}}] + [L_{i,0}(\varphi; q_i) - \varphi(t_{i\sigma k})] + \varphi(q_r) \lambda_{r-1\sigma}(t_0) + \sum_{k=1}^m \frac{\Omega_{r-1\sigma k}(t_0; q_r)}{q_r - t_{r-1\sigma k}} \times [L_{r-1,n-1}(\varphi; q_r) - \varphi(t_{r-1\sigma k})] \}.$$

სადაც

$$\Omega_{i\sigma k}(t_0; q_i) = p_{i\sigma k} + \frac{t_0 - q_i}{(t_0 - t_{i\sigma k}) \omega'_{i\sigma}(t_{i\sigma k})} [\omega_{i\sigma}(t_0) [\gamma_{i\sigma}(t_0) + \lambda_{i\sigma}(t_0)] - p_{i\sigma k} \omega'_{i\sigma}(t_{i\sigma k})]$$

$$\lambda_{i\sigma}(t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \ln \frac{\tau_{i\sigma+1} - t_0}{\tau_{i\sigma} - t_0}; \quad \gamma_{i\sigma}(t_0) \equiv \sum_{j=1}^m \frac{P_{i\sigma j}}{t_0 - t_{i\sigma j}},$$

$$p_{i\sigma k} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{i\sigma} \tau_{i\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\omega_{i\sigma}(t) dt}{(t - t_{i\sigma k}) \omega'_{i\sigma}(t_{i\sigma k})}$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, r-1, r+1, \dots, l) \quad (t_0 \in q_r, q_{r+1})$$

$t_{i\sigma k} (i = 1, 2, \dots, l; \sigma = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m)$ კვანძითი წერტილებია $q_i q_{i+1} \subset L$ რკალზე.

(14) ფორმულაში L მრუდთან ახლო წერტილისთვის $z = x + iy$ ვიყენებთ მ. კუბლაშვილის მიერ აგებულ მაღალი რიგის სიზუსტის კვადრატურულ ფორმულას:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\psi_n(t)}{t-z} \approx 2i L_\nu(\phi; t_0) + 2i \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k}(\sigma; t; z) \cdot \frac{\psi_n(\tau_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}}{\tau_{\sigma+k}}, \quad (15)$$

სადაც

$$P_{\sigma k}(p, t, z) = \frac{1}{2} p_\sigma(p) + \frac{(z-t_0)}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{l_{\sigma k}(t) dt}{t-z} + \frac{(z-t_0)^2}{2\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+2}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{l_{\sigma k}(t) dt}{(t-z)^2};$$

დანარჩენი z წერტილებისთვის გამოვიყენოთ ჩვეულებრივი კვადრატურული ფორმულა.

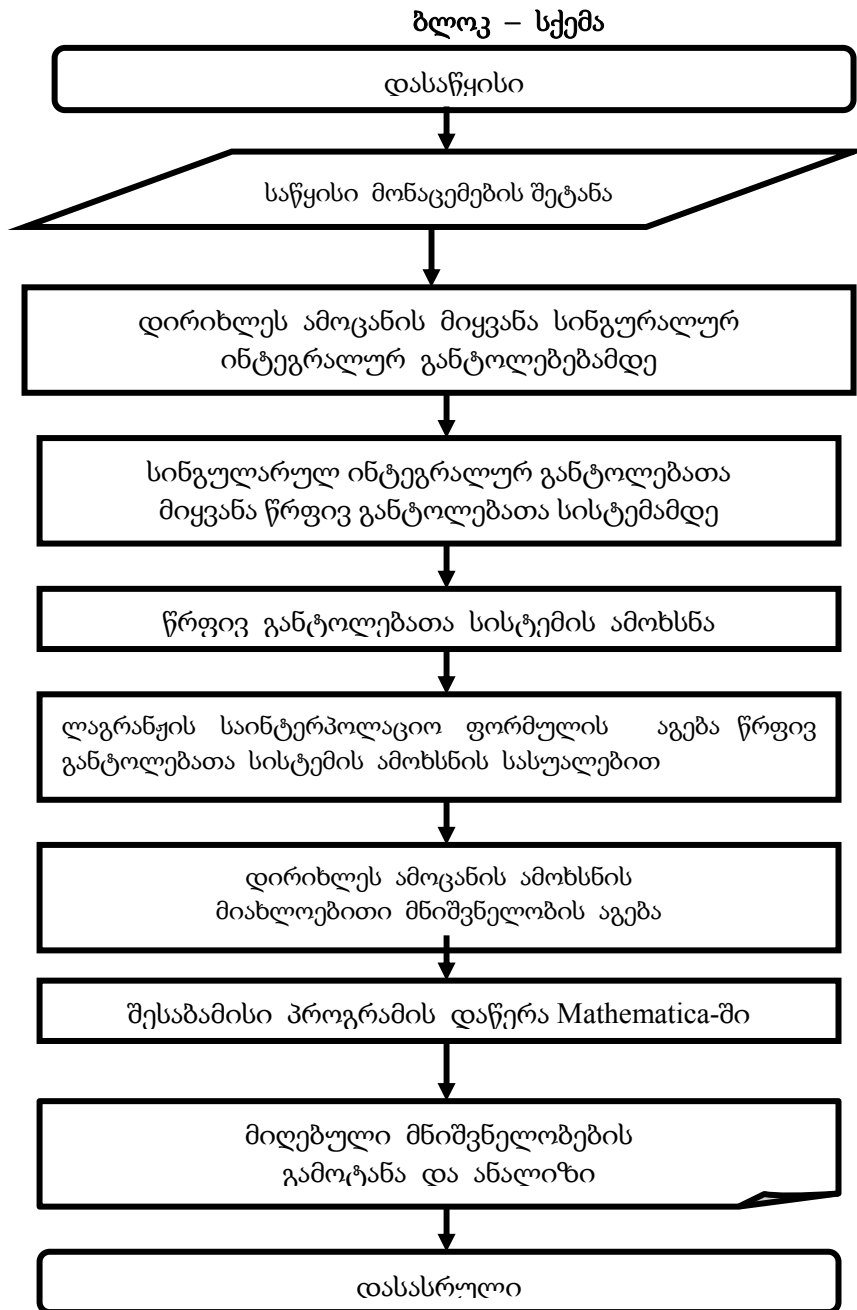
$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\psi_n(t)}{t-z} \approx 2i \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k} \cdot \frac{\psi_n(\tau_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}}{\tau_{\sigma+k} - z}. \quad (16)$$

მაგალითისთვის, L კონტურის როლში მივიღოთ გრაფიკულად ფორმულირებული მრუდი (სურ.6), ხოლო მარჯვენა მხარედ $f(t) = \operatorname{Re}(t) + \operatorname{Im}(t)$ და

გამოვთვალთ დირიხლეს ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა კონტურის დაყოფათა n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის. შედეგები წარმოდგენილია (2,3,4) ცხრილებში:



სურ. 6. გრაფიკულად ფორმულირებული მრუდი დირიხლეს ამოცანის ამოხსნის გამსხვილებულ ბლოკ-სქემას აქვს შემდეგი სახე:



პროგრამა დავწერეთ „Mathematica“-ში.

n=10

ცხრილი 2

Z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
0.005i	$5.84648 \cdot 10^{-15}$	-0.00359624	0.00359624
$2\pi + 0.005i$	1.	0.866977	0.133003

n=50

ცხრილი 3

Z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
0.005i	$5.84648 \cdot 10^{-15}$	-0.00469624	0.0046966
$2\pi + 0.005i$	1.	0.93816	0.061804

n=100

ცხრილი 4

Z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
0.005i	$5.84648 \cdot 10^{-15}$	-0.00959009	0.009004
$2\pi + 0.005i$	1.	0.95221	0.04779493

აღებული ალგორითმის ეფექტურობა კარგად ჩანს მიღებული ცხრილებიდან, როცა ბზარს აქვს ნებისმიერი გლუვი გახსნილი წირის ფორმა, რომლის პარამეტრული განტოლებაც უცნობია.

§2.2-ში განხილულია ბზარების ზოგიერთი ბრტყელი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა მაღალი რიგის სიზუსტით. კერძოდ განხილულია უსასრულო ფირფიტა, რომელზეც მოცემულია ორი თანაბარი სიგრძის სიმეტრიულად განლაგებული ბზარი. მასზე მოცემული დატვირთვა აკმაყოფილებს სიმეტრიის პირობას.

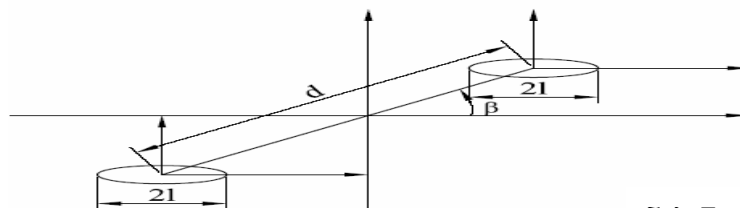
ასეთი ამოცანები მიიყვანება შემდეგი სახის პირველი გვარის სინგულარულ - ინტეგრალურ განტოლებებზე.

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} k(t, t_0) \varphi(t) dt = f(t_0), \quad (17)$$

სადაც $f(t_0)$ და $k(t, t_0)$ ფუნქციები ცნობილია, ხოლო $\varphi(t)$ სამეზნი ფუნქციაა.

როგორც ცნობილია ასეთ შემთხვევაში გულს აქვს სახე:

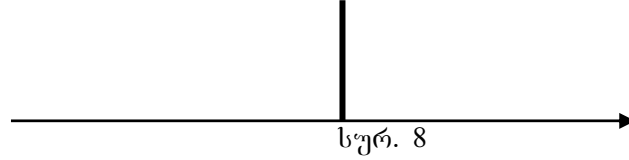
$$k(t_0, t) = \frac{t + t_0 + d \cos \beta}{(t + t_0 + d \cos \beta)^2 + d^2 \sin^2 \beta}, \quad (18)$$



ნახ.7

სადაც β არის კუთხე ბზარის სიბრტყესა და წრფეს შორის, რომელიც გადის ბზარის ცენტრებს შორის.

იმ შემთხვევაში, როცა დრეკად ნახევარსიბრტყეში მოცემულია L სიგრძის ბზარი, რომელიც სიბრტყის საზღვრის მართობულია (სურ. 8)



$$k(t_0, t) \text{ გულს აქვს შემდეგი სახე: } k(\tau, y) = \frac{y^2 + 6y + 4\tau y + 2\tau - \tau^2 + 4}{(\tau + y + 2)^3} \quad (19)$$

სიმარტივისათვის ვეძებთ (17) განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია ინტეგრების წირის ერთ-ერთ ბოლოზე და შემოუსაზღვრელი მეორე

ბოლოზე $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi(t)$, სადაც, φ ფუნქცია აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას

$$\varphi \in H(L).$$

(17) განტოლება განვიხილოთ როგორც ოპერატორული განტოლება გარკვეულ ფუნქციურ სივრცეში. ამისათვის ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$U\varphi = S^{(1/2; -1/2)}\varphi + H\varphi, \quad (20)$$

სადაც

$$S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}, \quad H(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} k(t, t_0) \varphi(t) dt.$$

წინა ამოცანის მსგავსად კონტური დავყოთ თანაბარი რაოდენობის კვანძებად, სადაც

$\{x_k\}_{k=1}^m$ არის $[0, 1]$ შუალედიდან აღებული მოცემული წერტილთა სისტემა.

სინგულარული ინტეგრალი $S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ შევცვალოთ $S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ - ით:

$$S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\phi_n(\varphi; t, t_0) dt}{t-t_0} = \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} H_n(\varphi; t, t_0) dt, \quad (21)$$

(20) განტოლებაში რეგულარული ინტეგრალი $H(\varphi, t_0)$ შევცვალოთ ჩვეულებრივი გართულებული კვადრატურული ფორმულით:

$$H(\varphi; t_0) \approx H_n(\varphi; t_0) = \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=1}^m P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} k(t_{\sigma k}, t_0) \varphi(t_{\sigma k}) \quad (22)$$

და (20) განტოლებასთან ერთად $L_n[\varphi_n; t_0]$ ფუნქციათა ქვესივრცეში განვიხილოთ

$$\text{განტოლება: } U_n[L_n[\varphi_n; t_0]] = L_n[S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi_n; t_0)] + L_n[H_n(\varphi_n; t_0)]. \quad (23)$$

თუ ამ განტოლებაში t_0 პარამეტრს მივცემთ მნიშვნელობებს $T(v; j) = \{t_{v,j}\}$, ($v=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,m$) სიმრავლიდან, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას $\{t_{v,j}\}$ წერტილებში $\varphi_n(t_{v,j})$ ($v=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,m$) უცნობების მიმართ.

მართებულია შემდეგი თეორემა: თუ (17) განტოლებას აქვს $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}}\varphi(t)$ ტიპის ერთადერთი ამონახსნი, მაშინ გარკვეული $n = n_0$ - დან დაწყებული (23) განტოლება ცალსახად ამოხსნადია და თუ $L_n[\varphi_n; t_0]$ არის (23) განტოლების ამონახსნი, მაშინ φ -ს მიმართ ზემოთ მიღებულ დაშვებებში ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\|\varphi(t) - L_n[\varphi_n; t]\|_{H_\beta} \leq \frac{C_r \ln n}{n^{r+\alpha-\beta-1/2}}, \quad (24)$$

სადაც φ არის (17) განტოლების ამონახსნი, C_r - რაიმე მუდმივა, n - დაყოფათა რაოდენობა, r - რიგი, α და β - ჰელდერის მაჩვენებლები.

(24) შეფასებიდან ჩანს, რომ ის მრავალმხრივ აუმჯობესებს აკ. ბელოცერკოვსკის შედეგს. კერძოდ: ჩანს, რომ მიახლოებითი სქემა არის მაღალი რიგის, როცა ფუნქციას აქვს r -რიგის უწყვეტი წარმოებული, მაშინ სქემის კრებადობის რიგიც იგივეა, მაშინ როცა აკ. ბელოცერკოვსკის სქემით არ მიიღება თანაბარი შეფასებები, ამასთან, მისი ალგორითმების მიღებული ცდომილებების რიგია $O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

როგორც ვხედავთ (24)-ში შეფასებები მიღებულია H_β მუსხელიშვილის ნორმებში

$$\|\varphi\|_{H_\beta} = \max_{t \in L} |\varphi(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta},$$

რაც თანაბარ შეფასებაზე უფრო ძლიერია.

პროგრამა დაწერილია „**Mathematica**“- ში. ქვემოთ მოყვანილია (18) განტოლების ამოხსნის ცხრილები.

$$k(t_0, t) = 1, f=2; n=10$$

ცხრილი 5 ინტეგრალური განტოლების ზუსტი ამონახსნია $\varphi(t) = 1$

φ_{00}	0.9843	φ_{21}	0.9955	φ_{42}	0.99942	φ_{63}	0.99695
φ_{01}	0.9864	φ_{22}	0.99734	φ_{43}	0.99891	φ_{70}	0.99695
φ_{02}	0.9881	φ_{23}	0.99769	φ_{50}	0.99891	φ_{71}	0.99856
φ_{03}	0.9895	φ_{30}	0.99769	φ_{51}	0.99077	φ_{72}	0.99879
φ_{10}	0.9895	φ_{31}	0.99802	φ_{52}	0.99184	φ_{73}	0.99899
φ_{11}	0.9935	φ_{32}	0.99830	φ_{53}	0.99277	φ_{80}	0.99899
φ_{12}	0.9943	φ_{33}	0.99919	φ_{60}	0.99277	φ_{81}	0.99963
φ_{13}	0.99496	φ_{40}	0.99919	φ_{61}	0.99606	φ_{82}	0.99860
φ_{20}	0.99496	φ_{41}	0.99931	φ_{62}	0.99653	φ_{83}	1.10160

$$k(t_0, t) = (t + t_0 + 4 \cos \pi / 3) / ((t + t_0 + 4 \cos \frac{\pi}{3})^2 + 16 \sin^2 \frac{\pi}{3}), f = 2, n=10$$

ცხრილი 6 ინტეგრალური განტოლების ზუსტი ამონახსნია $\varphi(t) = 2$

φ_{00}	2,03931	φ_{21}	1,95791	φ_{42}	1,86391	φ_{63}	1,93347
φ_{01}	2,03231	φ_{22}	1,92563	φ_{43}	1,85699	φ_{70}	1,93347
φ_{02}	2,0469	φ_{23}	1,91797	φ_{50}	1,85699	φ_{71}	1,89614
φ_{03}	2,01678	φ_{30}	1,91797	φ_{51}	2,00858	φ_{72}	1,88928
φ_{10}	2,01678	φ_{31}	1,91049	φ_{52}	2,00021	φ_{73}	1,88826
φ_{11}	1,98325	φ_{32}	1,90321	φ_{53}	1,99175	φ_{80}	1,88826
φ_{12}	1,9474	φ_{33}	1,87622	φ_{60}	1,99175	φ_{81}	1,85258
φ_{13}	1,96663	φ_{40}	1,87622	φ_{61}	1,94963	φ_{82}	1,84524
φ_{20}	1,96663	φ_{41}	1,86991	φ_{62}	1,941481	φ_{83}	1,87185

როგორც ცნობილია მახვები გახსნილი წირის შემთხვევაში გამოისახება შემდეგი ფუნქციებით:

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - 1^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1^2 - t^2} p(t) dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-1}^{+1} \frac{q(t) dt}{t - z} + \frac{R}{\sqrt{z^2 - 1^2}} \right],$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - 1^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1^2 - t^2} p(t) dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \left[-\int_{-1}^{+1} \frac{q(t) dt}{t - z} + \frac{R}{\sqrt{z^2 - 1^2}} \right].$$

$\phi_1(z_1)$ და $\Omega_1(z_1)$ პოტენციალები, რომლებიც შეესაბამება ახალ კოორდინატთა სისტემაში $\phi(z)$ და $\Omega(z)$ ფუნქციებს XOY სისტემაში განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\phi_1(z_1) = \phi(\pm z_1 \pm 1) \quad \Omega_1(z_1) = \Omega(\pm z_1 \pm 1)$$

ზვარის მცირე მიდამოში, ე. ი. $|z_1| \ll 1$ ადგილი აქვს $\phi_1(z_1)$ და $\Omega_1(z_1)$

ფუნქციების შემდეგ წარმოდგენებს

$$\phi_1(z_1) = \frac{k_1^\pm - ik_2^\pm}{2\sqrt{2z_1}} + 0(I), \quad (25) \quad \Omega_1(z_1) = \frac{k_1^\pm - ik_2^\pm}{2\sqrt{2z_1}} + 0(I), \quad (26)$$

სადაც $0(I)$ შემოსაზღვრული სიდიდეა, როცა $|z_1| \rightarrow 0$;

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = -\frac{1}{\pi\sqrt{1}} \left[\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1 \pm t}}{\sqrt{1 \mp t}} p(t) dt \pm i \frac{\aleph - 1}{\aleph + 1} \int_{-1}^{+1} q(t) dt \right] \quad (27)$$

1- ზვარის სიგრძეა, $p(t)$, $q(t)$ - ზვარის წირის გასწვრივ დატვირთვაა, ხოლო \aleph - მასალის მახასიათებელია. აქ და შემდეგში k_1^\pm და k_2^\pm ნამდვილი სიდიდეებია. „+“ ნიშანი ეკუთვნის ზვარის მარჯვენა წვეროს ($z=1$), ხოლო ქვედა „-“ მარცხენა წვეროს ($z=-1$). k_1^\pm და k_2^\pm კოეფიციენტებს უწოდებენ დამაბულობის ინტენსივობის კოეფიციენტებს. ზოგიერთ შრომებში მიღებულია მახვის ინტენსივობის

კოეფიციენტები უწოდონ $\sqrt{\pi}$ - ჯერ მეტ სიდიდეებს, ე.ი. $k_1^\pm = \sqrt{\pi}k_{1c}^\pm$, $k_2^\pm = \sqrt{\pi}k_{2c}^\pm$. ისინი განისაზღვრება დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის ძაბვის ფუნქციებითა და პარამეტრებით, რომელიც ახასიათებს სხეულის კონფიგურაციასა და ბზარის ფორმას.

ბზარის გასწვრივ ყველაზე ზოგადი დატვირთვის დროს k_1^\pm და k_2^\pm ინტენსივობის კოეფიციენტები გამოითვლება (27) ფორმულით. ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც პარამეტრები, რომლებიც ასახავს სხეულში ბზარების წარმოქმნის გამო ძაბვების გადანაწილებას. ამიტომ, ბზარის წვეროს მიდამოში ძაბვის განაწილება ცნობილი იქნება, თუ განსაზღვრული იქნება ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტები. ამიტომ, არსებითი მნიშვნელობა აქვს k_1^\pm და k_2^\pm ინტენსივობის კოეფიციენტების განსაზღვრას.

ბზარების ტიპის დეფექტების მქონე მყიფე სხეულების ზღვრულ-წონასწორული მდგომარეობის გამოკვლევის დროს მოითხოვება განისაზღვროს გარე დატვირთვის კრიტიკული მნიშვნელობა, რომლის მიღწევის დროს ბზარები იწყებს გავრცელებას, ე. ი. იწყება სხეულის ლოკალური ან სრული რღვევა. ამ ამოცანის ამოხსნის დროს პრინციპული მომენტია ზღვრული წონასწორობის ფორმულირება. ამ პირობის უმარტივესი ვარიანტი ჩამოაყალიბა ირვინმა. ნორმალური განვითარების ბზარის შემთხვევაში მის მიერ გამოთქმული იყო მტკიცება იმის შესახებ, რომ მყიფე ან კვაზიმყიფე სხეულებში ბზარის გავრცელება იწყება მაშინ, როცა მოცემული მასალისათვის, მოცემულ პირობებში ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტი ბზარის წვეროსთან აღწევს რაიმე მუდმივ მნიშვნელობას: $k_1 = k_{1c} / \sqrt{\pi}$ (28)

k_{1c} მუდმივი, რომელიც ახასიათებს მასალის რღვევის წინააღმდეგობას უნდა განისაზღვროს ექსპერიმენტულად.

ზოგად შემთხვევაში, სხეულის ზღვრული წონასწორობის საკითხის განხილვისას, როცა ლოკალური სიმეტრიის პირობა არ სრულდება, აუცილებელია ჩამოვაყალიბოთ დამატებითი პირობა. ასეთ პირობად გამოიყენება ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ბზარის საწყისი მიმართულება ემთხვევა სიბრტყეს, რომელშიც გამჭიმავი ძაბვის მთავარი ნაწილი აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ჰიპოთეზა განხილულია [Панасюк, Бережницкий და Черепанов]- ის შრომებში. ამ ჰიპოთეზის საფუძველზე ბზარის საწყისი გავრცელების კუთხე გამოითვლება ფორმულით:

$$\theta_* = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 + 8k_2^2}}{4k_2} \quad (29)$$

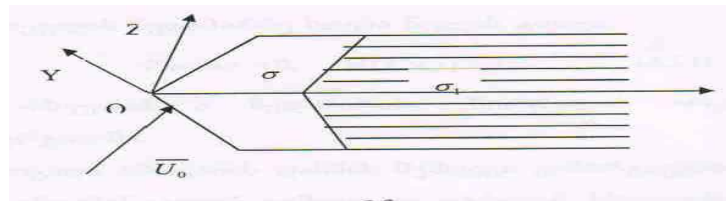
ზღვრული წონასწორობის განტოლებას ექნება სახე:

$$\cos^2 \frac{\theta_*}{2} \left(k_1 - 3k_2 \operatorname{tg} \frac{\theta_*}{2} \right) = \frac{k_{1c}}{\sqrt{\pi}}. \quad (30)$$

აქედან გამოითვლება გარე დატვირთვის კრიტიკული მნიშვნელობა, რომლის დროსაც იწყება სხეულის ლოკალური რღვევა.

III თავში წარმოდგენილია აეროდინამიკის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნების ალგორითმების დამუშავება და პროგრამული უზრუნველყოფა.

§3.1-ში განიხილება ფრთის სტაციონარული და არასტაციონარული გარსშემოდენის ამოცანები. წარმოდგენილია აეროდინამიკის ამოცანის დასმა ზოგადად. ამ ამოცანებში სხეულის ფორმა და მოძრაობის კანონი ითვლება ცნობილად, როცა სხეული დრეკადია, მაშინ ითვლება, რომ სხეულის დეფორმაციის კანონიც ცნობილია. ამასთან, ბუნებრივია ცნობილად ითვლება პირობები, რომელშიც სხეულს უხდება მოძრაობა (გაფრენა). ჩვეულებრივ, ეს არის უსასრულო გარემო, რომელიც შეშფოთებულია მხოლოდ სხეულით. ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი საკითხია სხეულის ზედაპირზე სასაზღვრო პირობები. ასეთია, მაგალითად, პირობა, რომელიც განსაზღვრავს სხეულის ზედაპირზე სიჩქარეს.



სურ. 9

§3.2-ში განხილულია ნებისმიერი ფორმის ფრთის (სხეულის) გარსდენა, რომელიც მოძრაობს იდეალურ არაბლანტ არაკუმშვად (მუდმივი სიმკვრივის მქონე) გარემოში. ნაგულისხმევია, რომ სხეულის ფორმა და მოძრაობის კანონი ცნობილია. გარდა ამისა, ცნობილად ითვლება პირობები, რომელშიც ხდება სხეულის მოძრაობა (ფრენა). საზოგადოდ, ეს არის შემოუსაზღვრავი გარემო, რომელიც შეშფოთებულია მხოლოდ სხეულით, მაგრამ შეიძლება განხილული იქნეს სხეულის მოძრაობები შეშფოთებულ გარემოში (ქარის, დინების, ტურბოლენტურობის ზემოქმედებები). როგორც ცნობილია, ასეთი ამოცანები მიიყვანება პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ

განტოლებებზე.

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} k(t, t_0) \varphi(t) dt = f(t_0), \quad (31)$$

სადაც $L=ab$ გახსნილი გლუვი კონტურია a და b ბოლოებით, რომელიც მოცემულია პარამეტრული სახით $t = t(s)$, ($s_a \leq s \leq s_b$); $f(t)$ მფრინავი სხეულის

სიჩქარეა, $k(t, t_0)$ - გული, ცნობილი ფუნქცია, რომელსაც აქვს სხვადასხვა სახე, იმის მიხედვით, თუ როგორი ტიპის გარსდენას ვიხილავთ (ცირკულაციური, არაციკულაციური და ა.შ), $\varphi(t)$ -სამეზნი ფუნქცია, რომლითაც განისაზღვრება მფრინავი სხეულის ზედაპირზე ინტენსივობის სიდიდე.

განვიხილოთ გარსდენის ცირკულაციური ამოცანა. როგორც ცნობილია, ასეთ შემთხვევაში უნდა ვეძებოთ (31) განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია ინტეგრების წირის ერთ-ერთ ბოლოზე და შემოუსაზღვრავია

მეორე ბოლოზე: $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi(t)$, სადაც, k, f - ზე გარკვეულ დამეზებებში φ

ფუნქცია აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას $\varphi \in H(L)$.

მეორე თავში მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურად (31) განტოლება განვიხილოთ როგორც ოპერატორული განტოლება გარკვეულ ფუნქციურ სივრცეში.

ამისათვის ჩავწეროთ შემდეგი სახით: $U\varphi = S^{(1/2; -1/2)}\varphi + H\varphi$, (32)

სადაც: $S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}$, $H(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} k(t, t_0) \varphi(t) dt$.

მე-2 თავში მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურად (32) განტოლებაში სინგულარული ინტეგრალი $S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ შევცვალოთ $S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ - ით:

$$S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\phi_n(\varphi; t, t_0) dt}{t-t_0} = \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} H_n(\varphi; t, t_0) dt, \quad (33)$$

ხოლო რეგულარული ინტეგრალი $H(\varphi; t_0)$ შევცვალოთ ჩვეულებრივი გართულებული კვადრატურული ფორმულით:

$$H(\varphi; t_0) \approx H_n(\varphi; t_0) = \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=1}^m P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} k(t_{\sigma k}, t_0) \varphi(t_{\sigma k}) \quad (34)$$

და (32) განტოლებასთან ერთად $L_n[\varphi_n; t_0]$ ფუნქციათა ქვესივრცეში განვიხილოთ განტოლება

$$U_n[L_n[\varphi_n; t_0]] = L_n[S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi_n; t_0)] + L_n[H_n(\varphi_n; t_0)] \quad (35)$$

თუ ამ განტოლებაში t_0 პარამეტრს მივცემთ მნიშვნელობებს $T(v; j) = \{t_{v,j}\}$ ($v=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,m$) სიმრავლიდან, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას $\{t_{v,j}\}$ წერტილებში $\varphi_n(t_{v,j})$ - უცნობების მიმართ.

ჩავთვალოთ, რომ (31) განტოლებაში $k(t; t_0)$ და $f(t_0)$ ფუნქციები ეკუთვნის $H_r^{(\alpha)}(L)$ - კლასს. მტკიცდება, რომ როცა ზუსტ (32) განტოლებას აქვს ერთადერთი

ამონახსნი, მაშინ გარკვეული $n = n_0$ - დან დაწყებული (35) მიახლოებით განტოლებასაც აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნებს შორის ადგილი აქვს მე-2 თავში მიღებულ (24) შეფასებას.

ჩვენ ჩავატარეთ რიცხვითი ექსპერიმენტი თხელი პროფილის გარსდენის დროს. ამ დროს პროფილის $\varphi(x)$ ინტენსივობის მიმართ მიიღება განტოლება:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \varphi(t) \left[\frac{1}{t-t_0} + \frac{t_0-t}{(t-t_0)^2 + 4H^2} \right] dt = V^*(t_0), \quad (36)$$

სადაც $V^*(t_0)$ მოძრავი ნაკადის სიჩქარეა.

ალგორითმის რეალიზაციისათვის შევადგინეთ პროგრამა **Mathematica** სიმბოლურ ენაზე.

ქვემოთ ცხრილებში მოყვანილია $\varphi(x)$ - ის გამოთვლის მნიშვნელობები შემდეგი მონაცემებით:

$n=3; m=2; V^* = 2$ (ზუსტი ამონახსნია $\varphi = 2$) ცხრილი 7

t_{vj}	-1	-0.333	0.333	1
$\varphi(t_{vj})$	2.02	2.00	2.00	1.99

$n=3; m=4; H = 1 \quad V^* = 2$ ცხრილი 8

t_{vj}	-1	-0.78	-0.56	-0.33	-0.11	-0.11	0.33	0.56	0.78	1
$\varphi(t_{vj})$	2.02	2.02	2.01	2.01	2.01	2.00	2.00	1.99	1.99	1.99

$n=5; m=2; H = 1 \quad V^* = 2$ ცხრილი 9

t_{vj}	-1	-0.6	-0.2	0.2	0.6	1
$\varphi(t_{vj})$	2.02	2.01	2.01	2.00	2.00	1.99

როგორც ამ ცხრილებიდან ჩანს, ჩვენ მიერ აგებული ალგორითმი აღწევს საკმაოდ მაღალ სიზუსტეს, როცა $n=3, n=5$.

ძირითადი დასკვნები

1. შესწავლილია ფუძის და საძირკვლის ერთობლივი დეფორმაციების განსაზღვრის სხვადასხვა მეთოდი;
2. წარმოდგენილია ფუძის დაჯდომის განსაზღვრა შრეობრივი (კომპიუტერული პროგრამული უზრუნველყოფით) შეჯამების, შეზღუდული სისქის დრეკადი ფენის, ეკვივალენტური შრის და მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით;
3. შემთხვევითი ძეზნის მეთოდით დამუშავებულია და შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამით უზრუნველყოფილია ოპტიმალური პარამეტრის მოძებნის ალგორითმი;

4. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით აგებულია და კომპიუტერული პროგრამით უზრუნველყოფილია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები:

ა) სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის;

ბ) აეროდინამიკის ზოგიერთი სტაციონარული და არასტაციონარული ამოცანებისათვის.

დისერტაციის ძირითადი შინაარსი გამოქვეყნებულია

შემდეგ ნაშრომებში:

1. ბზარების ზოგიერთი ბრტყელი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნები მაღალი რიგის სიზუსტით. სტუ – შრომები №1(467) 2008წ, მ.დ. კუბლაშვილი, თ.დ. კვაჭაძე, მ.მ. კუბლაშვილი.
2. ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ, როცა ბზარს აქვს გლუვი ან უბან-უბან გლუვი გახსნილი წირის ფორმა. მშენებლობა №1(20), 2011 – თ. კვაჭაძე.
3. აეროდინამიკის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდის გამოყენებით. მშენებლობა №1(20), 2011 – თ.დ. კვაჭაძე, მ.მ. კუბლაშვილი.
4. ფუძის დეფორმაციის გაანგარიშება შემთხვევითი ძენის მეთოდით და ოპტიმალური პარამეტრების განსაზღვრა. საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია „ქალი და XXI საუკუნე“, 2011წ (გვ.104) თ. კვაჭაძე.
5. ფუძის და საძირკვლის ერთობლივი დეფორმაციის გაანგარიშების თანამედროვე მეთოდები - მშენებლობა 1(4), 2007წ, ბ. გვასალია, თ.დ. კვაჭაძე, დ.ე. კვაჭაძე;
6. ფუძის და საძირკვლის დეფორმაციის განსაზღვრა შრეობრივი შეჯამებისა და მიმდევრობით მიახლოების მეთოდით, მშენებლობა 3(6), 2007წ, თ. კვაჭაძე, გ. სარიშვილი;

Summary

NUMERICAL SOLUTION OF SOME PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS BY APPLICATION OF SINGULAR INTEGRAL EQUATION'S METHOD

The founding of exact solution of number of practical problems of structural mechanics is reduced to computation of such integrals, or to solution of integral equations that is rather complex and in some cases impossible. In such cases for solution of problem is necessary application of numerical methods.

In turns, the development of algorithms numerical solutions and their computational realization is connected with certain complexity and includes several significant stages. Firstly for the numerical solution of certain problem would be developed according mathematical algorithm. Naturally at development of such algorithm would be provided the solved tasks features: in particular. The algorithm fully will describes the problem's nature and explain as exactly as its content. On the other hand would be as possible exact and stable regarding to computational process.

The dissertational work is concerned exactly to study of such problems for some tasks of structural mechanics. In particular, it includes definition methods of foundations joint deformation, selection of main variants and computational realization, development solution algorithms for crack tasks higher order of precision and their and computational realization.

The presented work conditionally would be divided on two basic parts. In the first part is considered on foundations settlement (settling that in turns causes cracks initiation), development of numerical solution's modern methods and due them computational realization; in the second part due application of method of singular integral equations for practical problems of structural mechanics construction of high order precision numerical solutions algorithms and computational realization.

Buildings foundation deformation (settling) calculation represents one of basic problems of structural mechanics. In the presented by us work are given foundations settling calculations by different methods. Are shown advantages as well as disadvantages of these methods and their application fields.

The foundation settlement in building often causes cracks initiation that further propagation causes the buildings destruction. In the presented work is developed theory that gives the possibility to calculate the stresses values on arbitrary small neighborhood of cracks ends that gives the possibility to perform such distribution of stresses that gives the possibility to avoid further destruction of building. If the further cracks propagation is unavoidable, then building developed in dissertation theory is possible to forecast the cracks expected propagation direction.

As it is shown due investigations by singular integral equations, in comparison with other known methods, exactly are described complex nature of arisen problem (especially in crack tasks). Thus the developed in dissertation development construction of such equations high order precision numerical solution algorithms represents the actual theme.

In the crack tasks often is difficult to describe the straight lines by exact parametric equations (often it is impossible) and is known only graphical shape of this straight line. In such cases as it is indicated by experiments, is effective the method of singular integral equations.

For such type of numerical solutions of task's, when crack has arbitrary smooth or site-by-site smooth straight line shape, are constructed high order precision schemes and are developed according computer programs.

The scientific novelty of presented dissertational work is presented in following:

1. Are studied foundations joint deformations definition different methods;
2. Is presented definition of foundation settlement by layered (provided with computer programs) summation, elastic layer with limited thickness, equivalent layer and progressive approximation methods;
3. By random search method is developed and provided by according computer program optimal parameter search algorithm;
4. By application of singular integral equations is constructed and provided by computer program high order precision numerical solution algorithms:
 - a) For some problems of structural mechanics;
 - b) For some stationary and non-stationaty problems of aerodinamics.