დ.გორგიძე,   გ. ბაღათურია

ანალიზური მექანიკა

„ ტექნიკური უნივერსიტეტი"

saqarTvelos teqnikuri universiteti

დ.გორგიძე, გ. ბაღათურია

ანალიზური მექანიკა

დამტკიცებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო
საბჭოს მიერ

თბილისი
2009

უაკ 531.011

წიგნი წარმოადგენს ანალიზური მექანიკის სახელმძღვანელოს უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების საინჟინრო სპეციალობების სტუდენტებისათვის. იგი შეიცავს ანალიზური მექანიკის ძირითად საკითხებს. თეორიულ მასალის გარდა, მასში მოცემულია მაგალითები, ამოცანები და მათი ამოხსნები, რომელთა ათვისება აუცილებელია კურსის შესასწავლად.

რეცენზენტი სრული პროფესორი ზურაბ გასიტაშვილი

შესავალი

წინამდებარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია პირველ რიგში საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საინჟინრო სპეციალობების სტუდენტებისათვის. ამგვარი სახელმძღვანელოს სექმნის აუცილებლობა განაპირობა ანალიზური მექანიკის მეთოდების ფართო გამოყენებამ მეცნიერებასა და ტექნიკის სხვადასხვა სფეროში.

ასე მაგალითად, განუზომლად დიდია ანალიზური მექანიკის მნისვნელობა თანამედროვე ტექნიკის მრავალ დარგში, როგორიცაა სამშენებლო მექანიკა, მექანიზმების თეორია, მოძრაობათა მართვის თეორია, კოსმოსური მექანიკა, ავტომატური სისტემების მართვა, დაბოლოს ანალიზური მექანიკის აპარატი ფართოდ გამოიყენება თანამედროვე თეორიულ ფიზიკაში – ფარდობითობის თეორიაში და ქვანტურ მექანიკაში.

ანალიზური მექანიკა იძლევა ზოგად მეთოდებს, რომელთა დახმარებითაც შესაძლებელია დიფერენციალური განტოლებების შედგენა სხვადასხვა სისტემებისათვის და ამ მეთოდების დახმარებით სრულად ამოვხსნათ ამოცანები ამ სისტემების მოძრაოობაზე ან წონასწორობაზე. აქვე აღვნიშავთ, რომ მექანიკის ყველაზე რთული და ზოგადი ამოცანები გამოიკვლევა და ამოიხსნება ანალიზური მექანიკის მეთოდებით.

ავტორების წინაშე იდგა მეტად რთული ამოცანა. აუარებელი საკითხებიდან უნდა შერჩეულიყო მხოლოდ ისეთი საკითხები, რომლებიც ამ საგნის პირველად გაცნობისათვის მართლაც იქნებოდა აუციულებელი და არსებითი. ამას გარდა თუ როგორ უნდა დალაგებულიყო თეორიული მასალა, რა მიმდევრობით, ესაც სამსჯელო და საფიქრალი იყო, რადგან თვით გადმოცემის წესი მრავალგვარია და მრავალნაირია.

წიგნში მოყვანილი საიულისტრაციო ამოცანებიც და მაგალითებიც ისეა შერჩეული, რომ მათი ამოხსნა მოითხოვს მხოლოდ ტექსტში ნათქვამის უშუალო გამოყენებას. მათი დანიშნულებაა – დამტკიცებული დებულებების და ფორმულების შინაარსის კონკრეტული გაშუქება.

თავი I. ანალიზური მექანიკის ძირითადი ცნებები

§1. ნივთიერ წერტილთა მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები

ნივთიერ წერტილთა ერთობლიობას ეწოდება სისტემა, თუ მასში შემავალი ყველა წერტილი ურთიერთდამოკიდებულია, ე.ი. ყოველი წერტილის მდებარეობის შეცვლა აისახება ყველა დანარჩენ წერტილზე. სისტემის წერტილთა შორის არსებობს ურთიერთქმედების ძალები.

ვთქვათ, ნივთიერ წერტილთა სისტემა შედგება *n* წერტილისაგან. დეკარტეს საკოორდინატო სისტემაში ნებისმიერი i-ური წერტილის კოორდინატები იქნება $M_i(x_i,y_i,z_i)$. სისტემაზე მოქმედი ძალები იყოფა გარე და შიდა ძალებად. სისტემის წერტილებზე მოქმედ ძალებს ეწოდება გარე ძალები, თუ ისინი გამოწვეულია მოცემულ სისტემაზე სხვა სისტემის მოქმედებით. სისტემის წერტილთა ურთიერთქმედების ძალებს ეწოდება შიდა ძალები. აღინიშნება გარე ძალები $\vec{F}^{(გ)}$ და შიდა ძალები $\vec{F}^{(შ)}$.

წერტილთა სისტემის მოძრაობის განტოლებები ვექტორული ფორმით იქნება

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i^{(გ)} + \vec{F}^{(შ)}, \quad (i=1,2,...,n) \qquad (1.1)$$

სადაც m_i არის M_i წერტილის მასა, ხოლო $\vec{w}_i$ – აჩქარება. თუ $\vec{F}$ ძალის გეგმილებს საკოორდინატო ღერძებზე აღვნიშნავთ $\vec{F}\left(X,Y,Z\right)$ და (1.1) განტოლებებს ჩავწერთ გეგმილებში, მივიღებთ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i^{(გ)} + X_i^{(შ)},$$
$$m_i \ddot{y}_i = Y_i^{(გ)} + Y_i^{(შ)}, \qquad (1.2)$$
$$m_i \ddot{z}_i = Z_i^{(გ)} + Z_i^{(შ)}, \quad (i=1,2,...,n)$$

სადაც $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ წერტილის კოორდინატების მეორე რიგის წარმოებულებია დროით და წარმოადგენენ აჩქარების ვექტორის გეგმილებს საკოორდინატო ღერძებზე.

თუ სისტემა შედგება n წერტილისაგან, მისი მოძრაობა აღიწერება 3n რაოდენობის მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებებით.

§2. თავისუფალი და არათავისუფალი სისტემები. ბმები და მათი კლასიფიკაცია

პირობებს, რომელიც ზღუდავს სისტემის გადაადგილებებსა და სიჩქარეებს, ბმები ეწოდება. ბმა შეიძლება გამოსახოს ძალით, რომელსაც რეაქციის ძალა ეწოდება. სისტემაზე მოქმედი ძალები შეიძლება დავყოთ აქტიურ და რეაქციის ძალებად. მაშინ სისტემის მოძრაობის განტოლებები ასე ჩაიწერება:

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \quad (i=1,2,...,n) \qquad (2.1)$$

სადაც $\vec{F}_i$ სისტემის M_i წერტილზე მოქმედი აქტიური ძალების ტოლქმედია, ხოლო $\vec{R}_i$ – რეაქციის ძალების. (2.1.) განტოლებები გეგმილებში ასე ჩაიწერება:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + R_{xi},$$

$$m_i\ddot{y}_i = Y_i + R_{yi},\qquad (2.2)$$

$$m_i\ddot{z}_i = Z_i + R_{zi}.\qquad (i=1,2,...,n)$$

თუ ნივთიერ წერტილთა სისტემა ემორჩილება ერთ ბმას, მაშინ ანალიზურად ეს შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$f(x_1,y_1,z_1,...,x_n,y_n,z_n,\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,...,\dot{x}_n,\dot{y}_n,\dot{z}_n,t)\le 0\ .\qquad (2.3)$$

აქ $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$-ით აღინიშნება კოორდინატების დროით წარმოებულები, ანუ სიჩქარის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე.

თუ ბმა გამოისახება ტოლობით, მაშინ მას ეწოდება დამჭერი, ანუ ორმხრივი. თუ ბმა უტოლობითაა გამოსახული, მას ეწოდება ცალმხრივი ანუ არადამჭერი. შემდგომში განვიხილავთ მხოლოდ ორმხრივ ბმებს.

თუ ბმის განტოლებაში დრო ცხადად არ მონაწილეობს, მაშინ ასეთ ბმას ეწოდება სტაციონარული.

$$f(x_i, y_i, z_i)=0\ \ (i=1,2,...,n)\qquad (2.4)$$

ბმას, რომლის განტოლებაშიც t დრო ცხადად მონაწილეობს, ეწოდება არასტაციონარული, ანუ რეონომული.

$$f(x_i, y_i, z_i;\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t)=0\ .\qquad (2.5)$$

ასეთ ბმას ეწოდება აგრეთვე კინემატიკური.

თუ ბმის განტოლება არ შეიცავს კოორდინატების წარმოებულებს დროით, ანუ სიჩქარეებს, მაშინ მას ეწოდება გეომეტრიული, ანუ ჰოლონომური.

$$f(x_i, y_i, z_i;t) = 0\qquad (2.6)$$

თუ კინემატიკური ბმის განტოლება (2.5) ინტეგრებით არ დაიყვანება (2.6) განტოლებაზე, რომელიც არ შეიცავს კოორდინატების წარმოებულებს, მაშინ ასეთ ბმებს ეწოდება არაჰოლონომური, ანუ არაინტეგრებადი. დავუშვათ, ბმის განტოლებას აქვს სახე:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i\dot{x}_i + y_i\dot{y}_i + z_i\dot{z}_i) = 0\ .$$

ინტეგრებით მივიღებთ

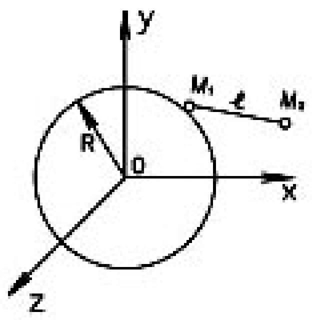
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = c,$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია. ე.ი. ბმა გეომეტრიულია.

თუ ნივთიერ წერტილთა სისტემა ემორჩილება ჰოლონომურ ბმებს, მაშინ მას ეწოდება ჰოლონომური. სისტემას ეწოდება არაჰოლონომური, თუ ის ემორჩილება არაჰოლონომურ ბმებს.

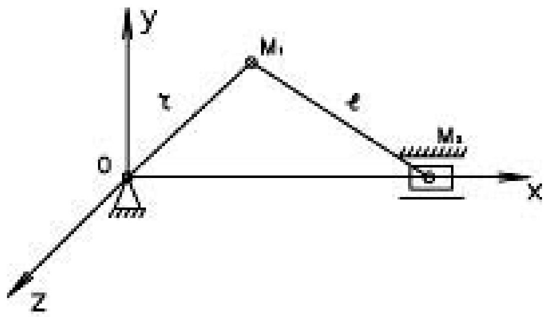
მაგალითები:

M_1 წერტილი მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში R-რადიუსიან წრეწირზე. ამ წერტილზე ხისტი ღეროთი მიმაგრებულია M_2 წერტილი(ნახ.1). აღვნიშნოთ M_1 წერტილის კოორდინატები x_1,y_1,z_1-ით, ხოლო M_2-ს x_2 , y_2 , z_2-ით, მაშინ ბმის განტოლებები იქნება



ნახ. 1

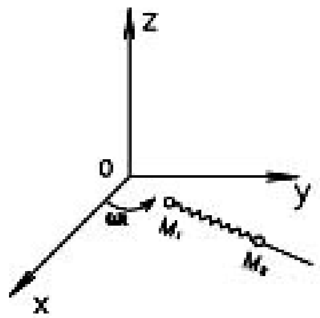
$$z_1 = 0\ ,$$
$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0\ ,$$
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - \ell^2 = 0\ .$$



ნახ. 2

2 ნახაზზე ნაჩვენები მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის M_1 და M_2, წერტილებისათვის ბმების განტოლება იქნება

$$z_1=0,\ \ z_2=0,\ y_2=0\ ;$$
$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2=0\ ,$$
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - \ell^2=0\ .$$



ნახ. 3

ღერო ბრუნავს ვერტიკალური z ღერძის ირგვლივ მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. ღეროს გასწვრივ თავისუფლად გადაადგილდება ერთმანეთთან ზამბარით დაკავშირებული

ორი ნივთიერი წერტილი M_1 და M_2 (ნახ. 3). . ამ შემთხვევაში ბმები იქნება რეონომული, ანუ არასტაციონარული, ვინაიდან ბმების განტოლებაში მონაწილეობს *t* დრო.

$$z_1=0,\ z_2=0,$$

$$x_1 \sin\omega t - y_1\cos\omega t=0\ ,$$

$$x_2\sin\omega t - y_2\cos\omega t=0.$$

§3. სისტემის თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებული კოორდინატები

დამოუკიდებელი პარამეტრების რაოდენობას, რომელიც განსაზღვრავს სისტემის მდებარეობას დროის ყოველ მომენტში, ეწოდება სისტემის თავისუფლების ხარისხი. მაგალითად, თუ წერტილი მოძრაობს სივრცეში, მისი მდებარეობა დროის ყოველ მომენტში შეიძლება განისაზღვროს ამ წერტილის x,y,z კოორდინატებით. ამიტომ თავისუფების ხარისხი ამ შემთხვევაში იქნება სამის ტოლი. თუ მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო, მაშინ მის მდებარეობას განსაზღვრავს მობრუნების კუთხე და თავისუფლების ხარისხი იქნება ერთის ტოლი. თუ მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი ცენტრის გარშემო, მაშინ მისი მდებარეობის განსაზღვრისათვის განიხილავენ ეილერის კუთხეებს, რომელთა რიცხვიც სამის ტოლია. ამიტომ ამ შემთხვევაში თავისუფლების ხარისხი სამის ტოლია. თუ სისტემა ემორჩილება ბმებს, მაშინ ყოველი ბმა ერთით ამცირებს თავისუფლების ხარისხს.

ვთქვათ, n ნივთიერ წერტილთა სისტემა ემორჩილება *k* გეომეტრიულ ბმას, მაშინ ცხადია, სისტემის 3n კოორდინატიდან დამოუკიდებელი იქნება $S=3n-k$ კოორდინატი. ამ კოორდინატებს შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი მნიშვნელობა. ეს რიცხვი ტოლია სისტემის თავისუფლების ხარისხისა.

განზოგადებული კოორდინატები ეწოდება ნებისმიერი განზომილების დამოუკიდებელ პარამეტრებს, რომელთა რიცხვი ტოლია სისტემის თავისუფლების ხარისხისა. განზოგადებული კოორდინატები ავღნიშნოთ q-თი. სისტემის მდებარეობა განისაზღვრება განზოგადებული კოორდინატებით

$$q_1, q_2,\ldots,q_s$$

სისტემის მოძრაობისას განზოგადებული კოორდინატები იცვლება დროის მიხედვით. მოძრაობის კანონი განისაზღვრება განტოლებებით

$$q_1 = f_1(t),\ q_2 = f_2(t),\ \ldots,\ q_s = f_s(t),$$

ეს განტოლებები წარმოადგენს სისტემის მოძრაობის კინემატიკურ განტოლებებს განზოგადებულ კოორდინატებში.

განზოგადებული კორდინატების დროით წარმოებულებს ეწოდება განზოგადებული სიჩქარეები და აღინიშნება ასე:

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_s,$$

განზოგადებული სიჩქარის განზომილება დამოკიდებულია განზოგადებული კოორდინატის განზომილებაზე. თუ q წრფივი სიდიდეა, მაშინ $\dot{q}$ წრფივი სიჩქარეა. თუ q წარმოადგენს კუთხეს, მაშინ $\dot{q}$ კუთხური სიჩქარეა. თუ q არის ფართობი, მაშინ $\dot{q}$ ფართობული სიჩქარეა და ა.შ.

§4. კოორდინატების ვარიაცია

ვთქვათ, მექანიკურ სისტემას აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი და სისტემის მდებარეობა განისაზღვრება კოორდინატებით

$$q = f(t)$$

ამ ტოლობის დიფერენცირებით მივიღებთ

$$dq = f'(t)dt$$

განზოგადებული კოორდინატის დიფერენციალი dq შეესაბამება ამ კოორდინატის ცვლილებას, რომელიც გამოწვეულია t დროის ცვლილებით, ე.ი. შეესაბამება სისტემის ნამდვილ გადაადგილებას.

მივანიჭოთ $q = f(t)$ ფუნქციას t არგუმენტის ფიქსირებული მნიშვნელობისთვის ნებისმიერი ნაზრდი, რომელიც აღვნიშნოთ δq-თი:

$$\delta q = \varepsilon\varphi(t)$$

სადაც ε ნებისმიერი მცირე რიცხვია, ხოლო $\varphi(t)$ – ნებისმიერი წარმოებადი ფუნქცია. მივიღებთ ფუნქციათა ოჯახს

$$q_1 = f(t) + \varepsilon\varphi(t)$$

გრაფიკულად q_1 წარმოადგენს q წირიდან უსასრულოდ მცირედ დაშორებულ წირს. $q_1(t)$-$q(t)$ სხვაობას ერთი და იმავე არგუმენტებისათვის ეწოდება ფუნქციის იზოქრონული, ანუ სინქრონული ვარიაცია და აღინიშნება δq –თი

$$\delta q = q_1(t) - q(t) = \varepsilon\varphi(t) \qquad (4.1)$$

თუ ფუნქციის მნიშვნელობის ცვლილება დამოკიდებულია, როგორც არგუმენტის ცვლილებაზე, ასევე თვით ფუნქციის ცვლილებაზეც, მაშინ ასეთ ვარიაციას სრულ ანდა ასინქრონულ ვარიაციას უწოდებენ. აღვნიშნოთ სრული ვარიაცია Δq-თი.

$$\Delta q = q_1(t+\Delta t) - q(t) = [q_1(t+\Delta t) - q(t+\Delta t)] + [q(t+\Delta t) - q(t)]$$

ვინაიდან

$$q_1(t+\Delta t) - q(t+\Delta t) = \delta q$$

$$q(t+\Delta t) - q(t) = q\Delta t$$

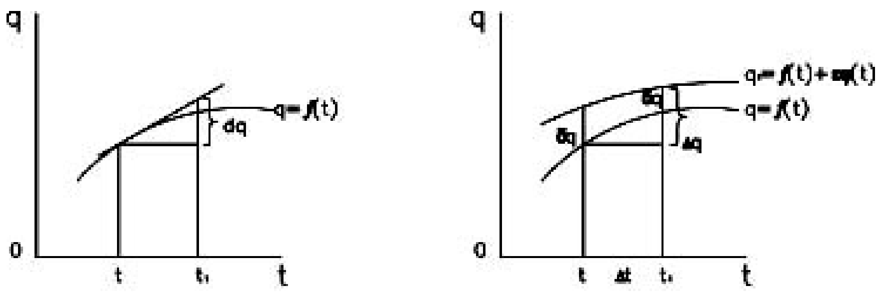
სრული ვარიაციისათვის მივიღებთ

$$\Delta q = \delta q + q\Delta t \qquad (4.2)$$

ფუნქციის ცვლილება Δq შედგება ორი ნაწილისაგან: 1) სინქრონული ვარიაცია δq და 2) $q\Delta t$ – ფუნქციის ცვლილება t არგუმენტის Δt-თი ცვლილებისას.

იზოქრონული ვარიაცია და გაწარმოება არის კომუტატური (გადასმადი), ე.ი. ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$\frac{d}{dt}(\delta q) = \delta \frac{dq}{dt}$$



ნახ. 4

ანუ დიფერენცირების და ვარირების ოპერაციების თანმიმდევრობა შეიძლება შეიცვალოს წესით $d\delta = \delta d$. მართლაც, თუ გავაწარმოებთ (4.1), მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}(\delta q) = \dot{q}\,(t) - \dot{q}(t)$$

იზოქრონული ვარიაციის (4.1.) განსაზღვრიდან გამომდინარეობს

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)\delta = \dot{q}\,(t) - \dot{q}(t)$$

ამ ორი ტოლობის შედარებით ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt}(\delta q) = \delta\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

ვაჩვენოთ, რომ სრული ვარიაცია არ არის კომუტატური

$$\frac{d}{dt}(\delta q) \neq \Delta\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

(4.2.)-ის გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}\Delta q = \delta\dot{q} + \ddot{q}\Delta t + \dot{q}\frac{d\Delta t}{dt}$$

(4.1.)-ის თანახმად q ფუნქციის ვარიაცია იქნება

$$\Delta\,\dot{q} = \delta\,\dot{q} + \ddot{q}\,\Delta\,t$$

ამიტომ

$$\frac{d\Delta q}{dt} = \Delta\dot{q} + \dot{q}\frac{d\Delta t}{dt}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ საზოგადოდ $\frac{d\Delta q}{dt} \neq \Delta \frac{dq}{dt}$ ტოლობას შეიძლება ჰქონდეს ადგილი, როდესაც $\frac{d\Delta t}{dt} = 0$, ე.ი. ვარიაცია სინქრონულია.

§5. ნამდვილი, შესაძლო და ვირტუალური გადაადგილებები. ვირტუალური მუშაობა. იდეალური ბმები

ვთქვათ, ნივთიერი წერტილი ემორჩილება ბმას, რომლის განტოლებაც ასე ჩაიწერება:

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{5.1}$$

ვთქვათ, წერტილზე მოქმდი ძალებით გამოწვეული მოძრაობის განტოლებებია

$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t) \tag{5.2}$$

(5.2)-ის (5.1.)-ში ჩასმით მივიღებთ იგივეობას

$$f[x(t), y(t), z(t); t] = 0$$

თუ ამ იგივეობას გავაწარმოებთ დროით, მივიღებთ

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{5.3}$$

აღვნიშნოთ წერტილის სიჩქარე $\vec{V}$ -თი. ნივთიერი წერტილის ნამდვილი გადაადგილება ეწოდება ვექტორს

$$d\vec{r} = \vec{V}dt \tag{5.4}$$

ამ ვექტორის კოორდინატები $dx=\dot{x}\,dt$, $dy=\dot{y}\,dt$, $dz=\dot{z}\,dt$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0\,, \tag{5.5}$$

რომელიც მიიღება (5.3)-დან dt-ზე გამრავლებით. მაგრამ (5.5) განტოლება შეიძლება დააკმაყოფილოს dx,dy,dz სიდიდეების სხვა ერთობლიობამაც ნებისმიერი $d\ \vec{z} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ ვექტორს, რომლის კომპონენტებიც აკმაყოფილებენ (5.5) განტოლებას, ეწოდება შესაძლო გადაადგილების ვექტორი. შესაძლო გადაადგილება ეწოდება დროის უსასრულოდ მცირე dt შუალედში შესრულებულ $d\vec{r}$ გადაადგილებას, რომელიც თავსებადია ბმასთან. ნამდვილი გადაადგილება წარმოადგენს ერთერთ შესაძლო გადაადგილებას, რომელიც განხორციელებულია მოცემული ძალებით და მოცემული საწყისი პირობებით.

სისტემის წერტილთა შესაძლო გადაადგილება ეწოდება ვექტორს

$$d\vec{r} = dx_i\vec{i} + dy_i\vec{j} + dz_i\vec{k}\,, \quad (i=1,2,...,n). \tag{5.6}$$

ვთქვათ, ნივთიერ წერტილთა სისტემა ემორჩილება ბმებს

$$f_{\alpha}(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n; t) = 0, \ \ (\alpha=1,2,...,k)\ . \tag{5.7}$$

ცხადია, $d\vec{r}\,(dx_i+dy_i+dz_i)$ ვექტორის კომპონენტები აკმაყოფილებენ განტოლებათა სისტემას

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}dz_i\right)+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt=0\,,\quad (\alpha=1,2,\ldots,k)\,. \tag{5.8}$$

განვიხილოთ დროის იგივე მომენტისათვის და სისტემის იმავე მდებარეობისათვის სხვა შესაძლო გადაადგილება

$$d\vec{r}_i=d'x_i\vec{i}+d'y_i\vec{j}+d'z_i\vec{k}\,. \tag{5.9}$$

$d\vec{r}_i$ გადაადგილების კომპონენტები დააკმაყოფილებენ განტოლებებს

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}d'x_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}d'y_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}d'z_i\right)+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt=0\,, \tag{5.10}$$

მაშინ $d\vec{r}_i=d'\vec{r}_i-d\vec{r}_i=(d'x_i-dx_i,\ d'y_i-dy_i,\ d'z_i-dz_i)$ დააკმაყოფილებს განტოლებას, რომე-ლიც მიიღება (5.10)-დან (5.8)-ს გამოკლებით

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0\,,\ (\alpha=1,2,\ldots,k)\,. \tag{5.11}$$

სხვაობას $\delta\vec{z}_i=d'\vec{r}_i-d\vec{r}_i$ ეწოდება ვირტუალური გადაადგილების ვექტორი. ვირტუალური გადაადგილების δx_i ,δy_i ,δz_i კომპონენტები აკმაყოფილებს (5.11) სისტემას. ეს სისტემა არ შეიცავს $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt$ შესაკრებებს. $\delta\vec{r}$ წარმოადგენს უსასრულოდ მცირე ვექტორს, რომელიც ბმის დაურღვევლად გადაიყვანს წერტილს ერთი მდებარეობიდან უსასრულოდ მცირედ დაშორებულ მეორე მდებარეობაში დროის იმავე მომენტისათვის. $\delta\vec{r}$ ვექტორს ეწოდება $\vec{r}$ ვექტორის ვარიაცია, ხოლო δx_i ,δy_i ,δz_i გეგმილებს – კოორდინატების ვარიაცია. (5.8) განტოლების თანახმად, სტაციონარული ბმების შემთხვევაში ნამდვილი გადაადგილების კომპონენტები დააკმაყოფილებენ განტოლებას

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}dz_i\right)=0\,,\quad (\alpha=1,2,\ldots,k)\,. \tag{5.12}$$

თუ შევადარებთ (5.11) და (5.12) სისტემებს, დავასკვნით, რომ სტაციონარული ბმების შემთხვევაში შესაძლო გადაადგილება ემთხვევა ერთერთ ვირტუალურ გადაადგილებას.
n წერტილისაგან შედგენილი სისტემა შეიცავს კოორდინატთა 3n ვარიაციას. ეს ვარიაციები არ არის დამოუკიდებელი. თუ სისტემა ემორჩილება k ბმას, მაშინ დამოუკიდებელ ვარიაციათა რაოდენობა იქნება $S=3n-k$.

ვთქვათ, სისტემის წერტილებზე მოქმედი ძალებია $\vec{F}_1, \vec{F}_2,\ldots \vec{F}_n$, ხოლო ამ წერტილების ვირტუალური გადაადგილებებია $\delta\vec{r}_1$, $\delta\vec{r}_2,\ldots$,$\delta\vec{r}_n$ ვირტუალური მუშაობა ეწოდება ამ ძალების მიერ შესრულებულ მუშაობას ვირტუალურ გადაადგილებებზე

$$\delta A=\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i \qquad (5.13)$$

ანუ

$$\delta A=\sum_{i=1}^{n} (X_i\, \delta x_i+Y_i\, \delta y_i+Z_i\, \delta z_i), \qquad (5.14)$$

სადაც (X_i, Y_i , Z_i) $\vec{F}_i$ ძალის გეგმილებია.
იდეალური ბმები ეწოდება ისეთ ორმხრივ, ანუ დამჭერ ბმებს, როდესაც რეაქციის ძალების მიერ შესრულებულ მუშაობათა ჯამი ნებისმიერ ვირტუალურ გადაადგილებაზე ნულის ტოლია.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \delta \vec{r}_I = 0. \qquad (5.15)$$

$\vec{R}_i$ არის სისტემის M_i წერტილზე მოდებული რეაქციის ძალა.
(2.15) პირობა ჩავწეროთ გეგმილებში:

$$\sum_{i=1}^{n} (R_{x\,i}\delta x_i+R_{yi}\, \delta y_i+R_{z\,i}\delta zi) = 0 \qquad (5.16)$$

კოორდინატთა ვარიაციები აკმაყოფილებს (5.11) განტოლებებს. თუ ამ სისტემის თითოეულ განტოლებას გავამრავლებთ ლაგრანჟის განუსაზღვრელ მამრავლებზე $\lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_k$, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_\alpha \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i \right) = 0, \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ .\ .\ .,\ k)$$

მიღებული გამოსახულებები შევკრიბოთ

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\delta x_i \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + \delta y_i \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} + \delta z_i \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \right] = 0. \qquad (5.17)$$

გამოვაკლოთ (2.16)-ს (2.17), მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\delta x_i \left(Rx_i - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right) + \delta y_i \left(Ry_i - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \right) + \delta z_i \left(Rz_i - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \right) \right] = 0 \ . \qquad (5.18)$$

სისტემა ემორჩილება k ბმას. დამოუკიდებელ ვარიაციათა რაოდენობა S=3n-k ლაგრანჟის მამრავლები λ_1, λ_2,... λ_k ისე შევარჩიოთ, რომ k ვარიაციებთან მდგომი კოეფიციენტები იყოს ნულის ტოლი. დარჩენილი S=3n-k ვარიცია დამოუკიდებელია, ამიტომ მათი კოეფიციენტებიც უნდა იყოს ნულის ტოლი. მივიღებთ

$$Rx_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}, \quad Ry_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}, \qquad Rz_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}. \qquad (5.19)$$

§6. განზოგადებული ძალები

ვინაიდან განზოგადებული კოორდინატები დამოუკიდებელი ცვლადებია, მათი გეომეტრიული ნაზრდები, ანუ ვარიაციებიც იქნება დამოუკიდებელი.

გამოვთვალოთ სისტემაზე მოქმედი აქტიური $\vec{F}_i$ ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა ვირტუალურ გადაადგილებებზე

$$\delta A=\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i \ . \tag{6.1}$$

გამოვსახოთ რადიუს-ვექტორის $\delta\vec{r}_i$ ვარიაცია განზოგადებული კოორდინატების ვარიაციებით

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \ , \tag{6.2}$$

სადაც (i=1,2,...,n).

(6.2)-ის გათვალისწინებით (6.1)-დან მივიღებთ

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \tag{6.3}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad (j=1,\ 2,...,\ s). \tag{6.4}$$

q_j განზოგადებული კოორდინატის δq_j ვარიაციასთან მდგომ Q_j მამრავლს ეწოდება განზოგადებული ძალა. (3.3.) ტოლობა ასე გადაიწერება

$$\delta A=\sum_{i=1}^{s} Q_j \delta q_j = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_s \delta q_s \ . \tag{6.5}$$

(6.4)-დან განზოგადებული ძალა გეგმილებში ასე ჩაიწერება

$$Qj = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \tag{6.4'}$$

განზოგადებული ძალა Q_j საზოგადოდ არ წარმოადგენს ძალას ჩვეულებრივი გაგებით. მისი განზომილება დამოკიდებულია განზოგადებული კოორდინატის განზომილებაზე. განზოგადებული ძალის განზომილება მუშაობის განზომილებისა და განზოგადებული კოორდინატის განზომილების შეფარდებაა

$$[Q_j] = \frac{[A]}{[q]}$$

თუ განზოგადებული კოორდინატი წრფივი სიდიდეა, მაშინ Q წარმოადგენს ძალას ჩვეულებრივი გაგებით. თუ განზოგადებული კოორდინატი წარმოადგენს კუთხეს, მაშინ განზოგადებული ძალის განზომილება ემთხვევა მომენტის განზომილებას. თუ q მოცულობაა, მაშინ Q-ს განზომილება ემთხვევა წნევის განზომილებას.

თავი II. მექანიკის პრინციპები. დინამიკის ზოგადი განტოლება.
§7. ვირტუალურ გადაადგილებათა პრინციპი

სისტემის მოძაობის განტოლებას ვექტორული ფორმით აქვს სახე

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \qquad (i=1,2,...,n) \tag{7.1}$$

სადაც $\vec{F}_i$ სისტემის წერტილებზე მოქმედი აქტიური ძალებია, $\vec{R}_i$ – რეაქციის ძალები. სისტემის წონასწორობისას, ცხადია, $\vec{w}_i=0$, ე.ი. $\vec{F}_i+\vec{R}_i=0$ ვირტუალურ გადაადგილებათა პრინციპი ასე ჩამოყალიბდება:

იმისათვის, რომ სისტემა იდეალური დამჭერი ბმებით იყოს წონასწორობაში, აუცილებელი და საკმარისია აქტიური ძალების მიერ შესრულებული ვირტუალურ მუშა-ობათა ჯამი იყოს ნულის ტოლი.

აუცილებლობა. ვთქვათ, სისტემა წონასწორობაშია. მაშინ სრულდება $\vec{F}_i+\vec{R}_i=0$ პირობა. გავამრავლოთ ეს ტოლობა ვირტუალური გადაადგილების $\delta\vec{r}_i$ ვექტორზე სკალარულად

$$(\vec{F}_i + \vec{R}_i)\,\delta\vec{r}_i=0, \quad (i=1,2,...n)\,.$$

მიღებული განტოლებები შევკრიბოთ

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i + \vec{R}_i)\,\delta\vec{r}_i=0$$

ანუ

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i\,\delta\vec{r}_i=0.$$

ვინაიდან ბმები იდეალურია $\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{R}_I\,\delta\vec{r}_i=0$, ვღებულობთ

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i =0.$$

საკმარისობა. ვთქვათ, შესრულებულია პირობები

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i=0, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i\,\delta\vec{r}_i=0.$$

ამ ტოლობების შეკრებით მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i + \vec{R}_i)\,\delta\vec{r}_I = 0.$$

ვთქვათ, სისტემა არ არის წონასწორობაში. ვინაიდან ბმები იდეალურია, $\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i\delta\vec{r}_i=0$.

აქტიური ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა ტოლია კინეტიკური ენერგიის, რომელიც ყოველთვის დადებითია, ამიტომ

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\delta\vec{r}_i>0$$

რაც ეწინააღმდეგება მოცემულ პირობას. ე.ი. სისტემა წონასწორობაშია.

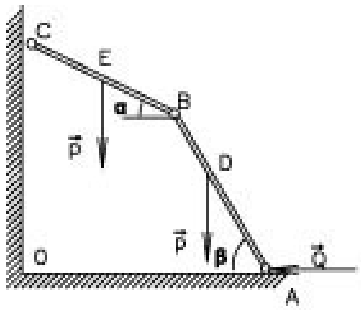
მაგალითი. ორი ტოლი ღერო ერთმანეთთან შეერთებულია სახსრულად. თითოეულის სიგრძე არის ℓ და წონა P. C ბოლო მიმაგრებულია კედელთან სახსრულად, ხოლო A ბოლო ეყრდნობა გლუვ იატაკს (ნახ.5). როგორი Q ძალა უნდა მოვდოთ A ბოლოზე ჰორიზონტალურად იმისათვის, რომ სისტემა იყოს წონასწორობაში.

ძალების მოდების წერტილების კოორდინატებია

$$y_e=\ell\sin\beta+\ell\sin\alpha$$

$$y_D=\ell\sin\beta$$

$$x_A=\ell\cos\beta+\cos\alpha$$



ნახ. 5

კოორდინატების ვარიაციები იქნება

$$\delta y_E=l\cos\beta\delta\beta+\frac{l}{2}\cos\alpha\delta\alpha,$$

$$\delta y_D=\frac{l}{2}\cos\beta\delta\beta,$$

$$\delta y_E=-l\sin\beta\delta\beta-l\sin\alpha\delta\alpha$$

შევადგინოთ განტოლება

$$-P\delta y_E-P\delta y_D-Q\delta x_A=0,$$

$$P\left(\frac{3}{2}\cos\beta\delta\beta+\frac{1}{2}\cos\alpha\delta\alpha\right)-Q\left(\sin\beta\delta\beta+\sin\alpha\delta\alpha\right)=0$$

მოცემული სისტემის თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია. ვიპოვოთ დამოკიდებულება $\delta\alpha$ вდა $\delta\beta$ ვარიაციებს შორის.

$$OC = l\sin\alpha + l\sin\beta,$$
$$0 = \delta OC = l\cos\alpha\delta\alpha + l\cos\beta\delta\beta,$$
$$\delta\beta = -\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\delta\alpha,$$
$$P\left(-\frac{3}{2}\cos\alpha\delta\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\delta\alpha\right) - Q\left(-\sin\beta\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\delta\alpha + \sin\alpha\delta\alpha\right) = 0,$$
$$Q = \frac{P}{tg\beta - tg\alpha}.$$

§8. წონასწორობის პირობები განზოგადებულ კოორდინატებში

სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია აქტიური ძალების ვირტუალური მუშაობა იყოს ნულის ტოლი $\delta A = 0$,
ანუ

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_n\delta q_n = 0.$$

ვინაიდან განზოგადებული კოორდინატები დამოუკიდებელი სიდიდეებია, მათი ვარიაციებიც იქნება დამოუკიდე-ბელი. განვიხილოთ გადაადგილება, სადაც

$$\delta q_1 = \delta q_2 = \cdots = \delta q_{j-1} = \delta q_{j+1} = \cdots = \delta q_s = 0; \quad \delta q_s \neq 0$$

მაშინ გვექნება $Q_j\delta q_j = 0$

ვინაიდან $\delta q_j \neq 0$, ვღებულობთ $Q_j = 0$

ანალოგიურ განტოლებებს მივიღებთ ნებისმიერი j=1,2,…,s-სთვის. ამრიგად,

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, ..., Q_s = 0$$

იდეალური, ჰოლონომიური, სტაციონარული ბმების შემთხვევაში სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია ყველა განზოგადებული ძალა იყოს ნულის ტოლი.

§9. დალამბერის პრინციპი

დინამიკის ზოგადი განტოლება სისტემის ნებისმიერი წერტილისათვის ასე ჩაიწერება

$$m_i\vec{w}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \qquad (i=1,2,...,n) \tag{9.1}$$

ეს განტოლება ასეთი ფორმით შეიძლება ჩაიწეროს

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0, \ (i = 1, 2, ..., n) \tag{9.2}$$

სადაც $\vec{\Phi}_i = -m_i\vec{w}_i$ წარმოადგენს ინერციის ძალას. (9.2) განტოლებების შეკრებით მივიღებთ

$$\sum_{i=}^{n}\vec{F}_i+\sum_{i=}^{n}\vec{R}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{\phi}\;=0\quad, \tag{9.3}$$

სადაც $\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ არის აქტიური ძალების ნაკრები ვექტორი, $\vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i$ – რეაქციის ძალების ნაკრები ვექტორი და $\vec{\Phi}=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i$ – ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორი. (9.3)-დან ვღებულობთ

$$\vec{F}+\vec{R}+\vec{\Phi}=0\quad. \tag{9.4}$$

დროის ყოველ მომენტში სისტემაზე მოქმედი აქტიური ძალების, რეაქციის ძალებისა და ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორების ჯამი ნულის ტოლია.

ავირჩიოთ ნებისმიერად 0 პოლუსი და შევაერთოთ ეს წერტილი სისტემის ყოველ M_i წერტლთან $\vec{r}_i$ რადიუს-ვექტორით, გავამრავლოთ (9.2) განტოლება მარცხნიდან ვექტორულად $\vec{r}_i$ რადიუს-ვექტორზე და შევკრიბოთ მიღებული ტოლობები.

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{R}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{\Phi}_i=0 \tag{9.5}$$

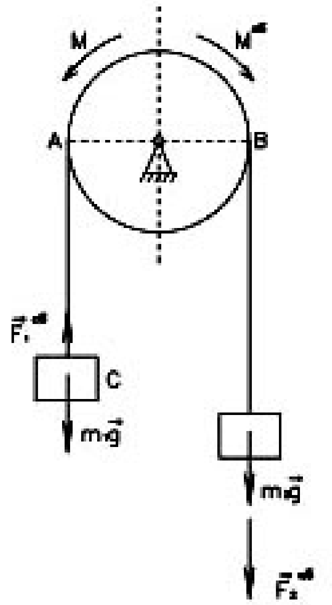
პირველი ჯამი წარმოადგენს აქტიური ძალების ნაკრებ მომენტს ცენტრის მიმართ, მეორე – რეაქციის ძალების ნაკრებ მომენტს და მესამე ინერციის ძალების ნაკრებ მომენტს.

$$\vec{M}_o^F+\vec{M}_o^R+\vec{M}_o^\Phi=0\,. \tag{9.6}$$

დროის ყოველ მომენტში მოძრავ სისტემაზე მოქმედი აქტიური, რეაქციის და ინერციის ძალების ნაკრები მომენტების ჯამი ნულის ტოლია.

მაგალითი. R რადიუსიან ერთგვაროვან შკივზე მოქმედებს მაბრუნებელი მომენტი M. ტვირთების მასებია m_1 და m_2, შკივის მასა m_3. განვსაზღვროთ შკივის კუთხური აჩქარება. ტვირთების აჩქარებები ტოლია (ნახ. 6).

ამოცანა ამოვხსნათ დალამბერის პრინციპის გამოყენებით. ტვირთებზე მოვდოთ აჩქარების საწინააღმდეგოდ მიმართული ინერციის ძალები $\Phi_1=m_1w$ და $\Phi_2=m_2w$, შკივზე კი ინერციის ძალების მომენტი $m=I_0\varepsilon$, სადაც $I_0=\dfrac{m_3R^2}{2}$ არის შკივის ინერციის მომენტი, ხოლო ε შკივის კუთხური აჩქარებაა. გავუტოლოთ ნულს აქტიური და ინერციის ძალების მომენტების ჯამი.



ნახ. 6

$$m_1gR + M - \Phi_1R - M^i - m_2gR - \Phi_2R = 0$$

$$M - (m_2 - m_1)gR - (m_1 + m_2)wR - \frac{m_3R^2}{2}\varepsilon = 0$$

$$w = R\varepsilon$$

$$M - (m_2 - m_1)gR = (m_1 + m_2)R^2\varepsilon - \frac{m_3R^2}{2}\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{M - (m_2 - m_1)gR}{R^2\left(m_1 + m_2 + 0{,}5m_3\right)}.$$

§10. დინამიკის ზოგადი განტოლება

ვთქვათ, n ნივთიერ წერტილთა სისტემა ემორჩილება იდეალურ, ჰოლონომიურ ბმებს. სისტემის ნებისმიერი წერტილის მოძრაობის განტოლება

$$m\vec{w}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad \left(i = 1,2,...,n\right)$$

ჩავწეროთ ასეთი ფორმით

$$\vec{F}_i - m\vec{w}_i + \vec{R}_i = 0\,, \ \left(i = 1,2,...,n\right). \qquad (10.1)$$

მივანიჭოთ სისტემის წერტილებს $\delta\vec{r}_i$ ვირტუალური გადაადგილებები. გავამრავლოთ (10.1) განტოლებები $\delta\vec{r}_i$ გადაადგილებაზე სკალარულად და მიღებული განტოლებები შევკრიბოთ.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}-m_i\vec{\mathrm{w}}_i\right)\delta\vec{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i\delta\vec{r}_i=0$$

ვინაიდან ბმები იდეალურია $\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i\delta\vec{r}_i=0$, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i-m\,\vec{\mathrm{w}}_i\right)\delta\vec{r}_i=0 \qquad (10.2)$$

(10.2) განტოლებას ეწოდება დინამიკის ზოგადი განტოლება.

ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობისას იდეალური, დამჭერი ბმების შემთხვევაში ამ სისტემაზე მოქმედი აქტიური და ინერციის ძალების მუშაობის ჯამი ნებისმიერ ვირტუალურ გადაადგილებაზე ნულის ტოლია. თუ ბმები სტაციონარულია, მაშინ დინამიკის ზოგადი განტოლება წარმოადგენს შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპისა და დალამბერის პრინციპის შედეგს. დინამიკის ზოგადი განტოლება (10.2) გეგმილებში ასე ჩაიწერება

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-m_i\ddot{x}_i\right)\delta x_i+\left(Y_i-m_i\ddot{y}_i\right)\delta y_i+\left(Z_i-m_i\ddot{z}_i\right)\delta z_i\right]=0 \qquad (10.3)$$

მაგალითი. ამწე მექანიზმის კბილანა 2-ზე, რომლის წონაა P_2 და ინერციის რადიუსი ρ_2 მოდებულია მბრუნავი მომენტი *M*. დოლზე დახვეულია თოკი. დოლისა და მასთან მკვიდრად დამაგრებული კბილანა 1-ის წონაა P_1 და ინერციის რადიუსი ρ_1. კბილანების რადიუსებია r_1 და r_2, დოლის r . *A* ტვირთის წონა უდრის *Q*. განვსაზღვროთ *A* ტვირთის აჩქარება.

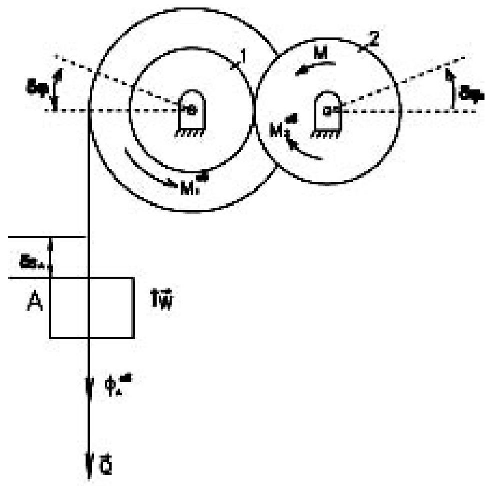
სისტემაზე მოქმედებს აქტიური ძალა *Q* და მბრუნავი მომენტი *M*. P_1და P_2 ძალები მუშაობას არ ასრულებენ, *A* ტვირთის ინერცის ძალა იქნება

$$\Phi_A=\frac{Q}{g}w_A$$

1 და 2 კბილანაზე მოქმედი ინერციის ძალები დაიყვანება წყვილძალებზე, რომელთა მომენტები იქნება

$$M_1=\frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1,\ M_2=\frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2.$$

მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება და შევად-
დგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება



ნახ. 7

$$-\left(Q+\Phi_A\right)\delta s_A - M_1\delta\varphi_1 + \left(M - M_1\right)\delta\varphi_2 = 0\,,$$

$$\delta s_A = r\delta\varphi_1, \frac{\delta\varphi_2}{\delta\varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}, \delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1.$$

$$Q\left(1+\frac{w_A}{g}\right)r + \frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1 + \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2\frac{r_1}{r_2} - M\frac{r_1}{r_2} = 0,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{w_A}{r}, \varepsilon_2 = \frac{r_1}{r_2}, \varepsilon_1 = \frac{r_1}{r_2}\frac{w_A}{r}, \qquad \text{б}$$

$$Qr + \frac{Qr}{g}w_A + \frac{P_1\rho_1^2}{gr}w_A + \frac{P_2\rho_2^2}{g}\frac{r_1^2}{r_2^2}w_A = M\frac{r_1}{r_2},$$

$$\mathrm{w}_A = \frac{M\frac{r_1}{r_2} - Qr}{Qr + \frac{P_1\rho_1^2}{r} + \frac{P_2\rho_2^2}{r}\frac{r_1^2}{r_2^2}}g.$$

თავი III მექანიკური სისტემის მოძრაობის განტოლებები

§11. სისტემის კინეტიკური ენერგიის გამოსახვა განზოგადებული სიჩქარეებითა და კოორდინატებით

ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერგია განისაზღვრება ტოლობით

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{v}_i^2 \qquad (11.1)$$

ვინაიდან $\mathrm{v}_i^2 = \vec{\mathrm{v}}_i\vec{\mathrm{v}}_i$, ხოლო

$$\vec{\mathrm{v}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\,,$$

ამიტომ კინეტიკური ენერგიის (11.1) გამოსახულება იქნება

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2+\cdots+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნებს

$$a_{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}, b_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t},$$

მივიღებთ

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta+\sum_{\alpha=1}^{s}b_\alpha\dot{q}_\alpha+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)^2 \qquad (11.2)$$

აღვნიშნოთ

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta\ ,\ T_1=\sum_{\alpha=1}^{s}b_\alpha\dot{q}_\alpha\ ,\ T_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

მაშინ

$$T=T_2+T_1+T_0 \qquad (11.3)$$

T_2, T_1 და T_0 წარმოადგენს შესაბამისად კვადრატულ, წრფივ და ნულოვან ფორმებს განზოგადებული სიჩქარეების მიმართ. თუ ბმები სტაციონარულია, $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორი დროზე ცხადად არ არის დამოკიდებული და კერძო წარმოებუ-ლები $\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}=0$, მაშინ კინეტიკური ენერგია იქნება

$$T=T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}a_{\alpha\,\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \qquad (11.4)$$

§12. ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები

გამოვიყვანოთ მექანიკური სისტემის მოძრაობის განტოლებები განზოგადებულ კოორდინატებში. მექანიკის ზოგადი განტოლების თანახმად განზოგადებული აქტიური და ინერციის ძალების მიერ შესრულებულ მუშაობათა ჯამი ნებისმიერ ვირტუალურ გადაადგილებაზე ნულის ტოლია.

$$\sum_{k=1}^{s}\delta A_k+\sum_{k=1}^{s}\delta A_k^{in}=0 \qquad (12.1)$$

სადაც

$$\sum_{k=i}^{s}\delta A_k=Q_1\delta q_1+Q_1\delta q_1+\cdots+Q_s\delta q_s,$$

$$\sum_{k=i}^{s}\delta A_k^{in}=Q_1^{in}\delta q_1+Q_2^{in}\delta q_2+\cdots+Q_s^{in}\delta q_s$$

Q_j^{in} – განზოგადებული ინერციის ძალებია. (12.1)-დან ვღებულობთ

$$\left(Q_1+Q_1^{in}\right)\delta q_1+\left(Q_2+Q_2^{in}\right)\delta q_2+\cdots+\left(Q_s+Q_s^{in}\right)\delta q_s=0 \quad (12.2)$$

$\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ დამოუკიდებელი ვარიაციებია, ამიტომ (12.2.)-დან ვღებულობთ მოძრაობის განტოლებებს

$$Q_1 + Q_1^{in} = 0\,,\ Q_2 + Q_2^{in} = 0\,, . \ . \ ., Q_s + Q_s^{in} = 0 \qquad (12.3)$$

ვინაიდან $\vec{F}_k^{in} = -m_k \vec{\mathrm{w}}_k = -m_k \dfrac{d\,\vec{\mathrm{v}}_k}{dt}$ და გავიხსენებთ განზოგადებული ძალების გამოსათვლელ (6.4) ფორმულას, მივიღებთ

$$Q_j^{in} = -\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\,\vec{\mathrm{v}}_k}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \qquad (12.4)$$

მაგრამ

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_k}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathrm{v}}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) - \vec{\mathrm{v}}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) \qquad (12.5)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \lim\frac{\Delta\,\vec{r}_k}{\Delta\,q_j} = \lim\frac{\dfrac{d(\,\Delta\,\vec{r}_k)}{d\,t}}{\dfrac{d(\Delta\,q_j)}{d\,t}} = \lim\frac{\Delta\dfrac{d\,\vec{r}_k}{d\,t}}{\Delta\dfrac{d\,q_j}{d\,t}} = \lim\frac{\Delta\,\dot{\vec{r}}_k}{\Delta\,\dot{q}_j} = \frac{\partial\,\dot{\vec{r}}_k}{\partial\,\dot{q}_j} = \frac{\partial\,\dot{\vec{\mathrm{v}}}_k}{\partial\,\dot{q}_j} \qquad (12.6)$$

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial\,\vec{r}_k}{\partial\,q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial\,q_j}\frac{d\,\vec{r}_k}{d\,t} = \frac{\partial\,\vec{\mathrm{v}}_k}{\partial\,q_j} \qquad (12.7)$$

თუ (12.6) და (12.7) შევიტანთ (12.5) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$\frac{d\,\vec{\mathrm{v}}_k}{d\,t}\frac{\partial\,\vec{r}_k}{\partial\,q_j} = \frac{d}{d\,t}\left(\vec{\mathrm{v}}_k\frac{\partial\,\vec{\mathrm{v}}_k}{\partial\,\dot{q}_j}\right) - \vec{\mathrm{v}}_k\frac{\partial\,\vec{\mathrm{v}}_k}{\partial\,q_j} = \frac{d}{d\,t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\,\mathrm{v}_k^2}{\partial\,\dot{q}_j}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\,\mathrm{v}_k^2}{\partial\,q_j} \qquad (12.8).$$

(12.8) გამოსახულება ჩავსვათ (12.4)-ში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} Q_j^{in} &= -\frac{d}{d\,t}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\,\dot{q}_j}\left(\frac{m_k\,\mathrm{v}_k^2}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\,q_j}\frac{m_k\,\mathrm{v}_k^2}{2} = \\ &= -\frac{d}{d\,t}\frac{\partial}{\partial\,\dot{q}_j}\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k\mathrm{v}_k^2}{2} + \frac{\partial}{\partial\,q_j}\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k\mathrm{v}_k^2}{2} \end{aligned} \qquad (12.9)$$

ვინაიდან $T = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{m_k\mathrm{v}_k^2}{2}$ წარმოადგენს სისტემის კინეტიკურ ენერგიას, ვღებულობთ, რომ განზოგადებული ინერციის ძალა გამოისახება კინეტიკური ენერგიით

$$Q_j^{in} = -\frac{d}{d\,t}\frac{\partial\,T}{\partial\,\dot{q}_j} + \frac{\partial\,T}{\partial\,q_j} \qquad (12.10)$$

შევიტანოთ (12.10) მოძრაობის (12.3) განტოლებებში

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial\,T}{\partial\,\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial\,T}{\partial\,q_j} = Q_j\,,\quad \left(j = 1, 2, ..., s\right) \ (12.11)$$

მიღებულ განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს განზოგადებულ კოორდინატებში. ამ განტოლებებს ეწოდება ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები. განტოლებათა რაოდენობა ტოლია სისტემის თავისუფლების ხარისხისა. ეს სისტემა წარმოადგენს განზოგადებული კოორდინატების მიმართ მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. თუ სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციალურია, მაშინ

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \qquad \left(j = 1, 2, ..., s \right)$$

სადაც $\Pi\left(q_1, q_2, ..., q_s\right)$ არის სისტემის პოტენციალური ენერგია. ე.ი. თუ სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციალურია, მაშინ განზოგადებული ძალა არის მინუს ნიშნით აღებული პოტენციალური ენერგიის წარმოებული განზოგადებული კოორდინატით.

შემოვიტანოთ ფუნქცია $L = T - \Pi$.

L არის განზოგადებული კოორდინატებისა და სიჩქარეების ფუნქცია და წარმოადგენს სისტემის კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების სხვაობას. L-ს ეწოდება ლაგრან-ჟის ფუნქცია. პოტენციალური ძალებისათვის ლაგრანჟის განტოლებები მიიღებს სახეს

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0,$$

ანუ

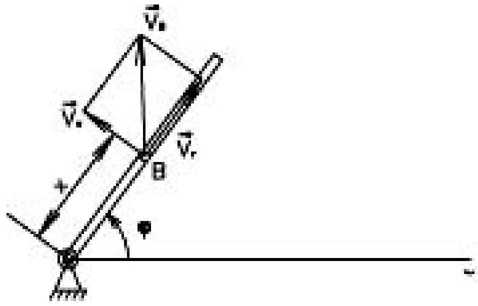
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\left(T - \Pi\right)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial\left(T - \Pi\right)}{\partial q_j} = 0$$

საიდანაც

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad \left(j = 1, 2, ..., s \right). \quad (12.12)$$

ეს არის ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები ძალთა ფუნქციის არსებობის შემთხვევაში. ეს განტოლებები წარმოადგენს განზოგადებული კოორდინატების მიმართ მეორე რიგის ჩვეულებრივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას.

ამოცანა. OA მილი თანაბრად ბრუნავს ω კუთხის სიჩქარით ჰორიზონტალურ სიბრტყეში. ვიპოვოთ მილში B ბურთულას მოძრაობის კანონი, თუ საწყის მომენტში ის დაშორებული O წერტილიდან a მანძილით და საწყისი სიჩქარე v_0 მილის გასწვრივ უდრის ნულს.



ნახ. 8

მილში B წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება x კოორდინატით, ამიტომ B წერტილის მოძრაობა განისაზღვრება ერთი განტოლებით.

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q \qquad (ა)$$

როდესაც x კოორდინატი ღებულობს δx ნაზრდს, მოქმედი ძალები მუშაობას არ ასრულებენ, ე.ი. $\delta A=0,\ \ Q=0$

აბსოლუტური მოძრაობის კინეტიკური ენერგია $T=\dfrac{1}{2}m\,\mathrm{v}_B^2$, $\vec{\mathrm{v}}_B=\vec{\mathrm{v}}_e+\vec{\mathrm{v}}_r$ სადაც $\vec{\mathrm{v}}_e$ არის წარმტანი სიჩქარე, $\vec{\mathrm{v}}_r$ – ფარდობითი სიჩქარე.]

$$\mathrm{v}_e=\tilde{o}\,\omega\,,\ \ \mathrm{v}_r=\tilde{o}\,,\ \ \mathrm{v}_B^2=\mathrm{v}_{\mathring{a}}^2+\mathrm{v}_{\hat{e}}^2=\tilde{o}^2\omega^2+\tilde{o}^2\,,$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+x^2\omega^2\right),\ \ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}\,,\ \ \frac{\partial T}{\partial x}=m\omega^2 x\,.$$

თუ ჩავსვამთ მიღებულ მნიშვნელობებს (ა) განტოლებაში, მივიღებთ განტოლებას

$$\ddot{x}-\omega^2 x=0\,,$$

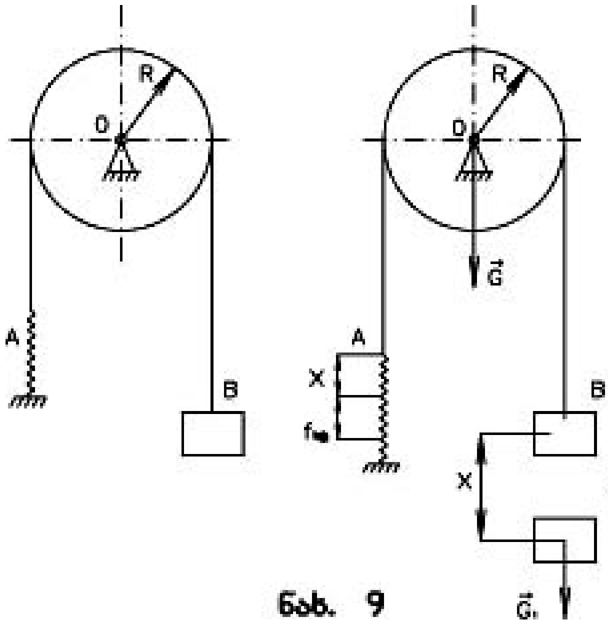
რომლის ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$x=C_1e^{\omega t}+C_2e^{-\omega t}\,.$$

საწყისი პირობებია: როცა $t=0,$ მაშინ $x_0=a$, $\dot{x}_0=0$, საიდანაც ვღებულობთ

$$x=\frac{a}{2}\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right)$$

ამოცანა. m მასისა და R რადიუსის მქონე ერთგვაროვანი დისკო ბრუნავს ჰორიზონტალური o ღერძის ირგვლივ. ბლოკზე გადადებულია უჭიმადი თოკი, ზრომლის A ბოლო მიმაგრებულია c სიხისტის მქონე ზამბარასთან, ხოლო ბოლოზე მიმაგრებულია m_1 მასის ტვირთი. განვსაზღვროთ ტვირთის მოძრაობის კანონი, თუ საწყის მომენტში მას მიენიჭება ვერტიკალურად ქვევით მიმართული v_0 სიჩქარე.



ნახ. 9

მივიღოთ სისტემის განზოგადებულ კოორდინატად ტვირთის ვერტიკალური გადაადგილება x. ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება ასე ჩაიწერება

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}.$$

G ძალა მუშაობას არ შეასრულებს. სისტემაზე მოქმედებს პოტენციალური ძალები: ტვირთის სიმძიმის ძალა და ზამბარის დრეკადი ძალა. სიმძიმის ძალისათვის $\Pi_1 = -G_1 x$. ზამბარის წაგრძელება ტოლია $f_{\text{სტ}} + x$. ზამბარის პოტენციალური ენერგია იქნება

$$\Pi_2 = \frac{c}{2}\left(f + x\right)^2 - \frac{cf^2}{2} = cfx + \frac{cx^2}{2}$$

პოტენციალური ენერგია

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -G_1 x + cfx + \frac{cx^2}{2}$$

ვინაიდან წონასწორობისას $G_1 = cf_{\text{სტ}}$, მივიღებთ $\Pi = \dfrac{cx^2}{2}$ და $\dfrac{\partial \Pi}{\partial x} = cx$. სისტემის კინეტიკური ენერგია წარმოადგენს გადატანით მოძრავი ტვირთისა და მბრუნავი დისკოს კინეტიკური ენერგიების ჯამს

$$T = T_1 + T_2,$$

$$T_1 = \frac{m_1 \mathrm{v}^2}{2}, T = \frac{j_0 \omega^2}{2}, j_0 = \frac{mR^2}{2}, \omega = \frac{\mathrm{v}}{R}, T_2 = \frac{1}{4} m\, \mathrm{v}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1\, \mathrm{v}^2 + \frac{1}{4} m\, \mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m}{2}\right)\tilde{o}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(m_1 + \frac{m}{2}\right)\dot{x}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(m_1 + \frac{m}{2}\right)\ddot{x}$$

ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$\ddot{x}+\frac{c}{m_1+\frac{m}{2}}x=0 .$$

აღვნიშნოთ

$$\frac{c}{m_1+\frac{m}{2}}=k^2$$

და

$$\ddot{x}+\kappa^2 x=0 ,$$

რომლის ზოგადი ამონახსნია

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt .$$

თუ გავითვალისწინებთ საწყისი პირობებს: *როცა* t=0, *მაშინ* $x_0=0; \tilde{o}_0=\mathrm{v}_0$ და

$$C_1=0,\ C_2=\frac{\mathrm{v}_0}{k} .$$

აქედან $\tilde{o}=\frac{\mathrm{v}_0}{k}\sin k\,t$.

§13. ენერგიის განზოგადებული ინტეგრალი

განტოლებას

$$f\left(q_1,q_2,...,q_s,\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_s,t\right)=C_1 \qquad (13.1)$$

ეწოდება (12.12) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ინტეგრალი, ანუ მოძრაობის ინტეგრალი, თუ f ფუნქცია ხდება მუდმივი, როდესაც $q_1,q_2,...,q_s;\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_s$ ნაცვლად (13.1) ჩავსვამთ (12.12) სისტემის ამონახსნებს. ვინაიდან (13.1) შეიცავს ერთ ნებისმიერ მუდმივს, მას უწოდებენ პირველ ინტეგრალს. შეიძლება არსებობდეს რამდენიმე პირველი ინტეგრალი. ამ ინტეგრალების ნებისმიერი მუდმივები განისაზღვრება საწყისი პირობებით. აქედან გამომდინარე (12.12) სისტემას შეიძლება ჰქონდეს არაუმეტეს $2s$ პირველი ინტეგრალი.

ვთქვათ ლაგრანჟის ფუნქცია, ანუ კინეტიკური პოტენციალი წარმოადგენს განზოგადებული კოორდინატების, განზოგადებული სიჩქარეებისა და დროის ფუნქციას

$$L=L\left(q_j,\dot{q}_j;t\right),\ \left(j=1,2,...,s\right) \qquad (13.2)$$

გავაწარმოოთ (13.2) ფუნქცია დროით. მივიღებთ

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)+\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (13.3)$$

(12.12) განტოლებიდან

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right), \qquad (j=1,2,...,s)$$

მაშინ

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)$$

(13.3) გამოსახულება ასე გადაიწერება

$$\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial t}, \quad \text{ანუ}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L\right)+\frac{\partial L}{\partial t}=0 \qquad (13.4)$$

თუ ლაგრანჟის ფუნქცია დროზე ცხადად არ არის დამოკიდებული, ე.ი. $\frac{\partial L}{\partial t}=0$,მაშინ (13.4)-დან ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L\right)=0$$

საიდანაც

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=h \qquad (13.5)$$

სადაც h მუდმივია. (13.5)-ს ეწოდება ენერგიის განზოგადებული ინტეგრალი, ანუ იაკობის ინტეგრალი. თუ გავიხსენებთ, რომ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j$$

შეიძლება ჩავწეროთ

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-T-\Pi \qquad (13.6)$$

რეონომული სისტემისთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$T=T_2+T_1+T_0$$

ამიტომ (13.6)-დან მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}q_j+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-T_2-T_1-T_0+\Pi \quad (13.7)$$

ერთგვაროვანი ფუნქციებისთვის ეილერის თეორემის თანახმად

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=2T_2, \qquad \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=T_1$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით (13.7)-დან მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\dot q_j - L = T_2 - T_0 + \Pi$$

საიდანაც (13.5)-ს გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$T_2 - T_0 + \Pi = h \qquad (13.8)$$

(13.8)-ს ეწოდება ენერგიის განზოგადებული ინტეგრალი.

ამრიგად, ენერგიის განზოგადებული ინტეგრალი არსებობს, თუ ძალები პოტენციალურია და ლაგრანჟის ფუნქცია დროზე ცხადად არ არის დამოკიდებული. (13.8) არ ემთხვევა სისტემის სრულ ენერგიას

$$E=T+\Pi=T_2+T_1+T_0+\Pi$$

სკლერონომული სისტემისთვის, როდესაც T დროზე ცხადად არ არის დამოკიდებული $T=T_2$ და ენერგიის განზოგადებული ინტეგრალი ემთხვევა სისტემის სრულ ენერგიას

$$T+\Pi=T_2+\Pi=h$$

ნივთიერ წერტილთა სისტემას, რომელსაც გააჩნია ენერგიის ჩვეულებრივი ინტეგრალი, ეწოდება კონსერვატული.

§14. ციკლური კოორდინატები

თუ ლაგრანჟის ფუნქცია L არ შეიცავს რომელიმე განზოგადებულ კოორდინატებს, მაგრამ შეიცავს ამ კოორდინატების დროით წარმოებულებს, ანუ განზოგადებულ სიჩქარეებს, მაშინ ასეთ კოორდინატებს ეწოდება ციკლური. ვთქვათ, $q_1,q_2,\ldots,q_l$ ($l\le s$) ციკლური კოორდინატებია, მაშინ ლაგრანჟის ფუნქცია იქნება

$$L = L\left(\dot q_{l+1},\dot q_{l+2},\ldots;\dot q_s;\dot q_1,\dot q_2\ldots,\dot q_l,\dot q_{l+1},\ldots,\dot q_s;t\right) \qquad (14.1)$$

ლაგრანჟის ფუნქციაში ცხადად შემავალ კოორდინატებს ეწოდება პოზიციური.

ციკლური კოორდინატებისათვის ცხადია, გვექნება

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=0\,, \quad \left(j=1,2,\ldots,l\right) \qquad (14.2)$$

მაშინ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებიდან ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)=0\,, \quad \left(j=1,2,\ldots,l\right) \qquad (14.3)$$

საიდანაც

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}=C_j=const\ \left(j=1,2,\ldots,l\right) \qquad (14.4)$$

(14.4) ტოლობებს ეწოდება ციკლური ინტეგრალები.

§15. რაუთის განტოლებები

რაუთის მეთოდით ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებიდან გამოირიცხება კოორდინატები. მაშინ განტოლებათა და დამოუკიდებელ განზოგადებულ კოორდინატთა რაოდენობა მცირდება ციკლური კოორდინატების რიცხვით. ჯერჯერობით დავუშვათ, რომ ყველა განზოგადებული კოორდინატი პოზიციურია, მაშინ ლაგრანჟის ფუნქცია იქნება დამოკიდებული ყველა განზოგადებულ კოორდინატზე, განზოგადებულ სიჩქარეებზე და დროზე

$$L = L\left(q_1, q_2, ..., q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s; t\right) \qquad (15.1)$$

ამ შემთხვევაში ლაგრანჟის სისტემა შეიცავს s განტოლებას

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \left(j = 1, 2, ..., s\right) \qquad (15.2)$$

განვიხილოთ ლაგრანჟის ფუნქციის წარმოებული პირველი r რაოდენობის განზოგადებული სიჩქარით $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_r; (r \leq s)$ და შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \dot{p}_j \qquad \left(j = 1, 2, ..., r\right) \qquad (15.3)$$

p_j ეწოდება განზოგადებული იმპულსები. (15.3)-ის გათვალისწინებით (15.2)-დან მივიღებთ

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \dot{p}_j \qquad \left(j = 1, 2, ..., r\right) \qquad (15.4)$$

ვიპოვოთ (15.1) ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$dL = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (15.5)$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში (15.3) და (15.4) ფორმულებს, მაშინ (15.5) ასე გადაიწერება

$$dL = \sum_{j=1}^{s} \dot{p}_j dq_j + \sum_{j=r+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^{r} p_j d\dot{q}_j + \sum_{j=r+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt \; (5.6)$$

ცხადია, რომ

$$\sum_{j=1}^{r} p_j d\dot{q}_j = d\sum_{j=1}^{r} p_j \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{r} \dot{q}_j dp_j$$

მაშინ (15.6) მიიღებს ასეთ სახეს

$$d\left(\sum_{j=1}^{r} p_j \dot{q}_j - L\right) = -\sum_{j=1}^{r} \dot{p}_j dq_j - \sum_{j=r+1}^{s} dq_j + \sum \dot{q}_j dp_j - \sum_{j=r+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial t} dt\,. \qquad (15.7)$$

$R = \sum_{j=1}^{r} p_j \dot{q}_j - L$ სახის ფუნქციას ეწოდება რაუთის ფუნქცია.

გამოვთვალოთ რაუთის ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$dR=\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial R}{\partial q_j}dq_j+\sum_{j=r+1}^{s}\frac{\partial R}{\partial q_j}dq_j+\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j+$$
$$+\sum_{j=r+1}^{s}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j+\sum_{J=1}^{s}\frac{\partial R}{\partial p_j}dp_j+\frac{\partial R}{\partial t}dt \qquad (15.8)$$

(15.7) და (15.8) ტოლობების შედარებით ვღებულობთ

$$\text{ნნ}\frac{\partial R}{\partial q_j}=-\dot{p}_j,\ \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}=0,\ \frac{\partial R}{\partial p_j}=\dot{q}_j \qquad (j=1,2,...,r) \quad (15.9)$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_j}=-\frac{\partial L}{\partial q_j},\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}=-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},(j=r+1,r+2,...,s) \qquad (15.10)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}}=0 \quad (j=1,2,...,r)$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ რაუთის ფუნქცია არ არის დამოკიდებული პირველ r განზოგადებულ სიჩქარეზე.

თუ (15.10) შევიტანთ ლაგრანჟის მეორე გვარის (15.2) განტოლებებში, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial R}{\partial q_j}=0,\ (j=r+1,r+2,...,s) \qquad (15.11)$$

ამ განტოლებებს ეწოდება რაუთის განტოლებები. როგორც ვხედავთ, რაუთის ფუნქციისთვის ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები სახეს არ იცვლის და განტოლებათა რაოდენობა r-ით ნაკლებია.

ვთქვათ პირველი r განზოგადებული კოორდინატები ციკლურია მაშინ

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=0,\ (j=1,2,...,r).$$

ლაგრანჟის (15.2) განტოლებებიდან ვღებულობთ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)=0$, ე.ი. $\dot{p}_j=0$, მაშინ (15.9)-ის პირველი განტოლებიდან $\frac{\partial R}{\partial q_j}=0,(j=1,2,...,r)$.

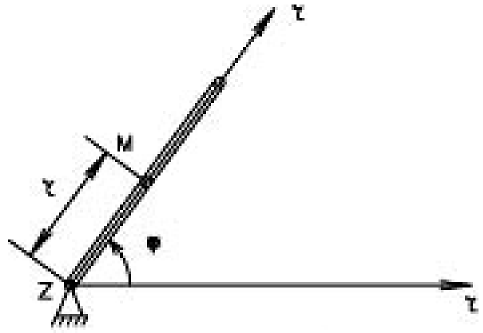
ამრიგად, რაუთის ფუნქცია არ არის დამოკიდებული ციკლურ კოორდინატებზე.

პოზიციური კოორდინატების განსაზღვრისათვის გვაქვს რაუთის n-r რაოდენობის განტოლება (15.11). ციკლური კოორდინატები (15.9)-ს მესამე განტოლების მიხედვით განისაზღვრება ფორმულით

$$q_j=\int\frac{\partial R}{\partial p_j}dt,\quad (j=1,2,...,r) \qquad (15.12)$$

დასკვნა. რაუთის R ფუნქცია არ შეიცავს ციკლურ კოორდინატებსა და მათ წარმოებულებს დროით. რაუთის განტოლებებს აქვს ლაგრანჟის მეორე გვარის

განტოლებების სახე და განტოლებათა რაოდენობა ნაკლებია ციკლური კოორდინატების რიცხვით.



ნახ. 10

ამოცანა. Oa მილი ბრუნავს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში ვერტიკალური Oz ღერძის ირგვლივ. მილში მოძრაობს m მასის მქონე M ბურთულა. მილის ინერციის მომენტი z ღერძის მიმართ უდრის I_z-ს. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ პოლარული კორდინატები r და φ. ვაჩვენოთ, რომ φ არის ციკლური კოორდინატი და შევადგინოთ რაუთის განტოლება.

სისტემის თავისუფლების ხარისხი ორის ტოლია. r და φ განზოგადებული კორდინატებია. სისტემის კინეტიკური ენერგია $T=T_1+T_2$, სადაც T_1 არის მილის კინეტიკური ენერგია, ხოლო T_2– ბურთულის.

$\vec{\mathrm{v}}$ არის ბურთულის აბსოლუტური სიჩქარე და $\mathrm{v}^2 = r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2$. ამიტომ

$$T_2 = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\left(I_z + mr^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \qquad (ა)$$

აქტიური ძალებია მილისა და ბურთულას სიმძიმის ძალები. ვინაიდან მოძრაობა განიხილება ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ამ ძალების პოტენციალური ენერგია $\Pi = 0$. ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\left(I_z + mr^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \qquad (ბ)$$

φ კოორდინატი ცხადად არ შედის ლაგრანჟის ფუნქციაში, ამიტომ იგი წარმოადგენს ციკლურ კოორდინატს. სისტემის პირველი ინტეგრალი იქნება

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \alpha,$$

სადაც α მუდმივია.

(ბ)-დან ვღებულობთ

$$\left(I_z + mr^2\right)\dot{\varphi} = \alpha \qquad (გ)$$

თუ გამოვიყენებთ მექანიკური ენერგიის შენახვის კანონს $T+\Pi=C$, (გ)-ს გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\frac{1}{2}\left(I_z+mr^2\right)\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\dot{r}^2=C,$$

საიდანაც

$$m\dot{r}^2+\frac{\alpha^2}{I_z+mr^2}=C \qquad (დ)$$

ამრიგად ვიპოვეთ სისტემის მოძრაობის პირველი ინტეგრალები (გ) და (დ) რაუთის ფუნქცია იქნება $R=\alpha\dot{\varphi}-L$, ანუ

$$R=\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{I_z+mr^2}-\frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

თუ შევიტანთ R-ს რაუთის განტოლებაში

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial R}{\partial r}=0,$$

მივიღებთ

$$\ddot{r}-\frac{\alpha^2}{\left(I_z+mr^2\right)^2}r=0.$$

§16. ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებები

განვიხილოთ უძრავ გლუვ ზედაპირზე m მასის ნივთიერი M წერტილის მოძრაობა $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით. ვთქვათ, ზედაპირის განტოლებაა

$$f\left(x,y,z\right)=0 \qquad (16.1)$$

წერტილის მოძრაობის განტოლება ვექტორული ფორმით იქნება

$$m\vec{w}=\vec{F}+\vec{N} \qquad (16.2)$$

სადაც $\vec{N}$ რეაქციის ძალაა. თუ (16.2) განტოლებას ჩავწერთ გეგმილებში საკოორდინატო ღერძებზე, მივიღებთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}&=X+N_x,\\ m\ddot{y}&=Y+N_y,\\ m\ddot{z}&=Z+N_z \end{aligned} \qquad (16.3)$$

სადაც, X, Y, Z წარმოადგენს $\vec{F}$ ძალის გეგმილებს საკოორდინატო ღერძებზე. $N_x,N_y,N_z,\vec{N}-$ რეაქციის $\vec{N}$ ძალის გეგმილებს, ხოლო $x,y,z-M$ წერტილის

კოორდინატებია. ვინაიდან ზედაპირი გლუვია, ამიტომ $\vec{N}$ რეაქციის ძალა მიმართულია ზედაპირის მართობულად მოცემულ წერტილში.

$$grad f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

წარმოადგენს ვექტორს, რომელსაც აქვს ზედაპირის ნორმალის მიმართულება. $\vec{N}$ და $grad f$ ვექტორების კოლინეარობის პიროებიდან ვღებულობთ

$$\frac{N_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{N_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{N_z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \lambda ,$$

საიდანაც

$$N_x = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad N_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad N_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით (16.3) მიიღებს სახეს

$$m\ddot{x} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$m\ddot{y} = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (16.4)$$

$$m\ddot{z} = Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}$$

(16.4) განტოლებებს ეწოდება არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის განტოლებები, ანუ ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებები. λ-ს ეწოდება ლაგრანჟის მამრავლი. ოთხი უცნობი სიდიდის განსაზღვრისათვის გვაქვს ოთხი განტოლება (16.4) და (16.1).

ვთქვათ ზედაპირი არ არის გლუვი, მაშინ რეაქციის ძალის მდგენელები იქნება ნორმალური მდგენელი $\vec{N}$ და მხები მდგენელი $\vec{T}$, ანუ ხახუნის ძალა, რომელიც მიმართულია სიჩქარის საპირისპიროდ. მოძრაობის განტოლება ვექტორული ფორმით ასე ჩაიწერება

$$m\,\vec{w} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{T} \qquad (16.5)$$

ხახუნის ძალის გეგმილი x ღერძზე იქნება

$$T_{\tilde{o}} = \left|\vec{T}\right|\cos\left(\vec{T},\hat{\vec{i}}\right) = -T\cos\left(\vec{v},\vec{i}\right) = -T\frac{v_{\tilde{o}}}{v} = -\frac{T}{v}\tilde{o};$$

ანალოგიურად y და z ღერძებზე გეგმილებისათვის მივიღებთ $T_y = -\frac{T}{v}\dot{y}, T_z = -\frac{T}{v}\dot{z}$, მაშინ (16.5) განტოლებები გეგმილებში ასე ჩაიწერება:

$$m\tilde{o} = \tilde{O} + \lambda\frac{\partial f}{\partial\tilde{o}} - \frac{T}{v}\tilde{o}$$

$$m\ddot{y} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{T}{v}\dot{y} \qquad (16.6)$$

$$m\ddot{z} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{T}{v}\dot{z}$$

ამასთან, მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ ხახუნის კანონის თანახმად $T = \mu N$, სადაც – μ ხახუნის კოეფიციენტია.

განვიხილოთ *n* ნივთიერ წერტილთა სისტემა, რომელიც ემორჩილება იდეალურ და ჰოლონომურ ბმებს. მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს ექნება სახე

$$m_i\ddot{x} = X_i + N_{xi}$$

$$m_i y_i = Y_i + N_{yi} \qquad (16.7)$$

$$m_i z_i = z_i + N_{zi}$$

აქ m_i არის M_i წერტილის მასა, X_i, Y_i,Z_i – არის წერტილზე მოქმედი აქტიური ძალების ტოლქმედის გეგმილებია, ხოლო Nxi, Nyi, Nzi ბმის რეაქციის ძალების გეგმილებია. ამ განტოლებებს მივუერთოთ ბმების განტოლებები.

$$f_\alpha\left(x_i, y_i, z_i, t\right) = 0 \quad \left(\alpha = 1, 2, ..., k\right) \qquad (16.8)$$

თუ გავითვალისწინებთ (5.19) ფორმულებს, (16.7) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$m_i x_i = X_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}$$

$$m_i \ddot{y}_i = Y_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \qquad (16.9)$$

$$m_i \ddot{z}_i = Z_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \qquad \left(i = 1, 2, ..., n\right).$$

(16.9) განტოლებებს ეწოდება ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებები ნივთიერ წერტილთა სისტემისათვის.

ვთქვათ სისტემაზე, რომელიც ემორჩილება *k* ბმას, მოდებულია დამატებით კიდევ *l* ბმა. თუ სისტემის თავისუფლების ხარისხი იყო *s=3n-k*, ახლა იქნება *3n-k-s*. დამატებითი ბმების გასათვალისწინებლად ჩავრთოთ ამ ბმების რეაქციის ძალები აქტიურ ძალებში. აღვნიშნოთ დამატებითი რეაქციის ძალები $\vec{R}_i^{'}$-ით. ვირტუალური მუშაობა გამოითვლება ფორმულით

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i + \vec{R}_i^{'}\right)\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s}\left(Q_j + Q_j^{'}\right)\delta q_j$$

სადაც $Q_j^{'}$ არის დამატებითი $\vec{R}_i^{'}$ რეაქციის ძალებით განპირობებული განზოგადებული ძალები. ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს ექნება სახე:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+Q_j^{'},\left(j=1,2,...,s\right)\ (16.10)$$

თუ ბმები იდეალურია, მაშინ (5.13) ფორმულების თანახმად

$$R_{xi}^{'}=\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

$$R_{yi}^{'}=\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\qquad (16.11)$$

$$R_{zi}^{'}=\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial z_i}$$

სადაც λ_k ლაგრანჟის მამრავლებია, ხოლო

$$f_k=\left(x_i,y_i,z_i,t\right)=0,\quad \left(k=1,2,...,l\right)\qquad (16.12)$$

დამატებითი ბმების განტოლებებია.

განზოგადებული ძალის გამოსათვლელი (6.4’) ფორმულის გათვაალისწინებით

$$Q_j^{'}=\sum_{i=1}^{n}\left(R_{xi}^{'}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+R_{yi}^{'}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+R_{zi}^{'}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial y_i}+\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial z_i}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial qj}+\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{\partial f_k}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial q_j}$$

მაშინ (16.10) განტოლებები ასე ჩაიწერება

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial q_j}+\lambda\frac{\partial f_2}{\partial q_j}+\cdots+\lambda\frac{\partial f_l}{\partial q_j}\qquad \left(i=1,2,...,s\right)\qquad (16.13)$$

(16.11) განტოლებათა სისტემა არსებითად წარმოადგენს ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებებს, რომელიც ჩაწერილია განზოგადებულ კოორდინატებში. განტოლებათა რიცხვი ტოლია *s=3n-k*. ამ განტოლებებს ემატება ბმების განტოლებები (16.11). ვღებულობთ 3*n*-*k*-*l* განტოლებათა სისტემას *s*=3*n*-*k* უცნობი განზოგადებული კოორდინა-ტით და *l* რაოდენობის ლაგრანჟის მამრავლით.

ამოცანა. *m* მასის მქონე ნივთიერი *M* წერტილი მოძრაობს სიმძიმის ძალის მოქმედებით *r* რადიუსიანი გლუვი ღრუ ცილინდრის შიგნით. ცილინდრის ღერძი *z* ჰორიზონ-ტალურია. ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლების გამოყენებით გამოვიყვანოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება და განვსაზღვროთ რეაქციის ძალა.

ნივთიერ წერტილზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $p=mg$,

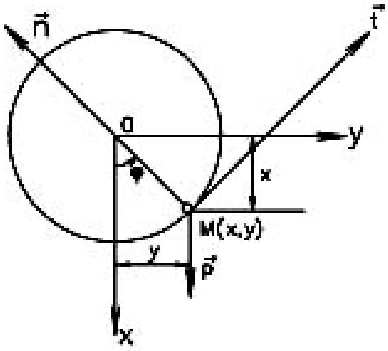
$$p_x=p=mg,p_y=0,p_z=0$$

ცილინდრის შიდა ზედაპირი წარმოადგენს ბმას, რომლის განტოლება იქნება

$$f = r^2 - x^2 - y^2 = 0$$

f-ის კერძო წარმოებულებია

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \frac{\partial f}{\partial z} = 0 .$$



ნახ. 11

ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებები იქნება

$$m\tilde{o} = p - 2\lambda \tilde{o}, m\ddot{y} = -2\lambda y, m\ddot{z} = 0 \qquad \text{(ა)}$$

სადაც λ ლაგრანჟის მამრავლია.

მესამე განტოლებიდან $\dot{z} = C_1$, რადგან $\dot{z}_0 = 0, C_1 = 0$ მივიღებთ $z = C_2$, ე.ი. წერტილი მოძრაობს ცილინდრის ღერძის მართობულ სიბრტყეში.

(ა)-ს პირველი განტოლება გავამრავლოთ y-ზე, მეორე x-ზე და შევკრიბოთ

$$\ddot{x}y - \ddot{y}x = gy,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}y - \dot{y}x\right) = gy$$

შემოვიტანოთ პოლარული კოორდინატები

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$

გავაწარმოოთ დროით

$$\tilde{o} = -r\sin\varphi\,\dot{\varphi}, \quad y = r\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} r\dot{\varphi} = -g\sin\varphi, \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{r}\sin\varphi \quad \text{(ბ)}$$

(ბ) განტოლება გავამრავლოთ $d\varphi$-ზე

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} d\varphi = -\frac{g}{r}\sin\varphi d\varphi$$

$$\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -\frac{g}{r}\sin\varphi d\varphi \qquad \text{(გ)}$$

ვაინტეგროთ (გ) განტოლება

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{r}\cos\varphi + C$$

საწყისი პირობებია: როცა t=0, მაშინ $\varphi = \varphi_0, \dot{\varphi}_0 = 0$ და წინა ტოლობიდან ვღებულობთ

$$C = -\frac{g}{r}\cos\varphi_{0,}$$

$$\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{r}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right) \qquad (\text{დ})$$

რეაქციის ძალის გეგმილი ნორმალზე იქნება

$$R_n = \lambda gradf = \lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

$$gradf = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$$

(ა)-ს მეორე განტოლებიდან

$$\lambda = -\frac{m\ddot{y}}{2y},$$

$$R_n = -mr\frac{\ddot{y}}{y},$$

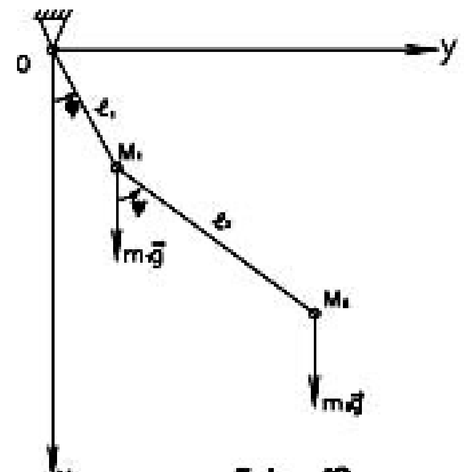
$$\ddot{y} = r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

თუ შევიტანთ $\ddot{\varphi}$ გამოსახულებას

$$R_n = mr\dot{\varphi}^2 + mgr\cos\varphi$$

შევიტანოთ ამ გამოსახულებაში $\dot{\varphi}^2$ (დ)-დან, მაშინ

$$R_n = mg\left(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0\right)$$



ნახ. 12

ამოცანა. ვიპოვოთ რეაქციის ძალები, რომელიც განპირობებულია დამატებითი ბმების შემოტანით ორმაგი მათემატიკური საქანისათვის თუ ტვირთების მასებია m_1 და m_2. $|OM_1|=l_1$, $|M_1M_2|=l_2$

ჯერ განვიხილოთ ორმაგი მათემატიკური საქანი დამატებითი ბმების გარეშე და გამოვიყვანოთ მოძრაობის განტოლებები. სისტემის თავისუფლების ხარისხი უდრის ორს. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ $q_1=\varphi, q_2=\psi$ კუთხეები. M_1 და M_2წერტილების კოორდინატები იქნება

$$\tilde{o}_1 = l_1\cos\varphi_1, \qquad y_1 = l_1\sin\varphi;$$
$$\tilde{o}_2 = l_1\cos\varphi + l_2\cos\psi, \qquad y_2 = l_1\sin\varphi + l_2\sin\psi;$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია იქნება

$$T=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\right)=\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)l_1^2\dot{\varphi}^2+$$
$$+\frac{1}{2}m_2\left[l^2{}_2\dot{\psi}^2+2l_1\dot{\varphi}l_2\dot{\psi}\cos\left(\varphi-\psi\right)\right];$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\left(m_1+m_2\right)l_1^2\dot{\varphi}+m_2l_1l_2\dot{\psi}\cos\left(\varphi-\psi\right), \qquad \frac{\partial T}{\partial\varphi}=-m_2l_1l_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\left(\varphi-\psi\right);$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}=m_2l_2^2\dot{\psi}+m_2l_1l_2\dot{\varphi}c\cos\left(\varphi-\psi\right), \qquad \frac{\partial T}{\partial}=m_2l_1l_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\left(\varphi-\psi\right);$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\varphi}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}+m_2l_1l_2\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi)+$$
$$+m_2l_1l_2\dot{\psi}^2\sin(\varphi-\psi);$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}-\frac{\partial T}{\partial\psi}=m_2l_2^2\ddot{\psi}+m_2l_1l_2\ddot{\varphi}\cos\left(\varphi-\psi\right)-m_2l_1l_2\dot{\varphi}^2\sin\left(\varphi-\psi\right).$$

ვირტუალური მუშაობა

$$\delta A=m_1g\delta x_1+m_2g\delta x_2=-m_1gl_1\sin\varphi\delta\varphi+m_2g(-l_1\sin\varphi\delta\varphi-$$
$$-l_2\sin\psi\delta\psi)=-(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi\delta\varphi-m_2gl_2\sin\psi\delta\psi,$$

საიდანაც

$$Q_1=-\left(m_1+m_2\right)gl_1\sin\varphi; \qquad Q_2=-m_2gl_2\sin\psi.$$

სისტემის მოძრაობის განტოლებები იქნება

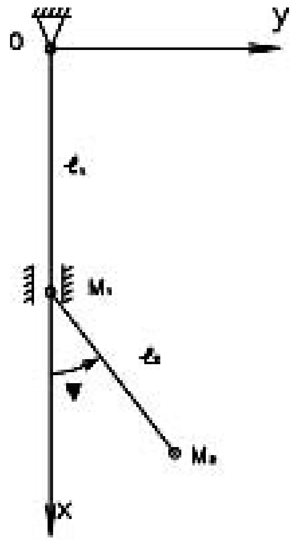
$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}+m_2l_1l_2\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi)+m_2l_1l_2\dot{\psi}^2\sin(\varphi-\psi)=$$
$$-(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi,$$

$$m_2l_2^2\ddot{\psi}+m_2l_1l_2\ddot{\varphi}\cos\left(\varphi-\psi\right)-m_2l_1l_2\dot{\varphi}^2\sin\left(\varphi-\psi\right)=-m_2gl_2\sin\psi.$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც დამატებითი ბმის განტოლებას აქვს სახე $f\left(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,t\right)=y_1=0$.

ამ შემთხვევისთვის (16.13) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}+m_2l_1l_2\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi)+m_2l_1l_2\dot{\psi}^2\sin(\varphi-\psi)=$$
$$-(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi,$$
$$m_2l_2^2\ddot{\psi}+m_2l_1l_2\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi)-m_2l_1l_2\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\psi)=-m_2gl_2\sin\psi\ .$$



ნახ. 13

ამ ორ დიფერენციალურ განტოლებას დავუმატოთ ბმის განტოლება

$$y_1=l_1\sin\varphi=0\,.$$

ბმის განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $\varphi\equiv 0$,ე.ი. $\dot{\varphi}=0,\ddot{\varphi}=0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ წერტილი უძრავია. მეორე დიფერენციალური განტოლებიდან ვღებულობთ მათე -- ტიკური საქანის რხევის განტოლებას

$$\ddot{\psi}+\frac{g}{l_2}\sin\psi=0\,.$$

$$\frac{d\dot{\psi}}{dt}=-\frac{g}{l_2}\sin\psi\ ,\dot{\psi}d\dot{\psi}=-\frac{g}{l_2}\sin\psi d\psi\ ,\frac{\dot{\psi}^2}{2}=\frac{g}{l_2}\cos\psi+C_1\,.$$

საწყისი პირობებია: როცა $t=0$, მაშინ $\psi=0,\ \dot{\psi}=\dot{\psi}_0$ და $C_1=\dfrac{\dot{\psi}_0^2}{2}-\dfrac{g}{l_2}$.

უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით

$$\dot{\psi}^2=\dot{\psi}_0^2-\frac{2g}{l_2}(1-\cos\psi)\,.$$

პირველი დიფერენციალური განტოლებიდან ვპოულობთ λ–ს.

$$\lambda=m_2l_2\cos\psi\cdot\ddot{\psi}-m_2l_2\sin\psi\cdot\dot{\psi}^2\,.$$

შევიტანოთ $\ddot{\psi}$ და $\dot{\psi}^2$ მნიშვნელობები, მივიღებთ

$$\lambda=m_2l_2\cos\psi\cdot\ddot{\psi}-m_2l_2\sin\psi\cdot\dot{\psi}^2\,.$$

(6.11)-ის მიხედვით კი განვსაზღვროთ რეაქციის ძალები

$$R'_{\delta} = 0,$$
$$R'_{y} = \lambda = -m_2 \sin\psi \left[l_2\dot{\psi}_0^2 - g\left(2 - 3cos\psi\right)\right].$$

თავი IV კანონიკური განტოლებები და მათი ინტეგრების მეთოდები

§17. კანონიკური ცვლადები

ვთქვათ, ბმები ცხადად არ არის დამოკიდებული დროზე. მაშინ ლაგრანჟის ფუნქცია ანუ კინეტიკური პოტენციალი იქნება

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \Pi\left(q_1, q_2, ..., q_s\right) \qquad (17.1)$$

შემოვიტანოთ ახალი ცვლადები – განზოგადებული კოორდინატები q_j და განზოგადებული იმპულსები $p_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$.

q_j და p_j სიდიდეებს ეწოდება კანონიკური ცვლადები. სტაციონარული ბმების შემთხვევაში განზოგადებული იმპულსი იქნება

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad \left(j = 1, 2, ..., s\right) \qquad (17.2)$$

ჩავწეროთ ეს ტოლობები გაშლილი სახით.

$$\begin{aligned} &a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + \cdots + a_{1s}\dot{q}_s = p_1, \\ &a_{21}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2 + \cdots + a_{2s}\dot{q}_s = p_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{s1}\dot{q}_1 + a_{s2}\dot{q}_2 + \cdots + a_{ss}\dot{q}_s = p_s, \end{aligned} \qquad (17.3)$$

ეს განტოლებები შეიძლება ამოიხსნას განზოგადებული სიჩქარეების მიმართ, თუ სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

ეს დეტერმინანტი ნულის ტოლი რომ ყოფილიყო, მაშინ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = 0, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = 0, ..., \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = 0,$$

ექნებოდა ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. განვიხილოთ გამოსახულება

$$\dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + \cdots + \dot{q}_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s},$$

რომელიც ერთგვაროვანი ფუნქციების შესახებ ეილერის თეორემის თანახმად $2T$-ს ტოლია. ე.ი.

$$\dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + \cdots + \dot{q}_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = 2T$$

ამ ტოლობის თანახმად კინეტიკური ენერგია იქნებოდა ნულის ტოლი მაშინ, როდესაც განზოგადებული სიჩქარეებიდან ზოგი ნულისაგან განსხვავებულია. ეს კი შეუძლებელია, რადგან T კინეტიკური ენერგია არის განზოგადებული სიჩქარეების დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა და ნულის ტოლი იქნება მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყველა განზოგადებული სიჩქარე ნულის ტოლია. ამრიგად, განზოგადებულ სიჩქარეებს გამოვსახავთ განზოგადებული იმპულსებით, მაშინ ლაგრანჟის ფუნქცია იქნება განზოგადებული კოორდინატების, განზოგადებული იმპულსების და დროის ფუნქცია.

$$L = L\left(q_1, q_2, ..., q_s; p_1, p_2, ..., p_s; t\right) \qquad (17.4)$$

§18. ჰამილტონის ფუნქცია. ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები

s თავისუფლების ხარისხის მქონე ჰოლონომური სისტემისათვის, რომელზეც მოქმედებენ კონსერვატიული ძალები, ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს აქვს სახე

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \left(j = 1, 2, ..., s\right) \qquad (18.1)$$

გავამრავლოთ (18.1) სისტემის თითოეული განტოლება შესაბამის განზოგადებულ $\dot{q}_j$ სიჩქარეზე და მიღებული განტოლებები შევკრიბოთ. მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\right] = 0 \qquad (18.2)$$

ვინაიდან

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

(18.2) განტოლება ასე გადავწეროთ

$$\frac{d}{dt}\sum_{J=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) = 0 \qquad (18.3)$$

თუ ლაგრანჟის ფუნქცია ცხადად არ არის დროზე დამოკიდებული, მაშინ ამ ფუნქციის დროით წარმოებული იქნება

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{J=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით (18.3) მიიღებს სახეს

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j-1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - L\right] = 0 \qquad (18.4)$$

თუ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებულ გამოსახულებას აღვნიშნავთ H -ით, მივიღებთ

$$H = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - L = const \qquad (18.5)$$

H ფუნქცია ეწოდება ჰამილტონის ფუნქცია. ეს ფუნქცია აგრეთვე შეიძლება ჩაიწეროს კანონიკურ ცვლადებში

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L \qquad (18.6)$$

საზოგადოდ ჰამილტონის ფუნქცია არის $2s$ კანონიკური ცვლადის $q_1, q_2, ..., q_s; p_1, p_2, ..., p_s$ და t დროის ფუნქცია

$$H = H\left(q_1, q_2, ..., q_s; p_1, p_2, ..., p_s; t\right) \qquad (18.7)$$

გამოვთვალოთ ჰამილტონის ფუნქციის წარმოებული განზოგადებული იმპულსით

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_j} - \sum_{j-1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_j}$$

ვინაიდან $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j$, მივიღებთ

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_j} - \sum_{j=1}^{s} p \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_j}.$$

ამრიგად

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j \qquad (18.8)$$

გავაწარმოოთ გამოსახულება $L = \sum_{j=1}^{s} p_j q_j - H$ განზოგადებულ q_j კოორდინატით

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial p_j}{\partial q_j}\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} - \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial p_j}{\partial q_j}\dot{q}_j -$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_j} - \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial p_j}{\partial q_j}\dot{q}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

ვინაიდან,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\frac{dp_j}{dt},$$

ამიტომ გვექნება

$$\frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{18.9}$$

საბოლოოდ მივიღეთ (18.8) და (18.9) განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned}\frac{dq_j}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial p_j},\\ \frac{dp_j}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial q_j};\end{aligned} \tag{18.10}$$

$$(j=1,2,...,s)$$

(18.10) განტოლებებს ეწოდება მექანიკის კანონიკური განტოლებები, ანუ ჰამილტონის განტოლებები. ეს განტოლებები წარმოადგენენ პირველი რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას.

§19. კანონიკური განტოლებები არაკონსერვატული სისტემისთვის

თუ სისტემაზე მოქმედებს როგორც კონსერვატული $Q_j=-\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j}$, ისე არაკონ-სერვატული Q_j^F ძალები, ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს ექნება სახე

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}+Q_j^F, \tag{19.1}$$
$$(j=1,2,...,s)$$

თუ შემოვიტანთ ლაგრანჟის ფუნქციას, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_j^F. \tag{19.2}$$

თუ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=p_j$, მაშინ $\dfrac{dp_i}{dt}-\dfrac{\partial L}{\partial q_j}=Q_j^F$, საიდანაც

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=\frac{dp_i}{dt}-Q_j^F. \tag{19.3}$$

ვინაიდან $\dfrac{\partial L}{\partial q_j}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_j}$, მივიღებთ (18.3)-დან

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j}+Q_j^F\ .ю \tag{19.4}$$

მივუერთოთ (19.4)-ს პირველი განტოლება (18.10)-დან

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}.ю \qquad (19.5)$$

(19.4) და (19.5) წარმოადგენენ მექანიკის კანონიკურ განტოლებებს არაკონსერვატული სისტემისათვის. ცხადია, ლაგრანჟის განტოლებებიდან მიღებული კანონიკური განტოლებები სამართლიანია მხოლოდ ჰოლონომური ბმებისათვის.

§20. ჰამილტონის ფუნქციის თვისებები

გამოვათვალოთ (18.7) ჰამილტონის ფუნქციის სრული წარმოებული დროით

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j$$

(18.10) კანონიკური განტოლებების თანახმად

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}=\frac{\partial H}{\partial t},$$

ე.ი.

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (20.1)$$

ჰამილტონის ფუნქციის სრული წარმოებული დროით უდრის ამავე ფუნქციის კერძო წარმოებულს დროით.

თუ სისტემაზე მოქმედი ბმები ცხადად არ არის დამოკიდებული დროზე, მაშინ ჰამილტონის ფუნქცია H აგრეთვე არ იქნება დროზე დამოკიდებული, $\frac{dH}{dt}=0$ და (20.1)-ის მიხედვით $\frac{\partial H}{\partial t}=0$, საიდანაც $H=const$. სტაციონარული ბმების შემთხვევაში სისტემის კინეტიკური ენერგია არის განზოგადებული სიჩქარეების კვადრატული ფორმა და ეილერის თეორემის თანახმად

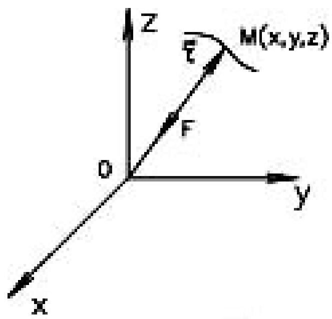
$$\sum_{j=1}^{s}p_j\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j=2T.$$

ამიტომ

$$H=\sum_{j=1}^{s}p_j\dot{q}_j-L=2T-L=2T-\left(T-\Pi\right)=T+\Pi$$

ე.ი. სტაციონარული ბმების პირობებში ჰამილტონის ფუნქცია ტოლია სისტემის სრული მექანიკური ენერგიისა.

ამოცანა. m მასის ნივთიერ M წერტილზე მოქმედებს დრეკადი ძალა $\vec{F}=-c\vec{r}$, სადაც c მუდმივია.



ნახ. 14

შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის კანონიკური განტოლებები.

წერტილის თავისუფლების ხარისხი ტოლია სამის და განზოგადებულ კოორდი-ნატებად მივიღოთ დეკარტის კოორდინატები x, y, z. ე.ი. $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$.

კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right).$$

განზოგადებული იმპულსები

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial x} = m\dot{x}\,, p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}\,, p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \qquad \text{(ა)}$$

F ძალა პოტენციალურია. წერტილი თავისუფალია, ამიტომ ჰამილტონის ფუნქცია ტოლია სრული მექანიკური ენერგიის

$$H=T+\Pi.$$

პოტენციალური ენერგია არის მუშაობა, რომელსაც ასრულებს პოტენციალური ძალა წერტილის მოცემული მდებარეობიდან ნულოვან მდებარეობაში გადასვლისას. ე.ი.

$$\Pi = \int_r^0 \vec{F}d\vec{r} = -c\int_r^0 rdr = \frac{cr^2}{2}.$$

რადგან $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, ამიტომ

$$\Pi = \frac{c}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

და

$$H = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{2}c\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

H ფუნქცია გამოვსახოთ განზოგადებული კოორდინატებითა და განზოგადებული იმპულსებით.

(ა)-დან $\qquad \dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m};$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{c}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

შევადგინოთ კანონიკური განტოლებები

$$\dot q_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \ \ \dot p_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}; \qquad (j = 1, 2, ..., s).$$

მოცემულ შემთხვევაში გვექნება

$$\dot x = \frac{p_x}{m}, \ \dot y = \frac{p_y}{m}, \dot z = \frac{p_z}{m};$$

$$\dot p_x = -cx\,, p_y = -cy\,, p_z = -cz\,.$$

მივიღეთ პირველი რიგის კანონიკური განტოლება $x, y, z; p_x, p_y, p_z$ კანონიკური ცვლადებისათვის.

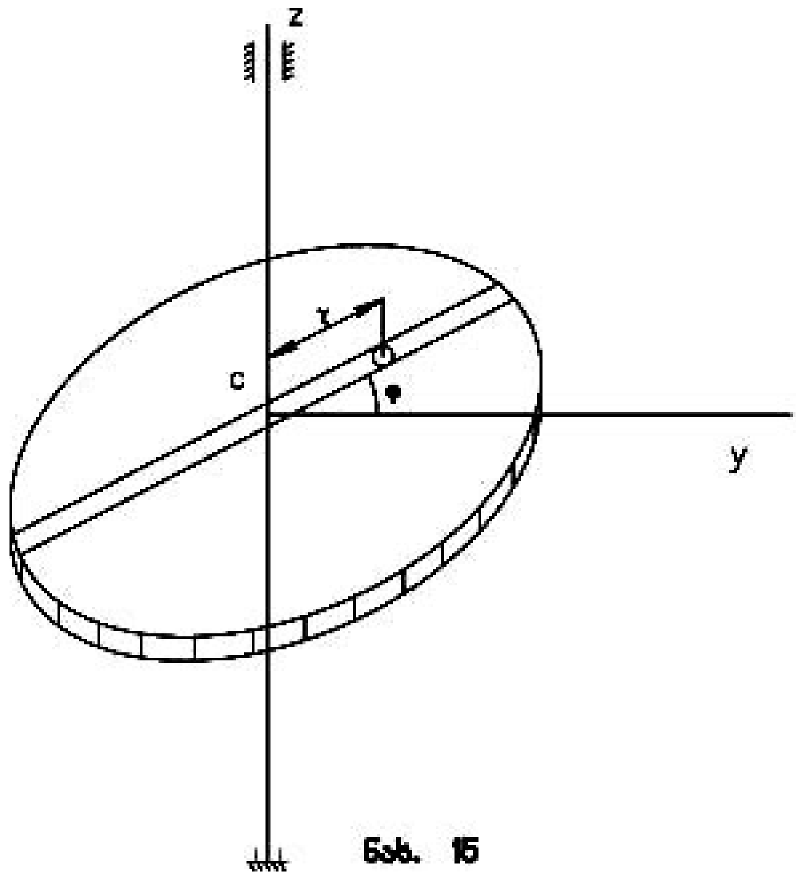
ამ განტოლებებიდან შეიძლება მივიღოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები დეკარტის კოორდინატებში. ამისათვის გავაწარმოოთ დროით პირველი სამი განტოლება და ჩავსვათ მასში მეორე სამეულიდან $\dot p_x, \dot p_y, \dot p_z$ მნიშვნელობები

$$\ddot x = \frac{\dot p_x}{m}, \ddot y = \frac{\dot p_y}{m}, \ddot z = \frac{\dot p_z}{m},$$

საიდანაც

$$m\ddot x = -cx, \ m\ddot y = -cy\,, m\ddot z = -cz\,.$$

ამოცანა. ჰორიზონტალური დისკო ბრუნავს ცენტრზე გამავალი ვერტიკალური ღერძის ირგვლივ. დისკოს დიამეტრის გასწვრივ ჭრილში მოძრაობს m მასის ბურთულა. ამ ბურთულაზე ჭრილის გასწვრივ მოქმედებს ძალა, რომელიც ცენტრიდან ბურთულამდე r მანძილის ფუნქციაა. შევადგინოთ ჰამილტონის ფუნქცია და გამოვიყვანოთ ბურთულას მოძრაობის კანონიკური განტოლებები.



ნახ. 15

განსახილველ მექანიკურ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ დისკოს მობრუნების φ კუთხე და ცენტრიდან ბურთულას დაშორება r. დავუშვათ დისკოს ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ არის I_{cz} და ძალთა ფუნქცია U(r). სისტემის კინეტიკური ენერგია არის დისკოს და ბურთულის კინეტიკური ენერგიების ჯამი

$$T = \frac{1}{2} I_{cz}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v^2 .$$

ბურთულას სიჩქარის გეგმილები პოლარულ კოორდინატებში იქნება

$$v_r = \dot{r}\,,\ \ v_\varphi = r\dot{\varphi}$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\,,$$

მაშინ

$$T = \frac{1}{2} I_{cz}\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}\left[m\dot{r}^2 + \left(I_{cz} + mr^2\right)\dot{\varphi}^2\right]$$

ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = T + U = \frac{1}{2}\left[m\dot{r}^2 + \left(I_{cz} + mr^2\right)\dot{\varphi}^2\right] + U\left(r\right)$$

განზოგადებული იმპულსები

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\,,\; p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I_{cz} + mr^2\right)\dot{\varphi}\,.$$

აქედან

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}\,, \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{I_{cz} + mr^2}\,.$$

ჩავსვათ ჰამილტონის ფუნქციაში კანონიკური ცვლადები

$$H = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{I_{cz} + mr^2}\right) - U\left(r\right).$$

კანონიკური განტოლებები იქნება

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}\,,$$

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{mrp_\varphi^2}{\left(I_{cz} + mr^2\right)^2} + \frac{\partial U\left(r\right)}{\partial r}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{I_{cz} + mr^2}\,, \frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

რადგან სისტემაზე მოქმედი ბმები სტაციონარულია, ამიტომ ჰამილტონის ფუნქცია არ არის დროზე ცხადად დამოკიდებული და H=T –Π= *const* .

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{I_{cz} + mr^2}\right) - U\left(r\right) = h \text{ ,ююю}$$

ანუ

$$p_r^2 + \frac{mp_\varphi^2}{I_{cz} + mr^2} - 2mU\left(r\right) = h_1\,.$$

§21. პუასონის ფრჩხილები

ვთქვათ φ და ψ ფუნქციები დამოკიდებულია p, q კანონიკურ ცვლადებზე და t დროზე

$$\varphi = \varphi\left(q_1, q_2, ..., q_s; p_1, p_2, ..., p_s; t\right),$$
$$\psi = \psi\left(q_1, q_2, ..., q_s; p_1, p_2, ..., p_{s;t}\right).$$

ამ ფუნქციებით შედგენილ გამოსახულებას

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j}\frac{\partial \psi}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_j}\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right) = \left(\varphi, \psi\right) \qquad (21.1)$$

ეწოდება პუასონის ფრჩხილები.

პუასონის ფრჩხილების ამ განმარტებიდან ადვილად მიიღება მისი ზოგიერთი თვისება, რომელსაც შემდეგ გამოვიყენებთ

1) $(\varphi,-\psi)=-(\varphi,\psi)=(\psi,\varphi)$. $(\varphi,-\psi)=-(\varphi,\psi)=(\psi,\varphi)$ (21.2)

2) თუ c ნებისმიერი მუდმივია, მაშინნ

$$(\varphi,c)=0 \qquad (21.3)$$

3) (φ,ψ)-ს კერძო წარმოებული t დროით იქნება

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial t}=\sum_{j=1}^{s}[\frac{\partial(\frac{\partial\varphi}{\partial t})}{\partial q_j}\frac{\partial\psi}{\partial p_j}-\frac{\partial(\frac{\partial\varphi}{\partial t})}{\partial p_j}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}]+\sum_{j=1}^{s}[\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial t})}{\partial p_j}-$$
$$-\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\frac{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial t})}{\partial q_j}]=(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi)+(\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}). \qquad (21.4)$$

§22. იაკობის იგივეობა

განვიხილოთ p,q კანონიკურ ცვლადებზე და t დროზე დამოკიდებული სამი ფუნქცია f,φ,ψ. ვაჩვენოთ, რომ

$$\big(f,(\varphi,\psi)\big)+\big(\varphi,(\psi,f)\big)+\big(\psi,(f,\varphi)\big)\equiv 0. \qquad (22.1)$$

ამ იგივეობას ეწოდება იაკობის იგივეობა

შევამოწმოთ ეს იგივეობა ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის, ე.ი. როდესაც f,φ,ψ. ფუნქციები დამოკიდებულია ერთ q განზოგადებულ კოორდინატზე და ერთ p განზოგადებულ იმპულსზე.

გამოვთვალოთ პირველი შესაკრები:

$$\big(f,(\varphi,\psi)\big)=\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial q}. \qquad (22.2)$$

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial p}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\frac{\partial\psi}{\partial q}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}. \qquad (22.3)$$

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial q}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\frac{\partial\psi}{\partial p}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial q}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}. \qquad (22.4)$$

თუ ჩავსვამთ (22.3) და (22.4)-ს (22.2)-ში, მივიღებთ

$$\big(f(\varphi,\psi)\big)=\frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\frac{\partial\psi}{\partial q}-\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)-$$
$$-\frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\frac{\partial\psi}{\partial p}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial q}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right) \qquad (22.5)$$

შემდეგი ორი ფრჩხილი შეიძლება მივიღოთ f,φ,ψ ფუნქციების ციკლური გადა-ადგილებით.

$$\left(\varphi\left(\psi, f\right)\right)=\frac{\partial \varphi}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial q \partial p}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial \psi}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)-$$
$$-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial \psi}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial \psi}{\partial p}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right). \tag{22.6}$$

$$\left(\psi\left(f, \varphi\right)\right)=\frac{\partial \psi}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial \varphi}{\partial q}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q}\frac{\partial f}{\partial p}\right)-$$
$$-\frac{\partial \psi}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\frac{\partial \varphi}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q}-\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}\right). \tag{22.7}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ (22.5), (22.6) და (22.7) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ (22.1) იგივეობას.

§23. პუასონის თეორემა

განვიხილოთ დინამიკის კანონიკური განტოლებები

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\ \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j},\ \left(j=1,2,....,s\right). \tag{23.1}$$

დავადგინოთ, რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს f ფუნქცია, იმისათვის რომ $f\left(q_1, q_2, ..., q_s; p_1, p_2, ..., p_s; t\right)=c$ იყოს (23.1) სისტემის ინტეგრალი.

ვინაიდან f ფუნქცია მუდმივია, (23.1)-დან განსაზღვრული ყველა p და q -სათვის გვექნება:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j\right)\equiv 0 \tag{23.2}$$

შევიტანოთ (23.2) იგივეობაში (23.1) სისტემიდან განსაზღვრული $\dot{q}_j$ და $\dot{p}_j$.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)\equiv 0 \tag{23.3}$$

თუ ვისარგებლებთ პუასონის ფრჩხილების გამოსახულებით, (23.3)-დან მივიღებთ

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left(f, H\right)\equiv 0 \tag{23.4}$$

(23.4) წარმოადგენს აუცილებელ და საკმარის პირობას იმისათვის, რომ $f=c$ იყოს (23.1) კანონიკური სისტემის ინტეგრალი.

პუასონის თეორემა. თუ ფუნქციები $\varphi\left(q, p; t\right)=a$ და $\psi\left(q, p; t\right)=b$ წარმოადგენს (23.1) კანონიკური სისტემის პირველ ინტეგრალებს, მაშინ $\left(\varphi, \psi\right)=c$ აგრეთვე იქნება იმავე სისტემის ინტეგრალი.

რადგან $\varphi=a$ და $\psi=b$ (23.1) სისტემის პირველი ინტეგრალებია, მაშინ (23.4) პირობის თანახმად ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\varphi,H)\equiv 0\,,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t}+(\psi,H)\equiv 0\,. \qquad (23.5)$$

იაკობის (22.1) იგივეობის თანახმად

$$\big(H,(\varphi,\psi)\big)+\big(\varphi(\psi,H)\big)+\big(\psi(H,\varphi)\big)\equiv 0\,. \qquad (23.6)$$

(23.5)-დან

$$(\varphi,H)=-\frac{\partial\varphi}{\partial t},\qquad (\psi,H)=-\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

მივიღოთ აგრეთვე მხედველობაში, რომ $(H,\varphi)=-(\varphi,H)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$.

თუ ამ ტოლობებს ჩავსვამთ (23.6)-ში, მივიღებთ

$$\big(H,(\varphi,\psi)\big)+\left(\varphi,-\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\left(\psi,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\equiv 0$$

ანუ

$$\big((\varphi,\psi),H\big)+\left(\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right)\equiv 0\,. \qquad (23.7)$$

(21.4)-ის თანახმად

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right)+\left(\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial t}\,.$$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით (23.7)-დან ვღებულობთ

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial t}+\big((\varphi,\psi),H\big)\equiv 0\,. \qquad (23.8)$$

(23.8) იგივეობიდან გამომდინარეობს, რომ $(\varphi,\psi)=c$ არის (23.1) სისტემის ინტეგრალი, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც H ფუნქცია დროზე ცხადად არ არის დამოკიდებული

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0\,. \qquad (23.9)$$

ვთქვათ, ცნობილია დროზე დამოკიდებული პირველი ინტეგრალი $f(t,q,p)=c$, მაშინ f ფუნქცია აკმაყოფილებს პუასონის პირობას

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f,H)\equiv 0\,.$$

გავაწარმოოთ ეს იგივეობა დროით

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\left(f,\frac{\partial H}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial t},H\right)\equiv 0 \qquad (23.10)$$

(23.9) პირობის თანახმად მეორე შესაკრები ნულის ტოლია; მივიღებთ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial t},H\right)\equiv 0 \qquad (23.11)$$

აქედან $\frac{\partial f}{\partial t}=c$, აკმაყოფილებს პუასონის პირობას, ე.ი. წარმოადგენს სისტემის პირველ ინტეგრალს. შეიძლება ამ გზით მივიღოთ სისტემის პირველი ინტეგრალები, მანამ, სანამ არ მივიღებთ დროსაგან დამოუკიდებელ პირველ ინტეგრალს ან უკვე ცნობილ პირველ ინტეგრალს. თუ $\frac{\partial f}{\partial t}=0$, მაშინ $(f,H)\equiv 0$ და ამიტომ (f,H) უკვე არ იქნება სისტემის ინტეგრალი.

თუ გვაქვს ინტეგრალთა სისტემა $(f_i,f_k)\equiv 0,(i,k=1,2,...,m)$, ასეთ სისტემას ეწოდება ინვოლუციური. ამ შემთხვევაში პუასონის ფრჩხილების დახმარებით ახალ ინტეგრალებს ვერ მივიღებთ.

ამოცანა. ცნობილია, რომ ჰამილტონის ფუნქციას აქვს სახე

$$H=q_1p_1-q_2p_2-aq_1^2+bq_2^2.$$

შევამოწმოთ ჰუასონის პირობით, არის თუ არა ფუნქცია

$$f=\frac{p_2-bq_2}{q_1}$$

კანონიკური განტოლებების პირველი ინტეგრალი, რომელიც შეესაბამება მოცე-მულ H ფუნქციას.

გამოვიყენოთ პუასონის პირობა, რომლის თანახმად პირველი ინტეგრალი აკმა-ყოფილებს პირობას

მოცემულ შემთხვევაში $\frac{\partial f}{\partial t}=0$. შევადგინოთ პუასონის ფრჩხილი

$$(f,H)=\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}-\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}-\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2}\right). \qquad (ა)$$

ვიპოვოთ წარმოებულები

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}=-\frac{p_2-bq_2}{q_1^2},\frac{\partial f}{\partial p_1}=0,\frac{\partial f}{\partial q_2}=-\frac{b}{q_1},\frac{\partial f}{\partial p_2}=\frac{1}{q_1};$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_1}=p_1-2aq_1,\frac{\partial H}{\partial p_1}=q_1,\frac{\partial H}{\partial q_2}=-p_2+2bq_2,\frac{\partial H}{\partial p_2}=-q_2$$

ჩავსვათ ეს ტოლობები (ა)-ში, მივიღებთ

$$(f,H)=-\frac{p_2-bq_2}{q_1^2}q_1+\left[\frac{b}{q_1}q_2-\frac{1}{q_1}(-p_2+2bq_2)\right]=$$

$$=\frac{bq_2}{q_1}+\frac{bq_2}{q_1}-\frac{2bq_2}{q_1}\equiv 0$$

ამრიგად, f წარმოადგენს სისტემის პირველ ინტეგრალს.

§24. ჰამილტონის დინამიკური განტოლებების ინტეგრების მეთოდი (იაკობის მეთოდი)

1. ძირითადი ცნებები

მეთოდის ძირითადი აზრი მდგომარეობს შემდეგში: იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ჰამილტონის კანონიკური განტოლებების ყველა პირველი ინტეგრალი, საკმარისია ვაინ-ტეგრიროთ გარკვეული პირველი რიგის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლება, ე.ი. განვსაზღვროთ ამ განტოლების სრული ინტეგრალი. მაშინ კანონიკურ განტოლებათა სისტემის პირველი ინტეგრალები მიიღება აღნიშნული სრული ინტეგრალის დამოუკიდებელი q_j ცვლადებითა და ამ ინტეგრალში შემავალი ნებისმიერი მუდმივებით გაწარმოებით.

განვიხილოთ s ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია $q_1, q_2, ..., q_s$ განზოგადებულ კოორდინატებზე, t დროზე და შეიცავს $a_1, a_2, ..., a_{s+1}$ მუდმივს. ამ მუდმივების რაოდენობა ტოლია ცვლადების რაოდენობის t-ს ჩათვლით.

$$s = s\left(q_1, q_2, ..., q_s; t; a_1, a_2, ..., a_s, a_{s+1}\right) \qquad (24.1)$$

შევადგინოთ ამ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $t, q_1, q_2, ..., q_s$ ცვლადებით

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial s}{\partial t} = p_0\left(q_1, q_2, ..., q_s; t; a_1, a_2, ..., a_{s+1}\right),\\
&\frac{\partial s}{\partial q_1} = p_1\left(q_1, q_2, ..., q_s; t; a_1, a_2, ..., a_{s+1}\right),\\
&\frac{\partial s}{\partial q_2} = p_2\left(q_1, q_2, ..., q_s; t; a_1, a_2, ..., a_{s+1}\right), \qquad (24.2)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial s}{\partial q_s} = p_s\left(q_1, q_2, ..., q_s; t; a_1, a_2, ..., a_{s+1}\right).
\end{aligned}$$

(24.1) დ (24.2) სისტემა შეიცავს s+2 განტოლებას, ამ სისტემიდან გამოვრიცხოთ $a_1, a_2, ..., a_{s+1}$ მუდმივები. ამ მუდმივების გამორიცხვის შედეგად დასაშვებია ორი შემთხვევა. პირველ შემთხვევაში შეიძლება მივიღოთ ერთი დამოკიდებულება $s, \frac{\partial s}{\partial q_j}, \frac{\partial s}{\partial t}, q_j, t$ სიდიდეებს შორის

$$f\left(t; q_1, q_2, ..., q_s; \frac{\partial s}{\partial t}; \frac{\partial s}{\partial q_1}, \frac{\partial s}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial s}{\partial q_s}\right) = 0 \qquad (24.3)$$

მეორე შემთხვევაში შეიძლება მივიღოთ რამდენიმე დამოკიდებულება. ასეთ შემთხვევაში არ არსებობს ერთი დიფერენციალური განტოლება, რომლისთვისაც S იქნება სრული ინტეგრალი.

პირველ შემთხვევაში (24.3) დამოკიდებულება წარმოადგენს პირველი რიგის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებას S ფუნქციის მიმართ. ამ შემთხვევაში (24.1) ტოლობით განსაზღვრული S ფუნქცია წარმოადგენს (24.3) დიფერენციალური განტოლების სრულ ინტეგრალს.

2. ჰამილტონ-იაკობის თეორემა

ჰამილტონ-იკობის მეთოდი იძლევა საშუალებას კანონიკური განტოლებების 2S პირველი ინტეგრალის მოძებნა დავიყვანოთ პირველი რიგის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების სრული ინტეგრალის პოვნის ამოცანაზე.

ჰამილტონის H ფუნქციის გამოსახულებაში განზოგადებული იმპულსები შევცვალოთ უცნობი s ფუნქციის წარმოებულებით და შევადგინოთ შემდეგი სახის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება.

$$\frac{\partial s}{\partial t}+H\left(t;q_1,q_2,..,q_s;\frac{\partial s}{\partial q_1},\frac{\partial s}{\partial q_2},...,\frac{\partial s}{\partial q_s}\right)=0 \qquad (24.4)$$

ამ განტოლებას ეწოდება ჰამილტონ-იაკობის განტოლება. ეს არის პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება s ფუნქციის მიმართ. ეს ფუნქცია დამოკიდებულია s+1 ცვლადზე, ვინაიდან S ფუნქცია ცხადად არ შედის განტოლებაში, ამიტომ სრულ ინტეგრალს ექნება სახე

$$S=\tilde{S}\left(t;q_1,q_2,...,q_s;a_1,a_2,...,a_s\right)+a_{s+1} \qquad (24.5)$$

სადაც a წარმოადგენს ადიტიურ მუდმივს.

ჰამილტონ-იაკობის თეორემა

თუ ცნობილია (24.4) განტოლების სრული ინტეგრალი, მაშინ კანონიკური სისტემის

$$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j},\dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j},\ \left(j=1,2,...,s\right)б \qquad (24.6)$$

ყველა პირველ ინტეგრალს ექნება სახე

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial a_j}=\beta_j,\left(j=1,2,...,s\right) \qquad (24.7)$$

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial q_j}=p_j\left(j=1,2,...,s\right) \qquad (24.8)$$

სადაც β_j- ახალი ნებისმიერი მუდმივებია.

დამტკიცებისათვის საკმარისია ყოველი (24.7), (24.8) გავაწარმოოთ დროით და დავრწმუნდეთ, რომ მასში (24.6) კანონიკური სისტემების ჩასმის შემდეგ მივიღებთ იგივურად ნულს.

გავაწარმოოთ (24.7), (24.8) განტოლებები დროით. ამასთან, გავითვალისწინოთ, რომ q_j და p_j დროის ფუნქციებია. მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_j \partial t}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_j \partial q_k}\dot{q}_k=0 \qquad (24.9)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_j \partial t}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k-\dot{p}_j=0 \qquad (24.10)$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში (24.6) კანონიკურ განტოლებებს, (24.9)-ის მარცხენა მხარე მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_j \partial t}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial a_j \partial q_k}, \text{ ანუ}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_j \partial t}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 H}{\partial\left(\dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k}\right)}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_j \partial q_k}$$

მიღებული გამოსახულება წარმოადგენს (24.4)-ის წარმოებულს a_j-თი და იგივურად ნულის ტოლია.

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left[\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}+H\left(t;q_1,q_2,...,q_s;\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_1},\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_2},...,\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_s}\right)\right]\equiv 0$$

აქედან გამომდინარე (24.2) წარმოადგენს იგივეობას, რდ.გ.

(24.6) კანონიკური განტოლებების გათვალისწინებით (24.10) ასე გადაიწერება

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_j \partial t}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_j \partial q_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}+\frac{\partial H}{\partial q_k}=\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_j \partial t}+$$

$$+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k}\right)}+\frac{\partial H}{\partial q_k}=\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}+H\left(t;q_1,q_2,...,q_s;a_1,a_2,...,a_s\right)\right]\equiv 0$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში (24.4), ეს გამოსახულებაც იგივურად ნულის ტოლია, რ.დ.გ.

ამოცანა. m მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს წრფეზე ცენტრისაკენ მიზიდულობის ძალის გავლენით. ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის განტოლება ჰამილტონ-იაკობის მეთოდის გამოყენებით.

წერტილის თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია. განზოგადებული კოორდინატი q იქნება მანძილი ცენტრიდან წერტილამდე. პოტენციალური ენერგია იქნება-

$$\Pi=\int_{o}^{q}cqdq=\frac{cq^2}{2}.$$

კინეტიკური ენერგია

$$T=\frac{m\dot{q}^2}{2}.$$

ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = T - \Pi = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{cq^2}{2}.$$

განზოგადებული იმპულსი

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q},$$

საიდანაც

$$\dot{q} = \frac{p}{m}.$$

ჰამილტონის ფუნქცია

$$H = T + \Pi = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{cq^2}{2} = \frac{p^2}{2} + \frac{cq^2}{2} = h.$$

წერტილის მოძრაობის კანონიკური განტოლებები იქნება

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \qquad \frac{dp}{dp} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -cq$$

შევადგინოთ ჰამილტონ-იაკობის განტოლება. მისთვის ჰამილტონის ფუნქციაში განზოგადებული იმპულსი შევცვალოთ უცნობი ფუნქციის წარმოებულით

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + mcq^2 = h$$

აქედან

$$\frac{dS}{dq} = \sqrt{2mh - mcq^2},$$

$$s_0 = \int \sqrt{2mh - mcq^2}\, dq$$

სრული ინტეგრალი იქნება

$$S = -ht + \int \sqrt{2mh - mcq^2}\, dq$$

განზოგადებული იმპულსი

$$p = \frac{\partial s}{\partial q} = \sqrt{2mh - mcq^2}.$$

მოძრაობის განტოლება იქნება

$$\frac{dS}{dh} = -t + \int \frac{mdq}{\sqrt{2mh - mcq^2}} = t_0.$$

$$t + t_0 = \sqrt{\frac{m}{c}} \arcsin \sqrt{\frac{c}{2h}}\, q$$

$$\int \frac{mdq}{\sqrt{2mh - mcq^2}} = t + t_0.$$

აღვნიშნოთ $A^2 = \frac{2h}{c}, \omega^2 = \frac{c}{m}$, მივიღებთ

$$q = A\sin\omega\left(t + t_0\right).$$

აღვნიშნოთ $\omega t_0 = \beta$, მაშინ

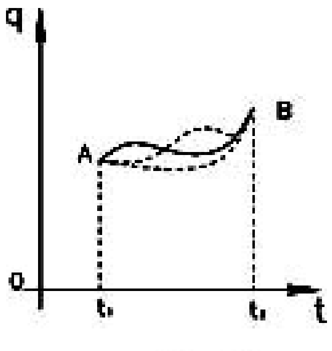
$$q = A\sin\left(\omega t + \beta\right).$$

თავი V. კლასიკური მექანიკის ვარიაციული ინტეგრალური პრინციპები

§25. ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპი

ვთქვათ, სისტემა $t=t_1$ მომენტში იმყოფება კონფიგურაციული სივრცის A წერტილში, ხოლო $t=t_2$ მომენტში B–ში, ე.ი. როდესაც $t=t_1$ გვაქვს $q_1 = \left(q_1\right)_A, q_2 = \left(q_2\right)_A, \ldots, q_s = \left(q_s\right)_A$, ხოლო, როცა $t=t_2$, $q_1 = \left(q_1\right)_B, q_2 = \left(q_2\right)_B, \ldots, q_s = \left(q_s\right)_B$. A-დან B–ში სისტემა შეიძლება გადავიდეს სხვადასხვა გზით, ამ გზების შესაძლო ტრაექტორიებს უწოდებენ. მათგან ერთერთი იქნება ნამდვილი ტრაექტორია. საინტერესოა, გაირკვეს ის პირობები, რომელიც სისტემას აიძულებს იმოძრაოს ნამდვილი ტრაექტორიის გასწვრივ. ამ კითხვაზე პასუხობს ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპი, რომელიც ასე ჩამოყალიბდება:

ყველა შესაძლო ტრაექტორიებიდან, რომელიც გადის საწყის და ბოლო წერტილებზე, სისტემა ირჩევს იმას, რომლის გასწვრივაც ქმედებას აქვს ექსტრემალური მნიშვნელობა.



ნახ. 16

განვიხილოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i - m_i\vec{w}_i\right)\delta\vec{r}_i = 0$$

ანუ

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\delta\vec{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\vec{w}_i\delta\vec{r}_i\right)=0\,.$$

აქ $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\delta\vec{r}_i=\delta A$ წარმოადგენს მოცემული ძალების მუშაობას $\delta\vec{r}_i$ შესაძლო გადაადგილებაზე, ხოლო გადაადგილების $\delta\vec{r}_i$ ვექტორი წარმოადგენს $\vec{r}_i$ რადიუს-ვექტორის სინქრონულ ვარიაციას. გარდავქმნათ სკალარული ნამრავლი

$$-m_i\vec{w}_i\delta\vec{r}_i=-m_i\frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i=-\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\delta\vec{r}_i\right)+\left(m_i\vec{v}_i\frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i\right)$$

ვინაიდან ვარიაცია სინქრონულია $\frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i=\delta\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\delta\vec{v}_i$,

ამიტომ ამ ტოლობების გათვალისწინებით

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\vec{w}_i\delta\vec{r}\right)=-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\vec{v}_i\delta\vec{r}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i\delta\vec{v}_i=$$

$$=-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\vec{v}_i\delta\vec{r}_i\right)+\delta\sum_{i=1}^{n}\frac{m_iv_i^2}{2}=-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\vec{v}_i\delta\vec{r}_i\right)+\delta T$$

ამრიგად, დინამიკის ზოგადი განტოლება შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\delta T+\delta A=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\vec{v}_i\delta\vec{r}_i\right)\qquad(25.1)$$

შესაძლო ტრაექტორიები იკვეთება *A* და *B* წერტილებში დროის $t=t_1$ და $t=t_2$ მომენტებში, ე.ი. $\delta\vec{r}_i\left(t_1\right)=\delta\vec{r}_i\left(t_2\right)=0$.

ვაინტეგროთ (25.1) ტოლობა (t_1, t_2) საზღვრებში

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T+\delta A\right)=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\vec{v}_i\delta\vec{r}_i\right)dt\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\vec{v}_i\delta\vec{r}_i\right)\Big|_{t_1}^{t_2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i\left(t_2\right)\delta\vec{r}_i\left(t_2\right)-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i\left(t_1\right)\delta\vec{r}_i\left(t_1\right)=0$$

მივიღებთ

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T+\delta A\right)dt=0\qquad(25.2)$$

თუ ძალები კონსერვატულია

$$\delta A=-\delta\Pi,$$

$$\delta T+\delta A=\delta T-\delta\Pi=\delta\left(T-\Pi\right)=\delta L.$$

ამრიგად, კონსერვატული სისტემისთვის (25.2)-დან ვღებულობთ

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L dt=0\,.\qquad(25.3)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = S .$$

S ეწოდება ჰამილტონის ქმედება. (25.3)-დან ვღებულობთ

$$\delta S = 0 \qquad (25.4)$$

ორ მოცემულ კონფიგურაციას შორის სისტემის ნამდვილი მოძრაობა იმით განსხვავდება იმავე კონფიგურაციებს შორის დროის იმავე შუალედში კინემატიკურად დასაშვები მოძრაობებისაგან, რომ ნამდვილი მოძრაობისათვის ჰამილტონის ქმედების ვარიაცია ნულის ტოლია, ანუ ნამდვილი მოძრაობისათვის ჰამილტონის ქმედებას აქვს სტაციონარული მნიშვნელობა.

§26. მოძრაობის განტოლებების გამოყვანა ჰამილტონის პრინციპიდან

ჰამილტონის პრინციპის თანახმად

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \qquad (26.1)$$

ლაგრანჟის ფუნქცია $L\left(q_j, \dot{q}_j; t\right)$ არის განზოგადებული კოორდინატების, განზოგადებული სიჩქარეებისა და დროის ფუნქცია. ამ ფუნქციის ვარირებით მივიღებთ

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = 0 \qquad (26.2)$$

გამოვიყენოთ მეორე ჯამის წევრების მიმართ ნაწილობითი ინტეგრების წესი და ვისარგებლოთ იზოქრონული ვარიაციებიოსათვის კომუტატურობის პირობით,ამასთან ერთად, გავითვალისწინოთ, რომ $\delta q_j \,|_{t_1}^{t_2} = 0$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt}\left(\delta q_j\right) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\left(\delta q_j\right) - \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \,|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j dt \end{aligned} \qquad (26.3)$$

(26.3) ჩავსვათ (26.2) განტოლებაში. მივიღებთ

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \right] \delta q_j dt = 0 \qquad (26.4)$$

ვინაიდან ინტეგრების ინტერვალი ნებისმიერია, ხოლო δq_j ვარიაციები დამოუკიდებელია, ამიტომ ამ ინტეგრალის ნულთან ტოლობიდან გამომდინარეობს ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ნულთან ტოლობა, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0,\left(j=1,2,...,s\right) \qquad (26.5)$$

(26.5) წარმოადგენს ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებათა სისტემას.
ჰამილტონის პრინციპიდან ასეთივე წესით შეიძლება მივიღოთ მექანიკის კანონიკური განტოლებები. ჰამილტონის ქმედების ფუნქციას აქვს სახე

$$S=\int_{t_1}^{t_2} Ldt \qquad (26.6)$$

ვინაიდან ჰამილტონის ფუნქცია $H=\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j p_j - L$, აქედან

$$L=\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j p_j - H$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (26.6)-ში

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j p_j - H\right)dt\,.$$

ჰამილტონის პრინციპის თანახმად $\delta S=0$ ე,ი

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j p_j - H\right)dt=0 \text{ ანუ}$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j p_j\right)dt-\delta\int_{t_1}^{t_2}Hdt=0\,. \qquad (26.7)$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ განზოგადებული სიჩქარეები და განზოგადებული იმპულსები დამოუკიდებელი ცვლადებია, $\delta\dot{q}_j=\frac{d}{dt}\delta q_j$ და $t=t_1$ და $t=t_2$ მომენტებისათვის -$\delta q_j=0$.

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j p_j dt=\int_{t_1}^{t_2}(\sum_{j=1}^{s}p_j\delta\dot{q}_j+\sum\dot{q}_j\delta p_j)dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}(\sum_{j=1}^{s}p_j q_j)dt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\dot{p}_j\delta q_j dt+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\delta q_j dt=\sum_{j=1}^{s}p_j\delta q_j\,/_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}(\dot{q}_j\delta p_j- \qquad (26.8)$$
$$-p_j\delta q_j)dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}(\dot{q}_j\delta p_j-\dot{p}_j\delta q_j)dt$$

(26.7)-ის მეორე ინტეგრალის ვარიაცია იქნება

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}Hdt=\int_{t_1}^{t_2}\delta Hdt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j\right)dt \qquad (26.9)$$

თუ შევიტანთ (26.8) და (26.9)-ს (26.7)-ში, მივიღებთ

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{j=1}^{s}\left(\dot{q}_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\delta p_j-\sum_{j=1}^{s}\left(\dot{p}_j+\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)\delta q_j\right]dt=0. \qquad (26.10)$$

ვინაიდან δp_j და δq_j დამოუკიდებელი ვარიაციებია, ინტეგრალის ნულთან ტოლობიდან გამომდინარეობს მათი კოეფიციენტების ნულთან ტოლობა. აქედან ვღებულობთ

$$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad (j=1,2,...,s) \qquad (26.11)$$

მიღებული განტოლებები წარმოადგენს მექანიკის კანონიკურ განტოლებებს.

§27. მოპერტუი-ლაგრანჟის უმცირესი ქმედებების პრინციპი

ფუნქციას $w=\int_0^t 2Tdt$ ეწოდება ქმედება ლაგრანჟის მიხედვით. პოლონომური კონსერვატული სისტემის ნამდვილი მოძრაობისას ორ A და B კონფიგურაციას შორის. w-ს აქვს ექსტრემუმი ამ ფუნქციების მნიშვნელობასთან შედარებით სხვა კინემატიკურად შესაძლო გადაადგილებაზე, რომელიც ხდება იმავე კონფიგურაციებს შორის იმავე ენერგიით.

ერთმანეთთან ვადარებთ ისეთ შესაძლო ტრაექტორიებს, რომელთათვისაც ენერგიის ვარიაცია ნულის ტოლია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნამდვილ და ვირტუალურ გზებზე სისტემას ჰქონდეს ერთი და იგივე ენერგია, ამიტომ სისტემის მდებარეობას ნამდვილ და ვირტუალურ გზებზე აღარ შეესაბამება დროის ერთი და იგივე მომენტი. ვაქვს $\delta E=0$ და უნდა მოვითხოვოთ, რომ $\delta t\neq 0$. A--დან B კონფიგურაციაში გადასვლის დროს სხვადასხვა კინემატიკურად შესაძლო მოძრაობისათვის სხვადასხვაა. ამიტომ ინტეგრალის საზღვარი t ცვლადის სიდიდეა.

იმისათვის, რომ w ინტეგრალი იყოს სტაციონარული, აუცილებელია მისი სრული ვარიაცია იყოს ნულის ტოლი.

$$\Delta w=\Delta\int_0^t 2Tdt=0 \qquad (27.1)$$

ვინაიდან კონსერვატული სისტემისათვის$T+H=h$, ხოლო ლაგრანჟის ფუნქცია $L=T-\Pi$, გვექნება

$$L=2T-\Pi \qquad (27.2)$$

სტაციონარული ქმედების პრინციპის დასადგენად ვისარგებლოთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებით

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \quad (j=1,2,...,s)$$

გავამრავლოთ თითოეული განტოლება Δq_j–ზე და შევკრიბოთ.

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)\Delta q_j-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_j}\Delta q_j=0. \qquad (27.3)$$

გარდავქმნათ პირველი ჯამი

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)\Delta q_j=\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\Delta q_j\right)-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\frac{d}{dt}\left(\Delta q_j\right)=$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\Delta q_j\right)-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_j}\left[\Delta \dot q_j+\dot q_j\frac{d}{dt}\Delta q_j\right], \qquad (27.4)$$

(27.2)-ის თანახმად

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\Delta \dot q_j=2\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial q_j}\Delta \dot q_j \qquad (27.5)$$

გამოვიყენოთ ეილერის თეორემა ერთგვაროვანი ფუნქციებისათვის

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\dot q_j\right)\frac{d}{dt}\Delta t=\frac{d}{dt}\left(\Delta t\right)\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\dot q_j\right)=2T\frac{d}{dt}\Delta t \qquad (27.6)$$

თუ (27.5) და (27.6) შევიტანთ (27.4)-ში, მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)\Delta q_j=\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\Delta q_j\right)-2\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\Delta \dot q_j-2T\frac{d}{dt}\Delta t \qquad (27.7)$$

გარდავქმნათ (27.3)-ის მეორე ჯამი

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_j}\Delta q_j=2\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial q_j}\Delta q_j \qquad (27.8)$$

(27.7) და (27.8) ჩავსვათ (27.3)-ში

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_j}\Delta q_j\right)-2\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\Delta \dot q_j-2T\frac{d}{dt}\left(\Delta t\right)-2\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial q_j}\Delta q_j=0,$$

საიდანაც

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\Delta q_j\right)=\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial\left(2T\right)}{\partial q_j}\Delta q_j+\frac{\partial\left(2T\right)}{\partial \dot q_j}\Delta \dot q_j\right]+2T\frac{d\left(\Delta t\right)}{dt}.$$

აქ

$$\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial\left(2T\right)}{\partial q_j}\Delta q_j+\frac{\partial\left(2T\right)}{\partial \dot q_j}\Delta \dot q_j\right]=\Delta\left(2T\right).$$

ამიტომ

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\Delta q_j\right)=\left(\Delta 2T\right)+2T\frac{d\left(\Delta t\right)}{dt} \qquad (27.9)$$

გავამრავლოთ (27.9) განტოლების ორივე მხარე dt-ზე და ვაინტეგროთ 0-დან t-მდე.

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Delta q_j\,\Big|_0^t=\int_0^t\left[\Delta\left(2T\right)+2T\frac{d\left(\Delta t\right)}{dt}\right]dt \qquad (27.10)$$

ინტეგრალის სრული ვარიაციისთვის გვაქვს ფორმულა

$$\Delta\int_0^t \varphi dt-\int_0^t \Delta\varphi dt=\int_0^t \varphi\frac{d}{dt}\left(\Delta t\right)dt$$

ამიტომ $\int_0^t\left[\Delta\left(2T\right)+2T\frac{d\left(\Delta t\right)}{dt}\right]dt=\Delta\int_0^t 2Tdt$, (27.10)-დან მივიღებთ

$$\Delta\int_0^t 2\mathrm{T}dt=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Delta q_j\,\Big|_0^t \qquad (27.11)$$

შესაძლო ტრაექტორიების ბოლოებში განზოგადებული კოორდინატების სრული ვარიაცია უდრის ნულს, საიდანაც

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Delta q_j\,\Big|_0^t=0$$

ამიტომ (27.11)-დან ვღებულობთ

$$\Delta\int_0^t 2Tdt=0 \qquad (27.12)$$

ე.ი. ნამდვილი მოძრაობისათვის ქმედებას ლაგრანჟის მიხედვით აქვს სტაციონარული მნიშვნელობა.

ამასთან ქმედება ლაგრანჟის მიხედვით

$$w=\int_0^t 2Tdt=\int_0^t\sum_{i=1}^{n}m_i v_i^2 dt$$

ყოველთვის დადებითი ფუნქციაა.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. ა. გორგიძე, თეორიული მექანიკის კურსი. დინამიკა.19
2. ნ. ვეკუა, თეორიული მექანიკის კურსი.19
3. ვ. მამასახლისოვი, გ. ჭილაშვილი – თეორიული ფიზიკა, I, მექანიკა, თსუ გამომცემლობა, თბილისი, 1967
4. Н.А. Кильчевский, Курс теоретической механики, Т. 2, Изд-во „Наука“, М 1977
5. Н.Н.Бухгольц, Оснавной курс теоретической механики часть 2, Изд-во „Наука“, М 1966
6. Н.Б.Бутенин, Л.Л. Лунц, Д.Р. Маркин, Курс теоретической механики, Т.2, Изд-во „Наука“, М. 1979
7. А.А.Яблонский, Курс теоретической механики, часть 2, Изд-во „Наука“, М 1984
8. Н.И.Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон, Теоретическая механика в примерах и задачах, Т.II, Изд-во „Наука“, М. 1965
9. Ф.Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, Изд-во „Наука“, М 1965
10. Н.Б.Бутенин, Н.А. Фуфев, Введение в аналитическую механику, Изд-во „Наука“, М 1991
11. В.В. Добронравов, Основы аналитической механики, Изд-во „Высшая школа“, М. 1976

სარჩევი